Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 1, 1991

УДК 531.36 : 62—50

Б. Н. Соколов

СТАБИЛИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА УПРАВЛЕНИЕ

Исследуется асимптотическая устойчивость управляемой системы, в которой позиционное управление является «срезкой» управляющего воздействия линейного регулятора по величине геометрических ограничений. Дается оценка размеров области притяжения положения равновесия динамической системы со «срезанным» управлением. Получены необходимые и достаточные условия, позволяющие сделать размеры этой области сколь угодно большими за счет подбора параметров интегрального квадратичного функционала.

Построение оптимального по быстродействию ограниченного позиционного (и даже программного) управления, приводящего динамическую систему в начало координат, затруднительно при большой размерности системы [1]. Поэтому в ряде работ были предложены не оптимальные законы управления, но позволяющие решать задачу за приемлемое время [2—4]. Хорошо развиты методы, связанные с построением оптимальных налитических регуляторов [1, 5—7], обеспечивающих асимптотическую устойчивость управляемой системы в заданном положении [5—10]. Соответствующее управление является линейной функцией фазовых координат с постоянной матрицей обратной связи и находится из условия минимума интегрального квадратичного функционала. Однако это управление не будет удовлетворять заданным дополнительно геометрическим ограничениям в некоторой области фазовых координат. Были выписаны [5] необходимые и достаточные условия оптимальности позиционного управления в задаче с геометрическими ограничениями, но полностью построить управление удается лишь при малой размерности системы. Поэтому часто используется управление типа «срезки», однако область притяжения положения равновесия в общем случае определена не была. Был дан [8, 9] анализ устойчивости нелинейных регулируемых систем с фиксированным типом нелинейности.

1. Постановка задачи. Рассматривается вполне управляемая [1] динамическая система

$$\dot{x} = Fx + Gu, \quad \operatorname{rank} \| G, FG, F^2G, \ldots, F^{n-1}G \| = n \tag{1.1}$$

Здесь $x \in R^n$ — фазовый вектор, F и G — постоянные матрицы, $u \in R^m$ — вектор управлений. Начальное положение x_0 системы (1.1) в момент $t = 0$ задано. Позиционное управление, обеспечивающее асимптотическую устойчивость в целом [11] тривиального решения $x(t) = 0$ системы (1.1), выбирается из условия минимума квадратичного функционала

$$J(x_0) = \min_u \int_0^\infty (x^T Ax + u^T Bu)\, dt \tag{1.2}$$

где A и B — постоянные положительно определенные симметричные матрицы.

Известно [10], что $J(x_0)$ — квадратичная функция начального фазового состояния

$$J(x_0) = x_0{}^T S x_0$$

где симметричная положительно определенная матрица S удовлетворяет алгебраическому уравнению Риккати

$$SRS = SF + F^T S + A, \quad R \equiv GB^{-1}G^T \tag{1.3}$$

Из результатов работ [6, 7] следует, что решение уравнения Риккати для вполне управляемой системы (1.1) всегда существует, в [7] дан алгоритм его вычисления. Оптимальное управление, доставляющее минимум функционалу (1.2), определяется формулой [1]

$$u(x) = -B^{-1}G^T Sx \tag{1.4}$$

Допустим, что на управление системой (1.1) наложено дополнительное ограничение

$$|u(t)| \leqslant 1 \tag{1.5}$$

Рассмотрим управление

$$\begin{gathered} u^*(x) = -B^{-1}G^T Sx \quad \text{при} \quad |B^{-1}G^T Sx| \leqslant 1 \\ u^*(x) = -B^{-1}G^T Sx \, |B^{-1}G^T Sx|^{-1} \quad \text{при} \quad |B^{-1}G^T Sx| > 1 \end{gathered} \tag{1.6}$$

Можно убедиться, что, вообще говоря, управление вида (1.6) не будет оптимальным для задачи с функционалом (1.2) и геометрическим ограничением (1.5). Поэтому такое управление не гарантирует сходимость интеграла (1.2) и тем самым не гарантирует асимтотическую устойчивость управляемой системы (1.1), (1.6) в целом. Цель работы — дать оценку области притяжения [11] тривиального решения $x(t) = 0$ системы (1.1) со срезанным управлением (1.6) и определить условия, при которых размеры этой области можно неограниченно увеличивать за счет подбора параметров интегрального функционала (1.2).

2. Основные результаты. Пусть заданы две квадратичные формы, определяемые матрицами L_1 и L_2. Будем говорить, что $L_2 < L_1$, если $x^T L_2 x < x^T L_1 x$ для всех x.

Лемма 1. Рассмотрим управляемую систему (1.1) с функционалом (1.2). Пусть $S_{1(2)}$ — решение уравнения Риккати (1.3), соответствующее матрице $A_{1(2)}$. Тогда если $A_1 > A_2$, то $S_1 > S_2$.

Доказательство. Пусть $u_{1(2)}(t)$ — программное управление системой (1.1), доставляющее минимум функционалу (1.2) при квадратичной форме с матрицей $A_{1(2)}$, а $x_{1(2)}(t)$ — соответствующая программная траектория, $x_{1(2)}(0) = x_0$. Утверждение леммы вытекает из следующей цепочки соотношений:

$$x_0^T S_1 x_0 = \int_0^\infty (x_1^T A_1 x_1 + u_1^T B u_1)\, dt > \int_0^\infty (x_1^T A_2 x_1 + u_1^T B u_1)\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^\infty (x_2^T A_2 x_2 + u_2^T B u_2)\, dt = x_0^T S_2 x_0$$

Другое доказательство этой леммы дано в [12].

Лемма 2. Пусть S — решение уравнения Риккати (1.3), соответствующее системе (1.1). Для того, чтобы имело место соотношение

$$\lim S = 0 \quad \text{при} \quad A \to 0 \tag{2.1}$$

необходимо и достаточно, чтобы для всех собственных значений λ_i оператора F (1.1) было выполнено неравенство: $\operatorname{Re} \lambda_i \leqslant 0$.

Доказательство. Достаточность. Далее $\lim S$ будем рассматривать только при $A \to 0$. Поэтому при записи предела либо выражения $S \to 0$ условие $A \to 0$ будем всюду опускать. Пусть θ — невырожденная комплексная матрица. Введем обозначения

$$x_N = \theta^{-1}x, \quad F_N = \theta^{-1}F\theta, \quad S_N = \theta^* S\theta,$$

$$A_N = \theta^* A\theta, \quad G_N = \theta^{-1}G, \quad R_N = \theta^{-1}GB^{-1}G^T\theta^{-1*}$$

и подберем матрицу θ так, чтобы матрица F_N имела нормальную жорданову форму (звездочкой обозначена транспонированная и комплексно-сопряженная матрица). В переменных x_N, F_N, G_N уравнения (1.1) сохраняют свой вид. Допустим, что у матрицы F_N

на главной диагонали стоят r жордановых клеток и что l-я жорданова клетка ($l = 1, \ldots, r$) размера $n_l \times n_l$ имеет вид

$$F_l = \begin{Vmatrix} \lambda_l & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_l & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_l \end{Vmatrix} = \lambda_l E_{n_l} + I^1_{n_l} \tag{2.2}$$

где E_{n_l} — единичная матрица размером $n_l \times n_l$ и $I^1_{n_l}$ — матрица размером $n_l \times n_l$, у которой над главной диагональю стоят единицы, а на остальных местах — нули. Через L_{ij} будем обозначать элемент ij матрицы L. Таким образом

$$\begin{gathered} (I^1_{n_l})_{ij} = 1 \quad \text{при} \quad i = j - 1, \ (I^1_{n_l})_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j - 1 \\ (I^{1*}_{n_l})_{ij} = 1 \quad \text{при} \quad j = i - 1, \quad (I^{1*}_{n_l})_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad j \neq i - 1 \end{gathered} \tag{2.3}$$

Заметим сначала следующее. Пусть $i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, \ldots, i_{\alpha_{k(\alpha)}}$ — номера строк матрицы F_{N}, которым соответствуют последние строки жордановых клеток (2.2) с собственным значением λ_α, $k(\alpha)$ — число таких клеток. Пусть G^α_{N} — подматрица матрицы G_{N}, образованная строками с теми же номерами: $i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, \ldots, i_{\alpha_{k(\alpha)}}$. Из результатов работы [13] следует, что для полной управляемости системы необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{rank} G^\alpha_{\mathrm{N}} = k(\alpha), \quad \alpha = 1, 2, \ldots \tag{2.4}$$

В переменных $S_{\mathrm{N}}, A_{\mathrm{N}}, R_{\mathrm{N}}$ уравнение Риккати (1.3) принимает следующий вид (индекс «N» далее при доказательстве леммы всюду опускаем)

$$SRS = F^*S + SF + A, \quad R \equiv GB^{-1}G^* \tag{2.5}$$

Здесь S, A, R — самосопряженные, S и A — положительно определенные и R — неотрицательно определенные матрицы.

Рассмотрим сначала простейший вид матрицы F и докажем свойство (2.1) при $\operatorname{Re} \lambda_l \leqslant 0$ для любых l. Пусть $r = 2$ и $n_1 = n_2$, $l = 1, 2$, $2n_1 = n$. Таким образом, матрица F на главной диагонали имеет две комплексно-сопряженные жордановы клетки, соответствующие собственным значениям λ_1 и $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$. Пусть S_i — i-й столбец матрицы S. Тогда матричное уравнение (2.1), записанное для элементов с индексом ij матриц, стоящих в левой и правой частях уравнения (2.5), при учете свойств (2.3) примет вид

$$S_i^* RS_j = S_{ij}(\lambda_p + \bar{\lambda}_q) + S_{ij-1} + S_{i-1j} + A_{ij} \tag{2.6}$$

Здесь при $1 \leqslant i, j \leqslant n_1$ следует положить $p = q = 1$ и опустить в правой части члены вида S_{i0} и S_{0j}, если они там будут. При $n_1 + 1 \leqslant i, j \leqslant n$ следует положить $p = q = 2$ и опустить в правой части члены вида S_{n_1j}, S_{in_1}. При $1 \leqslant i \leqslant n_1$, $n_1 + 1 \leqslant j \leqslant n$ следует положить $p = 2$, $q = 1$ и опустить члены вида S_{in_1}, S_{0j}, если они составляют второе и третье слагаемое правой части (2.6).

По предположению выполнено условие: $\operatorname{Re} \lambda_1 \leqslant 0$. Возможны два случая: $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$ и $\operatorname{Re} \lambda_1 = 0$. Пусть $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$. Тогда из уравнения (2.6) при $i = j = 1$ следует равенство

$$S_1^*RS_1 = 2S_{11} \operatorname{Re} \lambda_1 + A_{11}$$

где R — неотрицательно определенная матрица и $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$. Поэтому при $A \to 0$ имеем $S_{11} \to 0$ и в силу критерия Сильвестера положительной определенности матрицы S и ее ограниченности (см. лемму 1) выполнено условие $S_{1j}, S_{j1} \to 0$. При $i, j = 2$ из уравнения (2.6) имеем

$$S_2^*RS_2 + 2S_{22}(-\operatorname{Re} \lambda_1) = S_{21} + S_{12} + A_{22}$$

Правая часть этого равенства стремится к нулю. Поэтому в силу своей неотрицательности стремится к нулю и каждое слагаемое в левой части, т. е. $S_{22} \to 0$ и $S_{2j}, S_{j2} \to 0$ и т. д. для всех индексов $i, j = 3$; $i, j = 4$; $\ldots$; $i, j = n$. Заметим, что условие $S_{ii} \to 0$ установлено для произвольных значений индекса i, отвечающего жордановой клетке с отрицательным собственным значением.

Пусть $\operatorname{Re} \lambda_1 = 0$ и $\operatorname{Im} \lambda_1 \neq 0$. Уравнение (2.6) при $i = 1$ имеет вид ($S_{10} = 0$)

$$S_1^*RS_j = S_{1j-1} + A_{1j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n_1 \tag{2.7}$$

При $j = 1$ из уравнения (2.7) получаем: $S_1^*RS_1 \to 0$. Отсюда в силу неотрицательности матрицы SRS и ограниченности S имеем: $S_1^*RS_j \to 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Из уравнения (2.7) при $j = 2$ следует: $S_{11} \to 0$ и

$$S_{1j}, S_{j1} \to 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{2.8}$$

в силу положительной определенности и ограниченности матрицы S. При $i = 2$ из соотношения (2.6) получаем уравнение (S_{20} в силу пояснений к формуле (2.6) следует опустить)

$$S_2{}^*RS_j = S_{2j-1} + S_{1j} + A_{2j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n_1$$

Отсюда при $j = 2$ и соотношения (2.8) получаем, что $S_2{}^*RS_2 \to 0$, и, следовательно,

$$S_2{}^*RS_j \to 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{2.9}$$

Из уравнения (2.6) при $i = 2, j = 3$ имеем

$$S_2{}^*RS_3 = S_{22} + S_{13} + A_{23}$$

Отсюда и из соотношений (2.8), (2.9) следует, что $S_{22} \to 0$ и

$$S_{2j} \to 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Проводя последовательно аналогичные рассуждения для $i, j = 2, 3, 4, \ldots, n_1 - 1$ приходим к выводу, что при $i \leqslant n_1 - 1 \bigcup j \leqslant n_1 - 1$

$$S_{ij} \to 0 \tag{2.10}$$

При $i, j = n_1$ из уравнения (2.6) имеем

$$S_{n_1}{}^*RS_{n_1} = S_{n_1n_1-1} + S_{n_1-1n_1} + A_{n_1n_1}$$

Согласно соотношению (2.10) из этого уравнения следует: $S_{n_1}{}^*RS_{n_1} \to 0$, и следовательно,

$$S_i{}^*RS_j \to 0, \quad i \leqslant n_1 \bigcup j \leqslant n_1 \tag{2.11}$$

При доказательстве соотношений (2.10), (2.11) использовалось только следующее свойство левой части системы равенств (2.6): ограниченность и неотрицательность матрицы SRS, а также ограниченность и положительность матрицы S. Эти свойства следуют из определения S (1.2) и леммы 1. Группа уравнений (2.6) при $1 \leqslant i, j \leqslant n_1$ «зацепляется» с уравнениями (2.6) при $n_1 + 1 \leqslant i, j \leqslant n$ только через левую часть, указанные свойства которой от числа жордановых клеток не зависят. Поэтому аналогично могут быть доказаны при $n_1 + 1 \leqslant i, j \leqslant n$ следующие соотношения: $S_i{}^*RS_j \to 0$. Совместно с соотношениями (2.11) это дает условие: $SRS \to 0$. Учитывая положительную определенность матрицы B и определение R (2.5), окончательно получим

$$SG \to 0 \tag{2.12}$$

Аналогично выводу соотношений (2.10) получим, что при $i \neq n_1, n \bigcap j \neq n_1, n$

$$S_{ij} \to 0 \tag{2.13}$$

При $i = n_1$ и $j = n$ из уравнения (2.6) следует

$$S_{n_1}{}^*RS_n = S_{n_1n}(\lambda_1 + \bar{\lambda}_2) + S_{n_1n-1} + S_{n_1-1n} + A_{n_1n} \tag{2.14}$$

Левая часть этого равенства стремится к нулю в силу формулы (2.12); S_{n_1n-1}, $S_{n_1-1n} \to 0$ в силу формулы (2.13). По предположению $\lambda_1 + \bar{\lambda}_2 \neq 0$. Поэтому

$$S_{nn_1}, S_{n_1n} \to 0 \tag{2.15}$$

Соотношение (2.12), записанное для n_1-й строки, при учете формул (2.13), (2.15) представим в виде

$$S_{n_1n_1} \| G_{n_11}, G_{n_12}, \ldots, G_{n_1m} \| \to 0$$

и аналогично для n-й строки. Согласно условию (2.4) среди компонент n_1-й строки матрицы управлений G найдется хотя бы одна, отличная от нуля. Поэтому $S_{n_1n_1}$ и, аналогично, $S_{nn} \to 0$. Таким образом, соотношение (2.1) при $\operatorname{Re}\lambda_1 = 0$, $\operatorname{Im}\lambda_1 \neq 0$ доказано.

Пусть $\operatorname{Im}\lambda_1 = \operatorname{Re}\lambda_1 = 0$, т. е. имеем две жордановы клетки с нулевыми собственными значениями. В этом случае соотношения (2.12), (2.13) остаются справедливыми. Из соотношения (2.12) при учете (2.13) получаем соотношение

$$\left\| \begin{matrix} S_{n_1n_1} & S_{n_1n} \\ S_{nn_1} & S_{nn} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} G_{n_11} & \ldots & G_{n_1m} \\ G_{n1} & \ldots & G_{nm} \end{matrix} \right\| \to 0 \tag{2.16}$$

В силу условия полной управляемости (2.4) ранг стоящей вторым сомножителем матрицы равен двум, следовательно, первый сомножитель также стремится к нулю. Совместно с условием (2.13) это доказывает формулу (2.1) для матрицы F, состоящей из двух жордановых клеток.

Для матрицы F общего вида идея доказательства полностью сохраняется. Обоснование соотношений вида (2.12) и (2.13) никаких дополнительных рассуждений не требует. Соотношение типа (2.15) для тех значений индексов, которым соответствует ненулевая сумма собственных значений в круглых скобках уравнения (2.14), очевидно, справедливо. Пусть сумма собственных значений в круглых скобках (2.14) равна нулю. Это отвечает в силу условия $\operatorname{Re}\lambda_l \leqslant 0,\ l = 1, 2, \ldots, r$, значениям индексов i, j, соответствующих номерам последних строк жордановых клеток (2.2) с одинаковыми и чисто мнимыми собственными значениями. Воспользуемся условием полной управляемости (2.4) и соотношением (2.12). Эти условия приводят к выражению типа (2.16), где вместо индексов n_1, n в первой матрице будут стоять номера последних строк жордановых клеток с указанными собственными значениями. Число столбцов в этой матрице равно числу соответствующих жордановых клеток и равно рангу второго в (2.16) сомножителя согласно условию (2.4) полной управляемости. Поэтому все элементы первой матрицы стремятся к нулю. Совместно с выражением типа (2.13) для остальных значений индексов это обеспечивает выполнение утверждений леммы 2.

Необходимость. Пусть при некотором i выполнено условие $\operatorname{Re}\lambda_i > 0$. Покажем, что S нельзя сделать сколь угодно малым за счет соответствующего выбора A (1.2). Допустим, что это не так, т. е. соотношение (2.1) по-прежнему имеет место. Стабилизирующее управление связано с матрицей S формулой (1.4). Это означает, что при любом фиксированном начальном положении x^0 величина оптимального в смысле критерия (1.2) управления $u(t)$ может быть сделана сколь угодно малой равномерно при всех $t \in [0, \infty)$. Пусть неособым преобразованием матрица F (1.1) приведена к жордановой форме и уравнение движения для некоторого k, соответствующего номеру последней строки жордановой клетки (2.2) с $\operatorname{Re}\lambda > 0$, имеет вид

$$x_k^{\cdot} = \lambda x_k + (Gu)_k, \quad \operatorname{Re}\lambda > 0 \tag{2.17}$$

Будем считать для простоты, что u — скаляр и G — вектор. Тогда в силу условия полной управляемости (2.4) системы (1.1) выполнено условие: $G_k \neq 0$. Воспользуемся формулой Коши для записи решения уравнения (2.17) (индекс k далее опускаем)

$$x(t) = x^0 \exp(\lambda t) + \int_0^t \exp(\lambda\tau)\, Gu(\tau)\, d\tau$$

Разделяя действительные и мнимые части, имеем

$$x_1(t) = \exp(\lambda_1 t)(x_1^{\circ}\cos\lambda_2 t - x_2^{\circ}\sin\lambda_2 t) +$$
$$+ \int_0^t \exp(\lambda_1\tau)(g_1\cos\lambda_2\tau - g_2\sin\lambda_2\tau)\, u(\tau)\, d\tau$$
$$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2, \quad G = g_1 + ig_2, \quad x = x_1 + ix_2$$

Из этого равенства следует, что при

$$\lambda_1 [x_1^{\circ 2} + x_2^{\circ 2}]^{1/2} > [g_1^2 + g_2^2]^{1/2}$$

не существует управления $u(\tau)$, обеспечивающего асимптотическое стремление к нулю решения уравнения (2.17) и удовлетворяющего оценке $|u(\tau)| \leqslant 1$ при всех τ. Таким образом, при $\operatorname{Re}\lambda_i > 0$ сделать стабилизирующее управление сколь угодно малым нельзя, что противоречит предположению о возможности произвольного уменьшения матрицы S.

Лемма 3. Множество начальных значений

$$|x_0| \leqslant 2\, \| B^{-1}G^{\mathrm{T}} \|^{-1} \| S \|^{-1} \tag{2.18}$$

принадлежит области притяжения положения равновесия O системы (1.1) с управлением (1.6).

Доказательство. Рассмотрим $(x^T Sx)^{\cdot}$ в силу системы (1.1) при управлении (1.6). Если $|B^{-1}G^T Sx| \leqslant 1$, то $(x^T Sx)^{\cdot} < 0$ в силу определения S (1.2).

Пусть $|B^{-1}G^T Sx| > 1$. После несложных выкладок, учитывающих уравнение (1.3), получим

$$(x^T Sx)^{\cdot} = x^T (SGB^{-1}G^T S - A - 2SGB^{-1}G^T S\, |B^{-1}G^T Sx|^{-1})\, x$$

Очевидно, чтобы квадратичная форма, стоящая в правой части равенства, была бы отрицательно определенной на траекториях системы (1.1) при управлении (1.6), достаточно выполнения неравенства

$$2 \geqslant | B^{-1}G^T Sx | \qquad (2.19)$$

Пусть x_0 — положение системы (1.1) в момент t_0 и $x^T Sx < x_0{}^T Sx_0$ при $t > t_0$ на решениях системы (1.1) в силу неравенства $(x^T Sx)^{\cdot} < 0$. Можно получить, что

$$\max_x | Sx | = (\| S \| x_0{}^T Sx_0)^{1/2}, \quad x^T Sx \leqslant x_0{}^T Sx_0$$

Поэтому для выполнения неравенства (2.19) достаточно неравенства (2.18).

Заметим, что оценка $| x_0 | \leqslant \| B^{-1}G^T \|^{-1} \| S \|^{-1}$ области притяжения положения равновесия O системы (1.1) вытекает непосредственно из соотношений (1.4), (1.5).

Согласно леммам 1 и 2 область (2.18) может быть сделана сколь угодно большой, если для всех собственных значений оператора F выполнено условие: $\operatorname{Re} \lambda_i \leqslant 0$.

Отсюда имеем теорему. Пусть система (1.1) вполне управляема и все $\operatorname{Re} \lambda_i \leqslant 0$. Тогда для любого ограниченного множества начальных положений x_0 существует матрица A функционала (1.2), гарантирующая принадлежность этого множества области притяжения положения равновесия O системы (1.1) с управлением (1.6).

Замечание. Пусть $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$ при некотором k. При доказательстве необходимости условий леммы 2 было установлено, что в этом случае в фазовом пространстве существуют точки, не принадлежащие области притяжения положения равновесия O системы (1.1) ни при каком позиционном управлении $u(x)$, удовлетворяющем ограничению (1.5).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Брайсон А., Хо Ю-ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 с.
2. *Черноусько Ф. Л.* О построении ограниченного управления в колебательных системах // ПММ, 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 549—558.
3. *Овсеевич А. И.* О полной управляемости линейных динамических систем // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 5. С. 845—848.
4. *Соколов Б. Н.* Оценка величины управления в линейной задаче с квадратичным функционалом // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 4. С. 678—681.
5. *Летов А. М.* Устойчивость нелинейных регулируемых систем. М.: Физматгиз, 1962. 483 с.
6. *Кириллова Ф. М.* К задаче об аналитическом конструировании регуляторов // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 3. С. 433—439.
7. *Репин Ю. М., Третьяков В. Е.* Решение задачи об аналитическом конструировании регуляторов на электронных моделирующих устройствах // Автоматика и телемеханика. 1963. Т. 24. № 6. С. 738—743.
8. *Лурье А. И.* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. М.; Л.: Гостехиздат, 1951. 216 с.
9. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1987. 304 с.
10. *Kalman R. E.* When is a binear control system optimal? // Trans. ASME. Ser. D. J. Basic Eng. 1964. V. 86. № 1. P. 51 — 60; = Тр. америк. о-ва инж.-механиков: Теорет. основы инж. расчетов. 1964. Т. 86. № 1. С. 69—84.
11. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
12. *Derese I., Noldus E.* Design of linear feedback laws for bilinear systems // Intern. J. Control. 1980. V. 31. № 2. P. 219—237.
13. *Соколов Б. Н.* О минимальной размерности вектора управлений в линейной задаче стабилизации. // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 5. С. 864—866.

Москва

Поступила в редакцию
6.X.1989