Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 1, 1991

УДК 531.36 : 62 — 50

Г. Н. Мильштейн, О. Э. Соловьева

РЕКУРРЕНТНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

Оценивание фазовых состояний и параметров нелинейных детерминированных систем дифференциальных уравнений сводится к задаче минимизации по начальным данным функционала, зависящего от наблюдений и априорной информации. Выводятся уравнения оптимального нелинейного фильтра, для реализации которого требуется многократное интегрирование вспомогательных систем дифференциальных уравнений. Строится модифицированный, более простой фильтр, близкий к оптимальному во многих достаточно типичных ситуациях. Большое внимание уделяется задаче оценивания с частично известными начальными данными, к которой, в частности, относится задача идентификации параметров системы с известными фазовыми состояниями в начальный момент времени. В линейном случае в отсутствие априорной информации полученные результаты дают детерминированный вариант калмановской фильтрации.

Наиболее конструктивные результаты по оцениванию были получены для линейных систем (см. общие подходы [1], рекуррентная фильтрация при известной априорной информации статистического характера о начальных данных и шумах в объекте и в наблюдениях [2], детерминированный вариант рекуррентного оценивания с игровым подходом при известных ограничениях на помехи [3], детерминированный вариант калмановской фильтрации [4, 5]).

1. Постановка задачи. Рассматриваются вопросы оценивания нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$X' = f(s, X), \quad s \geqslant t_0 \tag{1.1}$$

с наблюдениями

$$y(s) \doteq \varphi(s, X(s)), \quad s \geqslant t_0 \tag{1.2}$$

Штрих означает производную по s, X, y — векторы-столбцы соответственно с n и m компонентами, приближенное равенство в (1.2) свидетельствует о наличии неизвестной помехи в наблюдениях.

Задача идентификации параметра Λ (Λ — вектор размерности l) в системе

$$X' = f(s, X, \Lambda) \tag{1.3}$$

по наблюдениям (1.2) при учете соотношений

$$\Lambda' = 0 \tag{1.4}$$

сводится, очевидно, к задаче оценивания фазовых переменных в системе (1.3)—(1.4) по наблюдениям (1.2) (функция φ в (1.2) в этом случае может зависеть от параметра Λ: $\varphi = \varphi(s, X(s), \Lambda)$).

Предполагается, что $f(s, x, \lambda)$ и $\varphi(s, x, \lambda)$ таковы, что допустимы все последующие действия, использующие продолжительность по времени решений систем дифференциальных уравнений и дифференцируемость этих решений по начальным данным и параметрам. Эти требования обеспечиваются, например, известными условиями гладкости f и φ и ограниченности роста f.

Введем функционал $J(X'(\cdot))$ вдоль решений системы (1.1)

$$J = \alpha |X(t_0) - \bar{x}|^2 + \int_{t_0}^{t} g(s, X(s))\, ds, \quad \alpha \geqslant 0 \tag{1.5}$$

где x — известный вектор, g — функция, составленная с учетом наблюдений (1.2), например $g(s, x) = |y(s) - \varphi(s, x)|^2$.

Поскольку решение $X(s; \vartheta, x)$ системы (1.1) однозначно определяется начальными данными

$$X(\vartheta) = x \tag{1.6}$$

при любом $\vartheta \geqslant t_0$, на функционал J можно смотреть как на функцию, которую обозначим $J(t; \vartheta, x)$.

Оценку состояния $X(\vartheta)$ (параметра Λ), $\vartheta \geqslant t_0$, по наблюдениям на промежутке $[t_0, t]$ обозначим $x_{\vartheta/t}^{\wedge}$ ($\lambda_{\vartheta/t}^{\wedge}$). Будем ее искать из условия минимизации функции $J(t; \vartheta, x)$ по x.

Понятно, что

$$J(t; s, X(s; \vartheta, x)) = J(t; \vartheta, x)$$

Поэтому справедливо равенство

$$x_{s/t}^{\wedge} = X(s; \vartheta, x_{\vartheta/t}^{\wedge}) \tag{1.7}$$

благодаря которому можно ограничиться отысканием оценки $x_{t_0/t}^{\wedge}$, являющейся решением задачи минимизации

$$J(t; x) \overset{\Delta}{=} J(t; t_0, x) = \alpha |x - \bar{x}|^2 + \int_{t_0}^{t} g(s, X(s; t_0, x))\, ds \to \min_{x} \tag{1.8}$$

Ближайшая цель — вывод дифференциальных уравнений для $x_{t_0/t}^{\wedge}$.

2. Вывод уравнений нелинейного фильтра. *Случай* $\alpha > 0$. Если $t = t_0$, то минимум в (1.8) достигается при $x = \bar{x}$. Поэтому $x_{t_0/t}^{\wedge} = \bar{x}$. При $t > t_0$ для отыскания x в (1.8) рассмотрим эквивалентную задачу минимизации функционала (1.5) вдоль решений системы (1.1). Это задача Больца, и необходимые условия в ней могут быть получены методом множителей Лагранжа [6]. Можно доказать, что множитель Лагранжа при подынтегральной функции из (1.5) отличен от нуля и потому может быть положен равным единице. В итоге уравнения Эйлера — Лагранжа в задаче (1.5), (1.1) приобретают вид

$$X' = f(s, X), \quad p' = g_x(s, X) - f_x^T(s, X)p \tag{2.1}$$

$$p(t_0) = 2\alpha (X(t_0) - \bar{x}), \quad p(t) = 0 \tag{2.2}$$

Использованы следующие обозначения. Пусть $y(x)$ — некоторый скаляр, а $Y(x) = (y_1(x), y_2(x), \ldots, y_k(x))^T$ — вектор-столбец, зависящие от m переменных $x = (x_1, \ldots, x_m)$. Тогда

$$y_x \overset{\Delta}{=} \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial x_1} \\ \cdots \\ \dfrac{\partial y}{\partial x_m} \end{Vmatrix}, \quad Y_x \overset{\Delta}{=} \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial y_k}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_k}{\partial x_m} \end{Vmatrix}$$

Понятно, что решение краевой задачи (2.1), (2.2) существует, если существует решение задачи (1.5), (1.1) или, что то же самое, решение задачи (1.8). Если к тому же решение краевой задачи единственно, то оно будет давать оптимальное решение, которое при каждом t определяется начальными данными

$$X(t_0) = \hat{x}_{t_0/t},\ p(t_0) = 2\alpha(\hat{x}_{t_0/t} - \bar{x})$$

Обозначим для краткости $X(s; x)$, $p(s; x)$ — решение системы (2.1) с начальными данными $X(t_0) = x$, $p(t_0) = 2\alpha(x - \bar{x})$. Тогда имеет место тождество по t

$$p(t; \hat{x}_{t_0/t}) = 0 \tag{2.3}$$

Отсюда получим уравнение фильтра для формирования оценки

$$d\hat{x}_{t_0/t}/dt = -p_x^{-1}(t; \hat{x}_{t_0/t})' p_t(t; \hat{x}_{t_0/t}) =$$
$$= -p_x^{-1}(t; \hat{x}_{t_0/t})\, g_x(t, X(t; \hat{x}_{t_0/t})),\quad \hat{x}_{t_0/t_0} = \bar{x} \tag{2.4}$$

Матрица $p_x(s; x)$ — часть решения системы в вариациях для (2.1):

$$X_x' = f_x(s, X(s; x))X_x,\ X_x(t_0; x) = I \tag{2.5}$$

$$p_x' = g_{xx}(s, X(s; x))X_x - \left\{\frac{\partial f_x^T}{\partial x_i}(s, X(s; x))\, p(s; x)\right\} X_x - f_x^T(s, X(s; x))\, p_x,$$
$$p_x(t_0; x) = 2\alpha I \tag{2.6}$$

В (2.5), (2.6) I — единичная $(n \times n)$-матрица, $\left\{\frac{\partial f_x^T}{\partial x_i} p\right\}$ — матрица, составленная из столбцов $\frac{\partial f_x^T}{\partial x_i} p$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ясно, что при t, близких к t_0, матрица p_x обратима. В дальнейшем предполагается, что матрица p_x обратима для всех рассматриваемых моментов времени. Из (2.6) получим, что p_x^{-1} удовлетворяет системе уравнений

$$p_x^{-1\prime} = -p_x^{-1}\left[g_{xx}X_x - \left\{\frac{\partial f_x^T}{\partial x_i} p\right\} X_x\right] p_x^{-1} + p_x^{-1} f_x^T$$
$$p_x^{-1}(t_0; x) = {}^1\!/_2\alpha^{-1} I \tag{2.7}$$

Правые части системы уравнений (2.4) для оценки $\hat{x}_{t_0/t}$ определяются функциями $p_x^{-1}(s; x)$ и $X(s; x)$, зависящими от $n + 1$ переменных s, x. Эти функции являются частью решения задачи Коши (2.1), (2.5), (2.7) с $X(t_0) = x$, $p(t_0) = 2\alpha(x - \bar{x})$.

Для численного решения системы (2.4) можно использовать любые известные методы, например, типа Рунге — Кутта. Но ввиду специфики правых частей для их подсчета требуется многократное интегрирование системы (2.1), (2.5), (2.7) на удлиняющихся промежутках времени с соответствующими начальными данными.

Поясним сказанное на методе Эйлера. Пусть $x^{\wedge(k)}$ — приближение для $\hat{x}_{t_0/t_k}$. Тогда $x^{\wedge(k+1)}$ находится следующим образом. На промежутке $[t_0, t_k]$ решается система (2.1), (2.5), (2.7) с начальными данными

$$X(t_0) = x^{\wedge(k)},\ p(t_0) = 2\alpha(x^{\wedge(k)} - \bar{x})$$
$$X_x(t_0) = I,\ p_x^{-1}(t_0) = {}^1\!/_2\alpha^{-1} I$$

В результате этого будут найдены $X(t_k; x^{\wedge(k)})$, $p_x^{-1}(t_k; x^{\wedge(k)})$ и

$$x^{\wedge(k+1)} = x^{\wedge(k)} - h p_x^{-1}(t_k; x^{\wedge(k)})\, g_x(t_k, X(t_k; x^{\wedge(k)}))$$

Случай $\alpha = 0$. Необходимые условия в задаче минимизации функционала (1.5) вдоль решений системы (1.1) сохраняются в виде уравнений Эйлера — Лагранжа (2.1)—(2.2) и при $\alpha = 0$ (при этом, разумеется, в (2.2) $p(t_0) = 0$). Пусть в результате решения краевой задачи (2.1)—(2.2) при $\alpha = 0$ и $t = t_1 > t_0$ найдена оценка $\hat{x}_{t_0/t_1}$. Тогда поведение $\hat{x}_{t_0/t}$ при $t \geqslant t_1$ описывается фильтром (2.4) с начальными данными $\hat{x}_{t_0/t_1}$. Для реализации этого фильтра потребуется многократно интегрировать системы (2.1), (2.5) и (2.6), начиная с момента t_0 (подчеркнем, что не с момента t_1). Интегрирование системы (2.6) на промежутке $[t_0, t]$ с обращением матрицы p_x в момент t (см. (2.4)) можно заменить интегрированием этой системы на промежутке $[t_0, t_1]$, обращением p_x в момент t_1 и переходом к интегрированию системы (2.7) на промежутке $[t_1, t]$ с начальными данными $p_x^{-1}(t_1; x^{\wedge}_{t_0/t})$.

Сравнивая случаи $\alpha = 0$ и $\alpha > 0$, видим, что при $\alpha > 0$ решение задачи оценивания значительно проще. Это обусловлено присутствием регуляризующего слагаемого $\alpha \mid x - \bar{x} \mid^2$, $\alpha > 0$, в функционале, определяющем качество оценивания, и связано с наличием некоторой априорной информации относительно оцениваемых величин. Вместо слагаемого $\alpha \mid x - \bar{x} \mid^2$ можно ввести в зависимости от характера априорной информации другое выражение, например

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mid x_i - \bar{x}_i \mid^2, \quad \alpha_i \geqslant 0$$

Понятно, что подобное изменение функционала (1.5) не приведет к существенным изменениям полученных результатов.

3. Задача оценивания с частично известными начальными данными. Пусть известны первые k компонент $X_1(t_0) = \bar{x}_1, \ldots, X_k(t_0) = \bar{x}_k$ начального вектора $X(t_0)$. Для оценивания остальных $n - k$ компонент по наблюдениям (1.2) рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J = \alpha \sum_{i=1}^{n-k} (X_{k+i}(t_0) - \bar{x}_{k+i})^2 + \int_{t_0}^{t} g(s, X(s))\, ds, \quad \alpha > 0 \tag{3.1}$$

где $\bar{x}_{k+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n - k)$, — известные числа. Этот функционал является функцией от $n - k$ последних компонент вектора $X(t_0)$. Задача минимизации (3.1), (1.1) с условиями $X_1(t_0) = \bar{x}_1, \ldots, X_k(t_0) = \bar{x}_k$ относится к классу задач Больца [6], и уравнения Эйлера — Лагранжа для нее имеют тот же вид (2.1), однако краевые условия здесь другие:

$$\begin{gathered} X_i(t_0) = \bar{x}_i, \; i = 1, 2, \ldots, k, \; p_i(t_0) = 2\alpha (X_i(t_0) - \bar{x}_i) \\ i = k + 1, k + 2, \ldots, n; \; p_i(t) = 0, \; i = 1, 2, \ldots, n \end{gathered} \tag{3.2}$$

Решение системы (2.1), удовлетворяющее начальным данным:

$$X_i(t_0) = \bar{x}_i, \; i = 1, 2, \ldots, k, \; X_{k+i}(t_0) = x_{k+i} \overset{\Delta}{=} \xi_i, \; i = 1, 2, \ldots, n - k$$

$$\begin{gathered} p_i(t_0) = p_i, \; i = 1, 2, \ldots, k, \; p_{k+i}(t_0) = 2\alpha (x_{k+i} - \bar{x}_{k+i}) \overset{\Delta}{=} \\ \overset{\Delta}{=} 2\alpha (\xi_i - \bar{\xi}_i), \; i = 1, 2, \ldots, n - k \end{gathered}$$

обозначим $X(t; \xi)$, $p(t; \chi) = p(t; \xi, \pi)$, где $\chi = [\xi, \pi]$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-k})^T$, $\pi = (p_1, \ldots, p_k)^T$.

Аналогом уравнения (2.3) является уравнение

$$p(t; \xi^{\wedge}, \pi^{\wedge}) = p(t; \chi^{\wedge}) = 0 \tag{3.3}$$

Ясно, что $\{x^{\wedge}_{t_0/t}\}_i = \bar{x}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, а $\xi^{\wedge}(t)$ дает остальные $n - k$ координат вектора $x^{\wedge}_{t_0/t}$. Из уравнения (3.3) получим систему дифференциальных уравнений для $\chi^{\wedge}(t)$

$$\begin{gathered} d\chi^{\wedge}/dt = -p_\chi^{-1}(t; \chi^{\wedge})\, g_x(t, X(t; \xi^{\wedge}(t))), \\ \chi^{\wedge}(t_0) = (\bar{\xi}, 0)^T = (\bar{x}_{k+1}, \ldots, \bar{x}_n, 0, \ldots, 0)^T \end{gathered}$$

Матрица p_χ состоит из двух блоков: $p_\chi = [p_\xi : p_\pi]$, где p_ξ — $[n \times (n - k)]$-матрица, p_π — $(n \times k)$-матрица. Матрица p_ξ является частью решения системы дифференциальных уравнений

$$X_\xi' = f_x(s, X(s;\xi))\,X_\xi,\ X_\xi(t_0) = \begin{Vmatrix} O_{k\times(n-k)} \\ \cdots \\ I_{(n-k)\times(n-k)} \end{Vmatrix} \tag{3.4}$$

$$p_\xi' = g_{xx}(s, X(s;\xi))\,X_\xi - \left\{\frac{\partial f_x^{\,T}}{\partial x_i}(s, X(s;\xi))\,p(s;\chi)\right\} X_\xi -$$
$$- f_x^{\,T}(s, X(s;\xi))\,p_\xi,\ p_\xi(t_0) = \begin{Vmatrix} O_{k\times(n-k)} \\ 2\alpha I_{(n-k)\times(n-k)} \end{Vmatrix} \tag{3.5}$$

где O и I — нулевая и единичная матрицы указанных размерностей.

Наконец, матрица p_π удовлетворяет системе

$$p_\pi' = -f_x^{\,T}(s, X(s;\xi))\,p_\pi,\ p_\pi(t_0) = \begin{Vmatrix} I_{k\times k} \\ O_{(n-k)\times k} \end{Vmatrix} \tag{3.6}$$

Размерность системы (3.4) меньше размерности системы (2.5), а система (3.5)—(3.6) для p_χ получилась разделенной в отличие от системы (2.6) для p_x, что несколько упрощает решение задачи оценивания.

На основании систем (3.5) и (3.6) можно выписать систему дифференциальных уравнений и для p_χ^{-1}.

Отметим, что случай $\alpha = 0$ естественным образом переносится на рассматриваемую задачу.

4. Второй вариант уравнений фильтра. Вывод уравнений фильтра в разд. 2.3 опирался на необходимые условия в задаче Больца. Необходимые условия другого вида можно получить, если непосредственно решать задачу минимизации функции $J\,(t;\,x)$ из (1.8). Имеем

$$J_x(t;\,x^\wedge_{t_0/t}) \overset{t}{\equiv} 0 \tag{4.1}$$

Отсюда (для определенности рассматривается случай $\alpha > 0$)

$$dx^\wedge_{t_0/t}/dt = -J_{xx}^{-1}(t;\,x^\wedge_{t_0/t})\,J_{xt}(t;\,x^\wedge_{t_0/t}) =$$
$$= -J_{xx}^{-1}(t;\,x^\wedge_{t_0/t})\,X_x^{\,T}(t;\,x^\wedge_{t_0/t})\,g_x(t, X(t;\,x^\wedge_{t_0/t})),\quad x^\wedge_{t_0/t_0} = \bar{x} \tag{4.2}$$

Для матрицы $J_{xx}(s;\,x)$ получим уравнение

$$J_{xx}' = \left\{\frac{\partial X_x^{\,T}}{\partial x_i}(s;\,x)\,g_x(s, X(s;\,x))\right\} +$$
$$+ X_x^{\,T}(s;\,x)\,g_{xx}(s, X(s;\,x))\,X_x(s;\,x),\ J_{xx}(t_0;\,x) = 2\alpha I \tag{4.3}$$

В (4.3) в фигурных скобках — матрица, состоящая из столбцов $(\partial X_x^{\,T}/\partial x_i)g_x$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Реализация фильтра в форме (4.2) из-за присутствия вторых производных по начальным данным в общем случае гораздо сложнее, нежели в форме (2.4). Вместе с тем возможны ситуации, когда второй вариант фильтра оказывается более рациональным. Именно так получается в задаче из разд. 3 при малом количестве оцениваемых координат.

Действительно, (3.1) представляет собой функцию $J\,(t;\,\xi)$. Подобно (4.2), (4.3) получим

$$d\xi^\wedge/dt = -J_{\xi\xi}^{-1}(t;\,\xi^\wedge)\,X_\xi^{\,T}(t;\,\xi^T)\,g_x(t, X(t;\,\xi^\wedge)),\ \xi^\wedge(t_0) = \bar{\xi} \tag{4.4}$$

$$J_{\xi\xi}' = \left\{\frac{\partial X_\xi^{\,T}}{\partial \xi_i}(s;\,\xi)\,g_x(s, X(s;\,\xi))\right\} + X_\xi^{\,T}(s;\,\xi)\,g_{xx}(s, X(s;\,\xi))\,X_\xi(s;\,\xi),$$
$$J_{\xi\xi}(t_0;\,\xi) = 2\alpha I_{(n-k)\times(n-k)} \tag{4.5}$$

Для реализации фильтров, помимо решения систем относительно X и X_ξ, в первом варианте (см. разд. 3) необходимо интегрировать системы относительно p, p_χ и $\chi^\wedge$, размерности которых n, n^2 и n не зависят от размерности ξ, а во втором варианте требуется интегрировать системы относительно $\partial X_\xi{}^T/\partial\xi_i$ $(i = \overline{1, n-k})$ общей размерности $(n-k)^2 n$, систему относительно $J_{\xi\xi}$ размерности $1/2\,(n-k)(n-k+1)$ и, наконец, систему относительно $\xi^\wedge$ размерности $n-k$. Понятно, что при небольших $n-k$ вторая форма фильтра оказывается предпочтительней.

5. **Линейная фильтрация.** В линейном случае соотношения (1.1), (1.2) и (1.5) принимают вид

$$X' = A\,(s)X,\ y\,(s) \doteq C\,(s)X\,(s) \tag{5.1}$$

$$J = \alpha\,|\,X\,(t_0) - \bar{x}\,|^2 + \int\limits_{t_0}^{t} |\,y\,(s) - C\,(s)\,X\,(s)\,|^2\,ds$$

где $A\,(s)$ — $(n \times n)$-матрица, C — $(m \times n)$-матрица.

Уравнения фильтра (4.2)—(4.3) в рассматриваемом случае существенно упрощаются. Действительно, пусть $F\,(s, \tau)$ — фундаментальная матрица решений системы (5.1). Тогда $F\,(s, t_0)$ — решение системы (2.5) и $X_x{}^T\,(s;\,x) = F^T\,(s, t_0)$. Отсюда $\partial X_x{}^T/\partial x_i = 0$. Далее матрица $J_{xx}\,(s;\,x)$ не зависит от x, поскольку функция $J\,(s;\,x)$ квадратична по x.

Введя обозначение $L\,(s) = {}^1/_2 J_{xx}\,(s)$, из (4.2) и (4.3) получим уравнения

$$\begin{gathered} dx^\wedge_{t_0/t}/dt = L^{-1}\,(t)\,F^T\,(t, t_0)\,C^T\,(t)\,(y\,(t) - C\,(t)\,F\,(t, t_0)\,x^\wedge_{t_0/t}), \qquad x^\wedge_{t_0/t_0} = \bar{x} \\ dL^{-1}/dt = -L^{-1}F^T\,(t, t_0)\,C^T\,(t)\,C\,(t)\,F\,(t, t_0)\,L^{-1},\ L^{-1}\,(t_0) = \alpha^{-1}I \end{gathered} \tag{5.2}$$

Так как $x_t{}^\wedge \stackrel{\Delta}{=} x^\wedge_{t/t} = F\,(t, t_0)x^\wedge_{t_0/t}$, то после введения матрицы $M^{-1}\,(t) = F\,(t, t_0)L^{-1}\,(t)F^T\,(t, t_0)$, из (5.2) получим уравнения фильтра для оценки текущего состояния

$$\begin{gathered} dx_t{}^\wedge/dt = A\,(t)\,x_t{}^\wedge + M^{-1}(t)\,C^T\,(t)\,(y\,(t) - C\,(t)\,x_t{}^\wedge), \qquad x_{t_0}{}^\wedge = \bar{x} \\ dM^{-1}/dt = A\,(t)\,M^{-1} + M^{-1}A^T\,(t) - M^{-1}C^T\,(t)\,C\,(t)\,M^{-1}, \qquad M^{-1}\,(t_0) = \alpha^{-1}I \end{gathered} \tag{5.3}$$

Уравнения (5.3) хорошо известны (см., например, [4, 5]) для задачи оценивания при $\alpha = 0$. Разумеется, в этом случае начальные условия при $t = t_0$, фигурирующие в (5.3), не могут быть выписаны. Этими уравнениями можно воспользоваться, начиная с некоторого момента $t_1 > t_0$, как это уже обсуждалось в конце разд. 2.

Уравнения фильтра в задаче оценивания с частично известными начальными данными также существенно упрощаются. Для того чтобы их выписать, введем следующие обозначения. Прежде напомним, что последние $n-k$ координат вектора $X\,(t_0)$, подлежащие оцениванию, составляют вектор ξ. Первые k известных координат вектора $X\,(t_0)$ обозначим $\bar{x}^{(1)} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k)^T$. Матрицу $F\,(t, t_0)$ разобьем на две: $F\,(t, t_0) = [F^{(1)}\,(t, t_0);\ F^{(2)}\,(t, t_0)]$, где $F^{(1)}$, $F^{(2)}$ — матрицы размера $n \times k$ и $n \times (n-k)$. В этих обозначениях уравнения для $\xi^\wedge\,(t)$ имеют вид

$$\begin{gathered} d\xi^\wedge/dt = L_2^{-1}\,(t)\,[F^{(2)}\,(t, t_0)]^T\,C^T\,(t)\,(y\,(t) - C\,(t)\,F^{(1)}\,(t, t_0)\,\bar{x}^{(1)} - \\ - C\,(t)\,F^{(2)}\,(t, t_0)\,\xi^\wedge), \qquad \xi^\wedge\,(t_0) = \bar{\xi} = (\bar{x}_{k+1}, \ldots, \bar{x}_n)^T \end{gathered} \tag{5.4}$$

где $L_2{}^{-1}\,(t)$ — $[(n-k) \times (n-k)]$-матрица, удовлетворяющая системе

$$\begin{gathered} dL_2^{-1}/dt = -L_2^{-1}\,[F^{(2)}\,(t, t_0)]^T\,C^T\,(t)\,C\,(t)\,F^{(2)}\,(t, t_0)\,L_2^{-1} \\ L_2^{-1}\,(t_0) = \alpha^{-1}I_{(n-k)\times(n-k)} \end{gathered} \tag{5.5}$$

Выпишем также уравнение для $x_t^\wedge$:

$$\begin{gathered} dx_t{}^\wedge/dt = A\,(t)\,x_t{}^\wedge + F^{(2)}\,(t, t_0)\,L_2^{-1}\,(t)\,[F^{(2)}\,(t, t_0)]^T\,C^T\,(t)\,(y\,(t) - C\,(t)\,x_t{}^\wedge), \\ x_{t_0}{}^\wedge = \bar{x} \end{gathered} \tag{5.6}$$

По сравнению с фильтром (5.3) фильтр (5.5)—(5.6) при небольших значениях $n - k$ использует системы гораздо меньших размерностей. Например, при $n - k = 1$ уравнение (5.5) одномерное, а $F^{(2)}(t, t_0)$ — вектор, который найдется в качестве решения системы, определяемой первым уравнением (5.1).

6. Модифицированный фильтр. Вид уравнения (4.3) позволяет в достаточно типичных ситуациях построить существенно более простой фильтр, близкий к оптимальному фильтру (4.2).

Действительно, пусть $X(t; x^0)$ — истинное решение. Возмущение в наблюдениях $\delta(s) = y(s) - \varphi(s, X(s; x^0))$ представляет собой, как правило, смесь высокочастотных колебаний с малой амплитудой. Поэтому вместе с $\delta(s)$ малы независимо от длины промежутка интегрирования $t - t_0$ и интегралы вида

$$\int_{t_0}^{t} \psi(s)\,\delta(s)\,ds$$

для всех достаточно регулярных функций $\psi(s)$.

Будем считать для простоты, что $g = |y - \varphi|^2$. Тогда $g_x(s, X(s; x^0))$ обладает теми же свойствами, что и $\delta(s)$. Полагая, что с некоторого момента времени $\hat{x}_{t_0/t}$ удовлетворительно оценивает x^0, получим, что свойствами $\delta(s)$ обладает и $g_x(s, X(s; \hat{x}_{t_0/t}))$. Если еще учесть, что матрицы $\partial X_x{}^T/\partial x_i\,(t_0; x) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и, стало быть, малы при t, близких к t_0, то фильтр (4.2), (4.3) можно заменить близким к нему (существенно более простым) модифицированным фильтром:

$$d\check{x}_{t_0/t}/dt = -{}^1/_2 L^{-1}(t; \check{x}_{t_0/t})\, X_x{}^T(t; \check{x}_{t_0/t})\, g_x(t, X(t; \check{x}_{t_0/t})), \quad \check{x}_{t_0/t_0} = \bar{x} \tag{6.1}$$

$$\begin{gathered} dL/ds = {}^1/_2 X_x{}^T(s; x)\, g_{xx}(s, X(s; x)) X_x(s, x), \\ L(t_0; x) = \alpha I \end{gathered} \tag{6.2}$$

Из (6.2) вытекает, что матрица L определенно положительна, и потому можно ожидать, что матрица $J_{xx}(t; \hat{x}_{t_0/t})$ также определенно положительна.

Непосредственно проверяется, что функция $[X_x{}^T(s; x)]^{-1} \cdot J_x(s; x)$ удовлетворяет второй системе (2.1) и соотношению (2.2) и, стало быть,

$$p(s; x) = [X_x{}^{\mathrm{T}}(s; x)]^{-1} J_x(s; x) \tag{6.3}$$

Отсюда

$$J_{xx}(s; x) = \left\{\frac{\partial X_x{}^T}{\partial x_i}(s; x)\, p(s; x)\right\} + X_x{}^T(s; x)\, p_x(s; x) \tag{6.4}$$

и благодаря (2.3)

$$p_x(t; \hat{x}_{t_0/t}) = [X_x{}^T(t; \hat{x}_{t_0/t})]^{-1} J_{xx}(t; \hat{x}_{t_0/t}) \tag{6.5}$$

что также вытекает и из сопоставления (2.4) и (4.2). Формула (6.5) дает разложение p_x в виде произведения невырожденной матрицы и симметричной матрицы. Поэтому матрица p_x обратима вместе с матрицей J_{xx}. Таким образом, приведенные выше рассуждения эвристического характера о положительной определенности матрицы J_{xx} оправдывают реалистичность сделанных в п. 2 предположений о невырожденности матрицы p_x.

К модифицированному фильтру в первом варианте можно прийти следующим образом. Обратим внимание на то, что решение второй системы (2.1) благодаря условию $p(t) = 0$ представимо в виде интеграла, в котором подынтегральное выражение содержит в качестве множителя

g_x. Поэтому (см. рассуждения, приведенные выше) p мало и фильтр, построенный в разд. 2, можно модифицировать:

$$dx^{\vee}_{t_0/t}/dt = -Q^{-1}(t; x^{\vee}_{t_0/t})\, g_x(t, X(t; x^{\vee}_{t_0/t})), \quad x^{\vee}_{t_0/t_0} = \bar{x} \tag{6.6}$$

$$Q' = g_{xx}(s, X(s; x))X_x(s; x) - f_x^T(s, X(s; x))Q$$
$$Q(t_0; x) = 2\alpha I \tag{6.7}$$

Можно убедиться, что

$$Q(s; x) = 2\,[X_x^T(s; x)]^{-1} L(s; x) \tag{6.8}$$

Отсюда вытекает невырожденность Q и совпадение выходов модифицированных фильтров (6.1) и (6.6). Отметим, что если для построения фильтров (2.4) и (4.2) требовались дополнительные предположения о невырожденности матриц p_x и J_{xx}, то в модифицированных фильтрах матрицы Q и L обратимы всегда.

Совершенно аналогично могут быть получены уравнения модифицированного фильтра в задаче с частично известными координатами начального состояния как в первом, так и во втором вариантах.

7. Пример. Для уравнения Матье

$$x^{\cdot\cdot} + (a^2 + 0{,}2\cos s)\, x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x^{\cdot}(0) = 0 \tag{7.1}$$

с наблюдениями

$$y(s) \doteq x(s) \tag{7.2}$$

рассмотрим задачу идентификации параметра $\lambda = a^2$.

Введем обозначения $X_1 = x$, $X_2 = x^{\cdot}$ и запишем вместо (7.1), (7.2) систему

$$X_1' = X_2,\ X_1(0) = 1;\ X_2' = -(\lambda + 0{,}2\cos s)\, X_1,\ X_2(0) = 0;\ \lambda' = 0 \tag{7.3}$$

с наблюдениями

$$y(s) \doteq X_1(s) \tag{7.4}$$

Параметр λ будем искать из условия минимизации функционала

$$J = \alpha(\lambda - \bar{\lambda})^2 + \int_0^t (y(s) - X_1(s; \lambda))^2\, ds \to \min_{\lambda} \tag{7.5}$$

Поскольку параметр λ одномерный, то здесь целесообразно воспользоваться фильтром во втором варианте. Уравнения (4.4), (4.5) приобретают вид

$$\frac{d\lambda^{\wedge}}{dt} = \frac{2}{J_{\lambda\lambda}(t; \lambda^{\wedge})} \frac{\partial X_1}{\partial \lambda}(t; \lambda^{\wedge})\,(y(t) - X_1(t; \lambda^{\wedge})), \quad \lambda^{\wedge}(t_0) = \bar{\lambda} \tag{7.6}$$

$$J'_{\lambda\lambda}(s; \lambda) = -2\frac{\partial^2 X_1}{\partial \lambda^2}(s; \lambda)\,(y(s) - X_1(s; \lambda)) + 2\left(\frac{\partial X_1}{\partial \lambda}(s; \lambda)\right)^2,$$
$$J_{\lambda\lambda}(t_0; \lambda) = 2\alpha \tag{7.7}$$

К этим уравнениям следует присоединить, конечно, первые два уравнения системы (7.3) и четыре уравнения относительно первых и вторых производных X_1 и X_2 по λ. Таким образом, реализация фильтра во втором варианте связана с интегрированием 8 уравнений. Отметим, что в первом варианте потребовалось бы интегрировать 13 уравнений.

В модифицированном фильтре вместо уравнения (7.7) будет уравнение

$$L'(s; \lambda) = (\partial X_1(s; \lambda)/\partial\lambda)^2, \quad L(t_0; \lambda) = \alpha \tag{7.8}$$

В (7.6) вместо множителя $2/J_{\lambda\lambda}(t; \lambda^{\wedge})$ будет множитель $1/L(t; \lambda^{\vee})$ и фильтр реализуется при помощи уже шести уравнений.

В численных экспериментах истинное значение параметра $a^2 = \lambda$ бралось $\lambda = 1$, шумы в наблюдениях $\delta(s) = \delta\sin\omega_1 s + \delta\sin\omega_2 s$. В таблице приведены результаты оценивания параметра λ при помощи оптимального фильтра при указанных значениях t, $\bar{\lambda}$, δ, ω_1, ω_2. Видно, что с увеличением t происходит улучшение оценок, при больших t оценки мало зависят от $\bar{\lambda}$ и α и в большой степени определяются значениями δ и ω_1, ω_2. Выбор приемлемого значения α в функционале (7.5) зависит от t, δ и в особенности от близости $\bar{\lambda}$ к истинному значению оцениваемого параметра λ.

$\bar\lambda$	α	δ	$\omega_1 = 15,\ \omega_2 = 25$			$\omega_1 = 3,\ \omega_2 = 5$		
			$t = 0,4$	0,8	1,6	0,4	0,8	1,6
0,81	10^{-2}	0,1	0,870	1,004	0,998	0,619	0,656	1,039
		0,5	1,065	1,311	1,009	—0,201	—0,371	1,234
0,25	10^{-4}	0,1	1,703	1,121	1,003	0,092	0,467	1,024
		0,5	0,543	0,112	0,995	—10,92	—0,361	1,295

Отметим, что в данном примере модифицированный фильтр дает оценку, близкую к оптимальной.

Проводились также численные эксперименты при наличии случайных шумов в наблюдении. Результаты подтвердили хорошее качество построенных фильтров.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
2. *Kalman R. E.*, *Bucy R. S.* New Results in Linear Filtering and Prediction Theory // Trans. ASME. Ser. D. J. Basic Eng. 1961. V. 83. N 1. P. 95—108. = Тр. Амер. о-ва инж. механиков. Сер. Д. Техническая механика. 1961. Т. 83, № 1. С. 123—141.
3. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
4. *Ройтенберг Я. Н.* Автоматическое управление. М.: Наука, 1978. 551 с.
5. *Браммер К.*, *Зиффлинг Г.* Фильтр Калмана — Бьюси. М.: Наука, 1982. 199 с.
6. *Алексеев В. М.*, *Тихомиров В. М.*, *Фомин С. В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 429 с.

Свердловск

Поступила в редакцию
24.IV.1990