

УДК 62—50

© 1991 г.

А. А. Меликян, Н. В. Овакимян

ОСОБЫЕ ТРАЕКТОРИИ В ЗАДАЧЕ ПРОСТОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ НА МНОГООБРАЗИИ

Рассматриваются игровые задачи, в фазовом пространстве (многообразии) которых существует не более двух минимальных геодезических линий, соединяющих две точки многообразия. Показано, что в подобных задачах могут появляться особые траектории — огибающие геодезических линий. Получено необходимое условие наличия особых движений (непустота множества (3.5)), представляющее собой определенное требование на геометрические свойства фазового многообразия игры. Предлагается алгоритм построения особых движений, приведены гамильтоновы уравнения, определяющие эти движения. Вопрос достаточности предлагаемой конструкции исследуется численно на рассмотренных конкретных примерах. Работа обобщает и развивает предыдущие исследования [1].

В ряде игровых задач преследования оптимальными траекториями игроков являются геодезические линии пространства фазовых состояний игры [2, 3]. Это имеет место, в частности, когда в качестве игроков фигурируют управляемые по скорости точки евклидова пространства со сферическими ограничениями на величины скоростей. В этом случае при любом расположении игроков существует единственная геодезическая линия (прямолинейный отрезок), соединяющая их; вдоль этой линии направлены их оптимальные скорости. Свойство геодезичности оптимальных траекторий может теряться, когда геодезическая линия, соединяющая игроков, для некоторого множества позиций неединственна. Подобная ситуация возникает, например, когда в евклидовом фазовом пространстве существует ограниченная область (препятствие), в которую игрокам запрещено попадать [1].

1. Игровая задача простого преследования. Пусть точки (игроки) P , E , принадлежащие некоторому n -мерному многообразию M (пространству игры), движутся согласно уравнениям

$$P: \dot{x} = u, u \in E_1(x); \quad (1.1)$$

$$E: \dot{y} = v, v \in E_v(y), 0 < v < 1$$

$$E_\alpha(x) = \{u \in R^n: (G(x)u, u) \leq \alpha^2\}$$

где $x, y \in R^n$ — локальные координаты точек P и E , $E_\alpha(x)$, $\alpha \geq 0$ — эллипсоид. Положительно-определенная матрица $G(x)$ представляет собой метрический тензор многообразия M ; скалярное произведение обозначено круглыми скобками.

Таким образом, скорость точки P не превышает по величине единицы, а скорость точки E не превышает $v > 0$. Поскольку $v < 1$, то у точки P есть возможность, вообще говоря, сокращать расстояние $L(x, y)$ между точками P и E . Цель игрока P — наискорейшее сближение точек P и E на расстояние l , т. е. выполнение условия

$$L(x(T), y(T)) \leq l \quad (l \geq 0) \quad (1.2)$$

для некоторого момента времени $T > 0$; нулевой момент времени принят за начальный. Игрок E заинтересован в максимизации момента поимки T . Предполагается, что $L(x(0), y(0)) > l$. Неотрицательное число l называется радиусом захвата [2].

Расстояние между точками P и E определяется при помощи следующей вариационной задачи [4]:

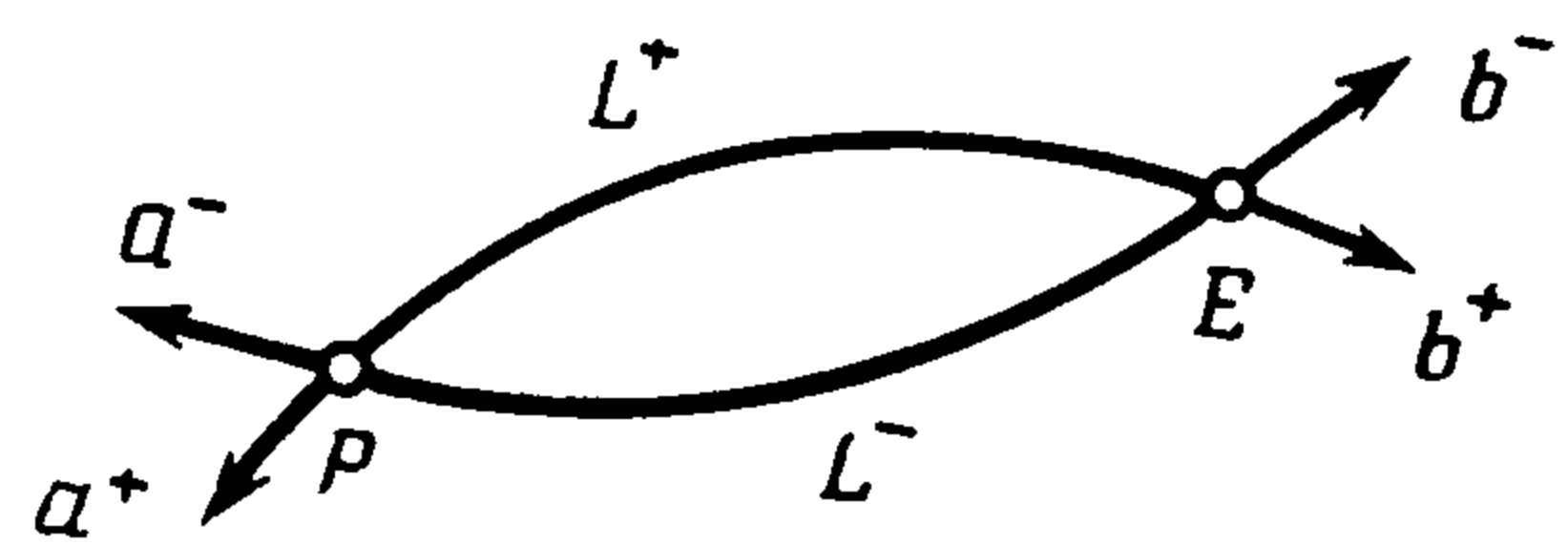
$$L(x, y) = \min_{\xi(\cdot)} \int_s^{s_1} \sqrt{(G(\xi) \xi', \xi')} ds, \quad \xi(s_0) = x, \quad \xi(s_1) = y \quad (1.3)$$

где минимум вычисляется по всем кусочно-гладким кривым, соединяющим точки P и E : $\xi(\cdot) = \{\xi(s): s_0 \leq s \leq s_1\}$.

Будем предполагать, что глобальный минимум (1.3) достигается для любой пары точек многообразия. Следующее основное предположение относительно геометрии многообразия состоит в том, что глобальный минимум (1.3), если он неединственен, может быть представлен в виде

$$L(x, y) = \min [L^+(x, y), L^-(x, y)] \quad (1.4)$$

где величины L^\pm доставляют локальные минимумы в (1.3), фиг. 1; зависимости $L^\pm(x, y)$ являются гладкими и определены в некоторой окрестности пары (x, y) , своей для каждой пары. Предположение (1.4) выполняется, например, в случае, когда точки движутся в евклидовой плоскости, содержащей ограниченное выпуклое препятствие [1], либо по двумерным поверхностям вращения в трехмерном пространстве.



Фиг. 1

Соотношениями (1.1), (1.2) описана дифференциальная игра с функцией платы (функционалом), равной времени процесса.

Игровую задачу будем рассматривать как объединение двух задач об оптимальном гарантированном результате для игроков P и E [5]; в минимаксной (максиминной) задаче используются позиционные управления игрока P (E) и кусочно-непрерывные функции времени для игрока E (P). Под оптимальными позиционными управлениями игроков будем понимать оптимальные (ε -оптимальные) гарантирующие стратегии в одной из упомянутых игр. Процедура построения траектории (движения) по заданной паре управления изложена в [5].

Для некоторого подмножества позиций (x, y) оптимальным для обоих игроков является движение с максимальными по величине скоростями по касательной к геодезической линии. Это устанавливается при помощи следующих соотношений. Рассмотрим производную по времени расстояния (1.3) вдоль движения системы (1.1)

$$L' = (L_x, u) + (L_y, v); \quad L_x = G(x) a, \quad L_y = G(y) b \quad (1.5)$$

$$a = a(x, y) = -\xi'(s_0) / |\xi'(s_0)|_x$$

$$b = b(x, y) = \xi'(s_1) / |\xi'(s_1)|_y; \quad |\eta|_x \equiv \sqrt{(G(x) \eta, \eta)}$$

Здесь a, b — единичные векторы, касательные к геодезической линии в ее концах, направленные во внешнюю сторону (фиг. 1). Формулы для частных производных L_x, L_y в (1.5) вытекают из вида первой вариации функционала (1.3) [4]. Вычисление минимакса или максимина производной (1.5) при ограничениях (1.1) дает

$$\min_u \max_v L' = \min_u (L_x, u) + \max_v (L_y, v) = -1 + v \quad (1.6)$$

$$u^*(x, y) = -a(x, y), \quad v^*(x, y) = v b(x, y)$$

Здесь u^*, v^* — единственные векторы, доставляющие экстремумы (1.6).

Таким образом, функция

$$S(x, y) = [L(x, y) - l]/(1 - v) \quad (1.7)$$

равная времени преследования по геодезической, в точках дифференцируемости длины $L(x, y)$ удовлетворяет основному уравнению теории дифференциальных игр [5]:

$$\min_u \max_v S^* = \max_v \min_u S^* = -1 \quad (1.8)$$

$$u \in E_1(x), \quad v \in E_v(y)$$

Используя соотношения (1.6)—(1.8), можно показать, что стратегия (1.6) гарантирует игроку P время преследования, не большее, чем (1.7); при наличии представления (1.4) стратегия может быть основана на любой из функций L^+ , L^- . Однако игроку E стратегия (1.6) уже не гарантирует, вообще говоря, время (1.7). Это имеет место, например, в случае, когда M представляет собой n -мерное евклидово пространство R^n , и формулы приобретают следующий простой вид:

$$L(x, y) = |x - y|; \quad u^*(x, y) = (y - x)/|y - x|$$

$$v^*(x, y) = v(y - x)/|y - x|$$

где $|x| = \sqrt{(x, x)}$ — евклидова норма вектора. Подобная асимметрия в возможностях игроков объясняется тем, что игрок P минимизирует величину, пропорциональную L , и в соотношении (1.4) также проводится минимизация.

Свойство (1.4) позволяет, вообще говоря, игроку P для некоторого подмножества позиций (x, y) гарантировать себе время преследования, меньшее, чем (1.7); стратегия преследования на этом подмножестве будет отличной от управления (1.6), рекомендуя движение вдоль геодезической.

2. Необходимое условие оптимальности. Обозначим через Z произведение $M \times M$; точки многообразия Z будем обозначать z , $z = (x, y) \in Z$. Условие (1.2) выделяет в Z так называемое терминальное множество $Z_T \subset Z$. Можно показать, что в достаточно малой окрестности множества Z_T оптимальным результатом (ценой) игровой задачи будет значение $S(z)$ в (1.7), гарантируемое стратегиями (1.6).

Будем предполагать, что в игре (1.1), (1.2) существует непрерывная цена игры $V(z)$, $z \in Z \setminus Z_T$. Обозначим неизвестную пока область, в которой величина $S(z)$ — цена игры, через $Z_1 \subset Z$, $S(z) = V(z)$, $z \in Z_1$. Функцию $S(z)$ и стратегии (1.6) для $z \in Z_1$ будем называть первичным решением. Обозначим через Γ_0 подмножество Z , в точках которого минимум (1.3) достигается на двух экстремаях, т. е. выполнено равенство $L^+(z) = L^-(z)$ для функций из (1.4). Пересечение $\Gamma_0 \cap Z_1$, вообще говоря, непусто. Для выделения точек множества Γ_0 , попадающих в Z_1 , необходимое условие (1.8) уже непригодно, так как функция $S(z)$, вообще говоря, недифференцируема для $z \in \Gamma_0$ даже при гладких $L^\pm(z)$. Сохранив обозначение V^* для производной функции цены $V(z)$ по направлению $(u, v) \in R^{2n}$, $V^* = V^*(z, u, v)$, можно записать следующие обобщенные необходимые условия оптимальности [5]:

$$\min_u \max_v V^*(z, u, v) \geq -1 \geq \max_v \min_u V^*(z, u, v) \quad (2.1)$$

$$u \in E_1(x), \quad v \in E_v(y)$$

Для некоторых классов игровых задач условия типа (2.1) вместе с граничными данными являются необходимыми и достаточными условиями

оптимальности функции $V(z)$ [5]. В данной работе соотношения (2.1) используются как локальные необходимые условия оптимальности.

Не приводя полного обоснования, поясним соотношения (2.1). Строгие неравенства противоположного смысла исключаются в (2.1), поскольку в этом случае, например, игрок P (если нарушено левое неравенство) может в окрестности точки z использовать в течение достаточно малого интервала времени фиксированное управление $u(z)$, доставляющее внешний минимум, и добиться строгого улучшения результата игры, в противоречие с предположением об оптимальности $V(z)$.

В точках гладкости функции $V(z)$ соотношения (2.1) переходят в равенства (1.8) для функции V . Вычисление экстремумов в (1.8) с использованием обозначения $p = (V_x, V_y) \in R^{2n}$ приводит к основному уравнению (уравнению Беллмана — Айзекса) следующего вида:

$$\begin{aligned} F(z, p) + 1 = 0; \quad F(z, p) &\equiv -\sqrt{(G^{-1}(x) V_x, V_x)} + \\ &+ v \sqrt{(G^{-1}(y) V_y, V_y)} \equiv -|\eta|_x + v|\psi|_y; \\ \eta = \eta(z, p) &= G^{-1}(x) V_x, \quad \psi = \psi(z, p) = G^{-1}(y) V_y; \\ u^*(z, p) &= -\eta/|\eta|_x, \quad v^*(z, p) = v\psi/|\psi|_y \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из равенств (1.5) вытекают следующие уравнения Гамильтона — Якоби (уравнения эйконала) для геодезического расстояния (1.3) [4]:

$$(G^{-1}(x) L_x, L_x) = 1, \quad (G^{-1}(y) L_y, L_y) = 1 \quad (2.3)$$

В силу равенств (2.3) функция (1.7) удовлетворяет уравнению (2.2). Оптимальные движения в игровой задаче определяются в области гладкости функции $S(z)$ уравнениями характеристик, соответствующими уравнению в частных производных (2.2) [4]

$$\begin{aligned} \dot{z} &= F_p, \quad \dot{p} = -F_z; \quad z = (x, y) \in R^{2n}, \\ p &= (V_x, V_y) \in R^{2n} \end{aligned} \quad (2.4)$$

3. Край многообразия Γ ; структура решения. Используем соотношения (2.1) для выделения тех точек множества Γ_0 , которые попадают в Z_1 . Через $a^\pm(z)$, $b^\pm(z)$ обозначим единичные касательные векторы к двум геодезическим в их концах, фиг. 1 (см. (1.5)). Производная по направлению в точках множества Γ_0 функции (1.7) при учете (1.4), (1.5) примет вид

$$\begin{aligned} S^* &= \min[S^{+*}, S^{-*}] \\ S^{\pm*}(z) &= [(L_x^\pm(z), u) + (L_y^\pm(z), v)]/(1 - v) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Функции S^\pm имеют вид (1.7) с заменой L на L^\pm .

Лемма 1. Максимин (2.1) в точках многообразия Γ_0 удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} \max_v \min_u \min [S^{+*}, S^{-*}] &= [-1 + v|b^+ + b^-|_y / 2] / (1 - v) \leq -1 \\ v &\in E_v(y), \quad u \in E_1(x) \end{aligned}$$

Последнее неравенство следует из условия $|b^+ + b^-|_y < 2$, очевидного для единичных векторов b^+ , b^- . Таким образом, правому условию в (2.1) удовлетворяют все точки множества Γ_0 .

Теорема 1. Минимакс (2.1) при $z \in \Gamma_0$ представим в виде

$$\begin{aligned} \min_u \max_v \min [S^{+*}, S^{-*}] &= \min[-1, \Phi(z)], \\ u &\in E_1(x), \quad v \in E_v(y); \\ \Phi(z) &\equiv \frac{1}{2(1-v)} [-|a^+ + a^-|_x + v|b^+ + b^-|_y] \equiv F(z, R_z(z)); \\ R(z) &= 1/2(S^+(z) + S^-(z)) \end{aligned} \quad (3.2)$$

причем минимум по u достигается на единственном векторе $u^* = -(a^+ + a^-) / |a^+ + a^-|_x$ при $\Phi(z) < -1$ и на двух векторах $u^* = -a^+$, $u^* = -a^-$ при $\Phi(z) > -1$. При $\Phi(z) = -1$ все три вектора доставляют минимум. В точках пересечения $\Gamma_0 \cap Z_1$ выполнено неравенство

$$\Phi(z) + 1 \equiv F(z, R_z(z)) + 1 \geq 0 \quad (3.3)$$

Таким образом, в область первичного решения Z_1 попадает лишь часть Γ_1 многообразия Γ_0 :

$$\Gamma_1 = \{z \in Z: S^+(z) = S^-(z), \Phi(z) \geq -1\} \quad (3.4)$$

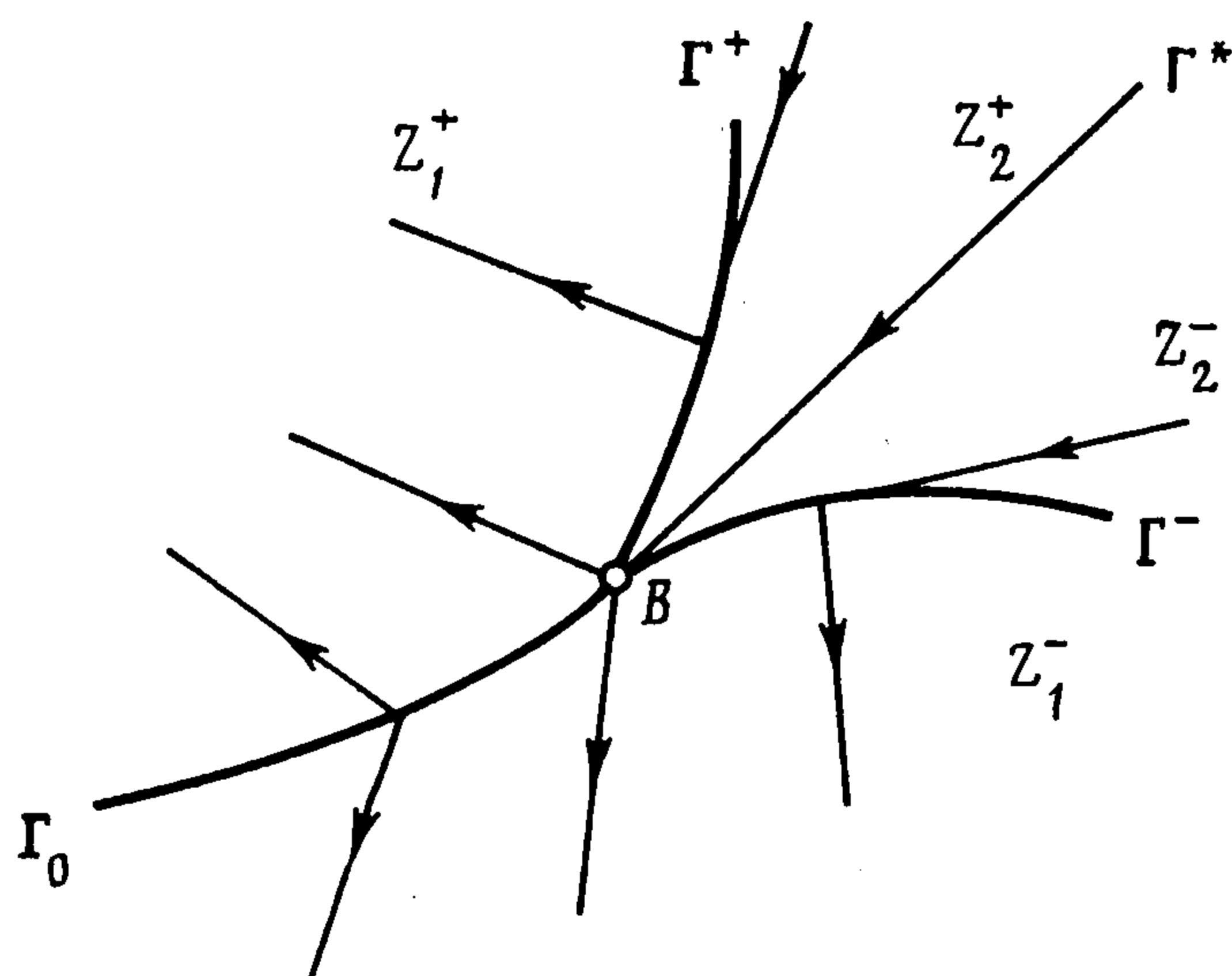
Обозначим через B край многообразия Γ_1 , точки которого удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} |a^+(z) + a^-(z)|_x - v |b^+(z) + b^-(z)|_y &= 2(1 - v), \\ L^+(z) &= L^-(z) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Условие (3.5) позволяет выделить многообразия M , в пределах которых управляемая по скорости преследующая точка имеет возможность

уменьшить время поимки (1.7) убегающей точки благодаря особой геометрии многообразия, стесняющей маневренные возможности убегающей точки.

Если фазовым пространством игры является, например, круговой цилиндр, то можно показать, что множество (3.5) пусто, а Γ_1 совпадает с Γ_0 . В задаче преследования на евклидовой плоскости с ограниченным выпуклым препятствием [1] или на выпуклом двумерном конусе множество B непусто, см. разд. 5.



Фиг. 2

Пусть множество B непусто. Предположим, как это сделано в [1], что многообразии B — край двух ветвей Γ^+ , Γ^- особой экивокальной поверхности в соответствии с качественной картиной, приведенной на фиг. 2.

Экивокальная поверхность является [1, 3, 6] поверхностью переключения (разрыва) оптимальных управлений обоих игроков, содержащей особые оптимальные траектории. Если по достижении фазовой точки экивокальной поверхности один из игроков (управляющий данной поверхностью [6]) не осуществит переключение, то реализуется оптимальное скольжение вдоль поверхности; в случае переключения оптимальная траектория трансверсально удаляется в другую сторону от поверхности. В задаче с простым движением игроков, когда экстремумы (1.8) достигаются на единственных векторах, оптимальные траектории с необходимостью подходят к экивокальной поверхности с касанием [6].

Пространство Z представим в виде суммы $Z = Z_1 + \Gamma + Z_2$, $\Gamma = \Gamma^+ + \Gamma^-$; для точек $z \in Z_2$ игрок P строго улучшает результат (1.7). Данная гипотеза о структуре решения игровой задачи (1.1), (1.2) опирается на необходимые условия оптимальности (1.8), (2.1), (2.2), (3.3) и условия следующего раздела; является ли эта система необходимых условий полной, т. е. позволяет ли построить единственное решение, в каждом отдельном случае должно устанавливаться специально, вообще говоря, при помощи численного интегрирования уравнений особых характеристик.

4. Уравнения особых характеристик. Таким образом, на неизвестной поверхности Γ выполнены следующие необходимые условия оптимальности в форме равенств:

$$F_0(z, p) \equiv F(z, p) + 1 = 0, F_1(z, V) \equiv V - S(z) = 0 \quad (4.1)$$

$$F_{-1}(z, p) \equiv \{F_1 F_0\} \equiv (F_p(z, p), p - q(z)) = 0 \quad (q(z) = S_z(z))$$

Первое равенство представляет собой уравнение Беллмана — Айзекса, второе — условие непрерывности цены игры, третье — условие касания поверхности Γ оптимальной траектории, идущей из области Z_2 [1, 6]. Фигурными скобками в (4.1) обозначены скобки Якоби в пространстве переменных (z, p, V) (скобки Пуассона, если зависимость от V отсутствует).

Согласно методике, развитой в [7, 8], для вывода уравнений особых траекторий, составляющих многообразие Γ коразмерности единица в Z -пространстве, достаточно задания трех равенств вида $F_i(z, p, V) = 0$. Искомые уравнения представляют собой гамильтоновы уравнения с гамильтонианом (с точностью до ненулевого множителя)

$$H = \{F_{-1} F_1\} F_0 + \{F_1 F_0\} F_{-1} + \{F_0 F_{-1}\} F_1 \quad (4.2)$$

Для построения поверхности Γ следует из всех точек края B выпустить решения системы

$$z' = H_p, p' = -H_z - H_V p, V' = (p, H_p)$$

предварительно отыскав для каждой точки $z \in B$ соответствующее значение $p(z)$. Ветвь Γ^+ (Γ^-) строится с использованием в (4.1) функции S^+ (S^-) вместо S .

Используя в (4.2) функции (4.1) и нормируя гамильтониан H таким образом, чтобы при F_0 оказался единичный множитель, получим уравнения особых движений в виде

$$z' = F_0 p, p' = -F_0 z - \frac{\{F_0 \{F_1 F_0\}\}}{\{F_1 \{F_0 F_1\}\}} (p - q(z)) \quad (4.3)$$

Последнее уравнение $V' = (p, H_p)$ отщепляется. Подчеркнем, что уравнения (4.3) записываются с помощью двух функций F_0 и S , так как $F_1 \equiv V - S$.

Начальные значения $z, p(z)$ для системы (4.3) доставляет следующее утверждение.

Лемма 2. При $z \in B$ для ветви Γ^+ векторы $p = q^+, p = (q^+ + q^-)/2 = R_z$ удовлетворяют равенствам $F_0 = 0, F_{-1} = 0$ системы (4.1). Для ветви Γ^- соответствующими решениями будут $p = q^-, p = (q^+ + q^-)/2 = R_z$.

Справедливость леммы устанавливается прямыми вычислениями с использованием соотношений (2.2), (2.3), (3.2), (3.5) и симметричности матрицы G^{-1} .

Таким образом, величина

$$p = \frac{1}{2} (q^+ + q^-) \equiv R_z \quad (4.4)$$

является начальным значением для p (сопряженного вектора) при построении обеих ветвей Γ^+ и Γ^- . Тот факт, что для обеих ветвей Γ^+ и Γ^- существует общее решение (4.4), означает, что градиент цены $V(z)$ непрерывно продолжаем из области Z_2 на край B . Другие решения соответствуют первичному решению задачи.

Если в некоторой области матрица G — единичная, то функция F в (2.2) для этой области имеет вид

$$F(p) = -\sqrt{p_1^2 + \dots + p_n^2} + \nu \sqrt{p_{n+1}^2 + \dots + p_{2n}^2} \quad (4.5)$$

т. е. является однородной степени единица функцией вектора p . Соответствующая система упростится и примет вид [1, 6]

$$\dot{z} = F_p, \quad \dot{p} = [(S_{zz}F_p, F_p)/(F_{pp}q, q)] (p - q) \quad (4.6)$$

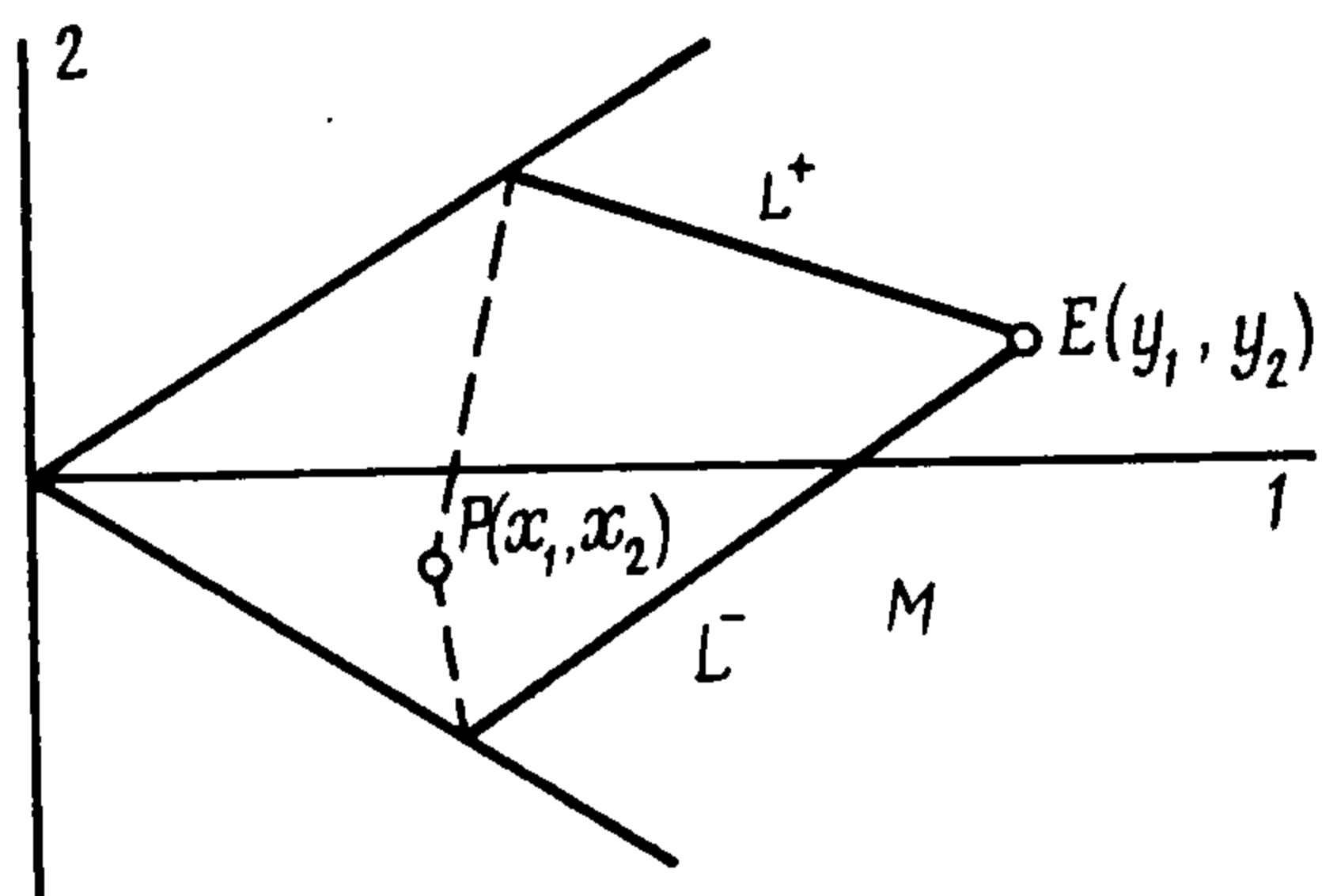
где S_{zz}, F_{pp} — симметричные матрицы вторых частных производных (гессианы).

Оптимальные движения в области Z_2 можно построить, интегрируя систему (2.4) в обратном времени с начальными условиями $z = z^0, p = p(z^0), z^0 \in \Gamma$. Другой способ построения заключается в том, чтобы при интегрировании системы (4.3) в некоторый момент времени скачком положить $\dot{p} = -F_{0z}$, т. е. перейти к системе (2.4). Если в качестве такого момента скачка выбрать начальный, получим траекторию, исходящую из точки края B , с начальным значением сопряженного вектора (4.4). Совокупность таких траекторий, образующих некоторую поверхность Γ^* , разбивает область Z_2 на две подобласти $Z_2 = Z_2^+ + \Gamma^* + Z_2^-$. Поверхность Γ^* касается обеих поверхностей Γ^+ и Γ^- в точках края B .

5. Примеры. Рассмотрим в качестве фазового пространства игры (1.1)—(1.4) прямой круговой цилиндр в трехмерном евклидовом пространстве. В этом случае для векторов a^\pm, b^\pm в (3.5) имеет место равенство $a^+ + a^- = -(b^+ + b^-)$. Поскольку $|a^+ + a^-| < 2$, то множество B , определяемое равенством (3.5), пусто. Таким образом, для цилиндра преследование и убежание по геодезическим линиям являются оптимальными.

Пусть фазовое пространство игры — евклидова плоскость с выпуклым ограниченным препятствием [1]. Можно показать, что множество B здесь непусто и является двумерным многообразием с краем (эквивалентным фазовому пространству). Численное исследование особых траекторий проведено в [1].

Рассмотрим, наконец, в качестве фазового пространства двумерный выпуклый конус в трехмерном евклидовом пространстве с индуцированной на нем метрикой. Путем



Фиг. 3

деформации выпуклый конус можно отобразить на двусторонний двухлистый плоский угол (с сохранением геодезической длины). Поскольку анализ игровой задачи для случая плоского угла оказывается более простым, то дальнейшее рассмотрение относится к этому случаю. Полагаем $l = 0$. Поимка считается осуществленной, если точки P и E оказываются на одной и той же стороне плоскости и совпадают.

Выберем декартову прямоугольную систему координат с началом в вершине угла и осью абсцисс, направленной по биссектрисе (фиг. 3).

Величина угла α лежит в интервале $0 < \alpha < \pi$. Геодезическими линиями являются прямолинейные отрезки (если точки P, E расположены на одном листе) или двузвенные ломаные линии (точки P, E находятся на разных сторонах). Пусть (x_1, x_2) и (y_1, y_2) — координаты точек P и E соответственно, причем они находятся на разных сторонах поверхности. Две кратчайшие геодезические, пересекающие разные лучи угла (фиг. 3), имеют длины

$$L^\pm = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} [(a^2 + 1)(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2) + 2(a^2 - 1)(x_1y_1 - x_2y_2) \mp 4a(x_2y_1 \mp x_1y_2)]^{1/2} \quad (5.1)$$

Здесь $a = \operatorname{tg} \alpha/2$. Формула (5.1) может быть получена из простых геометрических рассуждений. Равенство $L^+ = L^-$, определяющее точки множества Γ_0 (см. разд. 2), дает

$$x_1/x_2 = -y_1/y_2$$

т. е. точки P и E , расположенные на разных листах, лежат на симметричных относительно оси абсцисс лучах. Деформируя двухлиственный угол, эти лучи можно совместить со сторонами угла, либо с биссектрисой — осью абсцисс; последнее позволяет произвольную точку множества Γ_0 привести к виду: $P(x_1, 0)$, $E(y_1, 0)$.

Дифференцируя функции (5.1), можно найти векторы a^\pm, b^\pm вида (1.5) (матрица G — единичная) и составить первое уравнение (3.5). Функции (5.1) являются положительно однородными функциями векторов x, y степени единица, вследствие чего величины $|a^+ + a^-|, |b^+ + b^-|$ в (3.5) оказываются однородными нулевой степени. Поэтому один из параметров x_1, y_1 , определяющих точку множества B , как указано выше, можно приравнять заданной величине. Положим $y_1 = 1$. Тогда соотношение (3.5) перейдет в уравнение относительно величины x_1 , которое разрешается в конечном виде.

Поскольку в рассматриваемой задаче нет характерного размера, то условие нормировки $y_1 = 1$ может быть удовлетворено путем выбора масштаба длины. В задаче с препятствием [1] характерный размер определяет препятствие, поэтому подобная автомодельность в упомянутой задаче отсутствует.

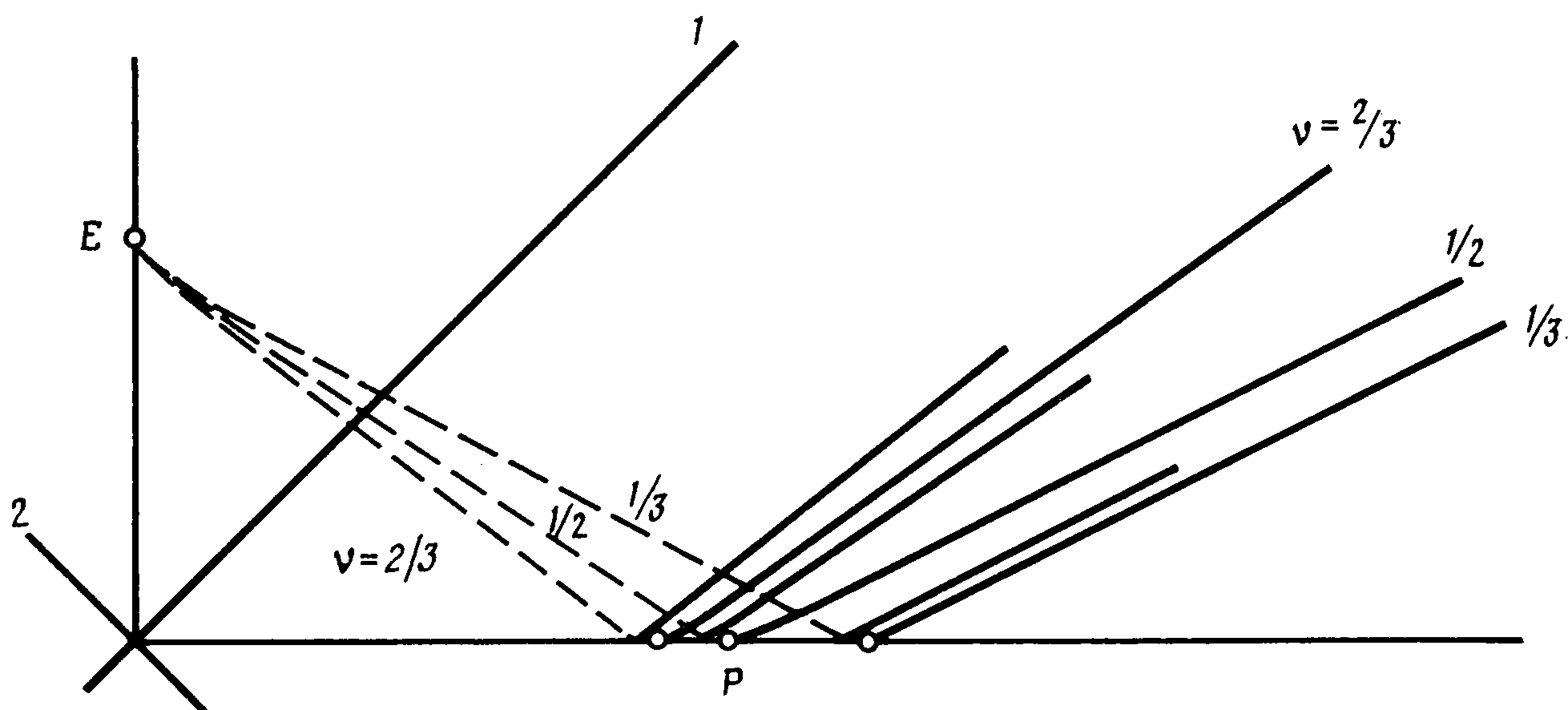
Для построения особых траекторий, составляющих экивокальную поверхность, необходимо, вообще говоря, интегрировать в обратном времени уравнения (4.3) с начальными условиями (см. (4.4))

$$z(0) = z^0, \quad p(0) = \frac{1}{2}(q^+(z^0) + q^-(z^0)), \quad z^0 \in B$$

для всех точек z^0 из множества B . Проведенное рассмотрение показывает, что произвольную точку z^0 множества B можно привести к виду $z^0 = \lambda z^*$, $z^* = (x_1^*, 0, 1, 0)$, $\lambda > 0$, где x_1^* — упомянутый корень уравнения (3.5). Кроме того, уравнения (4.3) с функцией F (4.5) и зависимостью $S(z) = L/(1 - v)$, где L имеет вид (5.1), инвариантны относительно замены координат и времени $z = \lambda \xi, t = \lambda \tau$ при произвольном $\lambda > 0$.

Таким образом, путем простого пересчета особая траектория, выходящая из произвольной точки множества B , может быть получена из стандартной траектории, стартовой в точке z^* , т. е. построение полного синтеза в данной игровой задаче сводится к построению двух плоских кривых.

Подобные стандартные траектории численно построены для значений $a = 1, v = 1/3, 1/2, 2/3$ (фиг. 4). Видно, что свойства выпуклости этих траекторий таковы, что со-



Фиг. 4

вокупность касательных полупрямых к ним однозначно замечает область Z_2 , введенную в разд. 2, что позволяет при помощи формул (2.2) и (1.6) определить оптимальные позиционные стратегии игроков во всем пространстве игры. Эти управления однозначны всюду, кроме рассеивающей Γ_1 и экивокальной Γ поверхностей. Полный анализ гарантирующих стратегий в окрестности особых поверхностей требует специального рассмотрения.

Расчеты показывают также, что особые траектории игроков имеют прямолинейные асимптоты, к которым очень быстро сходятся.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вишневецкий Л. С., Меликян А. А. Оптимальное преследование на плоскости при наличии препятствия // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 613—620.
2. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
3. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
4. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
5. Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
6. Меликян А. А. Необходимые условия оптимальности на поверхности разрыва одного типа в дифференциальной игре // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1981. № 4. С. 10—18.
7. Меликян А. А. О построении слабых разрывов в задачах оптимального управления и дифференциальных игр // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1984. № 1. С. 45—50.
8. Меликян А. А., Овсеевич А. И. Гамильтоновы системы с заданным инвариантным многообразием и некоторые их приложения // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 205—213.

Москва

Поступила в редакцию
26.XII.1989