Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 1, 1991

УДК 531.36

И. И. Косенко

О ПРИМЕНЕНИИ МНОГОЧЛЕНОВ ЧЕБЫШЕВА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ТРАЕКТОРИИ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКЕ

Для системы дифференциальных уравнений возмущенного движения на большом интервале времени строятся приближения к точному решению. Применяется проекционный метод в гильбертовом пространстве со специально подобранной метрикой, обеспечивающей равномерную сходимость. Аналитические свойства многочленов Чебышева позволяют с помощью простых операций вывести конечномерную систему проекционных алгебраических уравнений.

1. Преобразование задачи. В механике возмущенного движения часто требуется построить решение системы уравнений, имеющей стандартный вид

$$\mathbf{x}^{\bullet} = \mu \mathbf{X}(\mathbf{x}, t, \mu) \tag{1.1}$$

на отрезке времени $t \in [0, T]$ с начальными условиями $\mathbf{x}(0) = 0$. Предполагается, что $\mathbf{x} \in B \subset \mathbf{R}^n$. Область B соответствует области сходимости степенного ряда вектор-функции $\mathbf{X}$ по векторной переменной x. Функция $\mathbf{X}$ является квазипериодической по аргументу t и может быть представлена в виде

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, t, \mu) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^m} \mathbf{X}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, \mu) \exp(i \langle \boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{k} \rangle t)$$

$$\langle \boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{k} \rangle = \omega_{01} k_1 + \omega_{02} k_2 + \ldots + \omega_{0m} k_m$$

где $\mathbf{Z}$ — множество целых чисел. Векторные коэффициенты в свою очередь представляются в виде кратных степенных рядов по переменным $x_1, \ldots, x_n$. Предположим также, что вектор-функция $\mathbf{X}$ является вещественно-аналитической по своим аргументам, в том числе и по малому параметру μ.

Использование начального условия $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ не ограничивает общности задачи, так как его выполнения всегда можно добиться подходящей заменой координат.

Предполагается, что решение за время T не уходит слишком далеко от начала координат. В реальных вычислениях и ряд Фурье, и степенные ряды обрезаются, а правая часть $\mu\mathbf{X}$ представляется в виде суммы конечного, хотя, может быть, и большого числа слагаемых. При этом существенную роль играет малый параметр μ. Такая ситуация, в частности, наблюдается в окрестности положения равновесия гамильтоновой системы.

В данной работе предполагается для построения решения задачи (1.1) использовать многочлены Чебышева. Известно, что эти многочлены позволяют получить быструю сходимость при равномерной аппроксимации непрерывных функций [1]. Равномерную сходимость получим как следствие из сходимости в более сложной функциональной метрике.

Рассмотрим полиномы Чебышева первого рода $T_n(\tau) = \cos(n \arccos \tau)$ • $(n = 0, 1, \ldots)$. Поведение функции $T_n(\tau)$ на отрезке $[-1, 1]$ имеет колебательный характер. Однако осцилляции концентрируются к точкам $\tau = -1, 1$, в то время как в правых частях (1.1) колебания совершаются квазипериодически. Поэтому чтобы представлять колебательное движение на отрезке $[0, T]$ при помощи многочленов Чебышева на отрезке $[-1, 1]$, нужно сделать преобразование независимой переменной t. Именно, положим $\tau = \cos(\pi T^{-1} t)$.

Если $t \in [0, T]$, то $\tau \in [-1, 1]$, причем соответствие монотонно. Оператор дифференцирования выражается по формуле

$$\frac{d}{dt} = -\frac{\pi}{T}\sin\left(\frac{\pi}{T}t\right)\frac{d}{d\tau} = -\frac{\pi}{T}(1-\tau^2)^{1/2}\frac{d}{d\tau}$$

Отсюда вместо задачи (1.1) получим задачу

$$d\mathbf{x}/d\tau = \nu\mathbf{Y}(\mathbf{x}, \tau, \mu), \quad \mathbf{x}(1) = \mathbf{0}, \quad \tau \in [-1, 1], \; \nu = \mu T/\pi \tag{1.2}$$

где новая правая часть имеет вид

$$\mathbf{Y}(\mathbf{x}, \tau, \mu) = -(1-\tau^2)^{-1/2}\mathbf{X}(\mathbf{x}, T\pi^{-1}\arccos\tau, \mu)$$

Выше было отмечено, что векторная функция X может быть представлена в виде ряда Пуассона

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, \tau, \mu) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^m}\sum_{\mathbf{l}\in\mathbf{Z}_+^n}\mathbf{X}_{\mathbf{lk}}(\mu)\mathbf{x}^{\mathbf{l}}\exp(i\langle\omega_0, \mathbf{k}\rangle t) \tag{1.3}$$

где $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_n)$ — мультииндекс, а выражение для степенного одночлена имеет вид $\mathbf{x}^{\mathbf{l}} = (x^1)^{l_1}(x^2)^{l_2}\ldots(x^n)^{l_n}$. Символом $\mathbf{Z}_+$ обозначен множество неотрицательных целых чисел.

В выражении для функции $\mathbf{Y}(\mathbf{x}, \tau, \mu)$ квазипериодические гармоники будут выражаться через функции $\cos(q_{\mathbf{k}}\arccos\tau)$ и $\sin(q_{\mathbf{k}}\arccos\tau)$, где $q_{\mathbf{k}} = T\pi^{-1}\langle\omega_0, \mathbf{k}\rangle$. В дальнейшем правую часть (1.2) будем использовать в виде

$$\mathbf{Y}(\mathbf{x}, \tau, \mu) = -\sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^m}\sum_{\mathbf{l}\in\mathbf{Z}_+{}^n}\mathbf{x}^{\mathbf{l}}[\mathbf{A}_{\mathbf{lk}}(\mu)(1-\tau^2)^{-1/2}\cos(q_{\mathbf{k}}\arccos\tau) +$$

$$+\mathbf{B}_{\mathbf{lk}}(\mu)(1-\tau^2)^{-1/2}\sin(q_{\mathbf{k}}\arccos\tau)] \tag{1.4}$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{lk}}(\mu) = \operatorname{Re}\mathbf{X}_{\mathbf{lk}}(\mu), \quad \mathbf{B}_{\mathbf{lk}}(\mu) = -\operatorname{Im}\mathbf{X}_{\mathbf{lk}}(\mu), \quad \mathbf{X}_{\mathbf{l},-\mathbf{k}}(\mu) = \mathbf{X}_{\mathbf{lk}}^*(\mu)$$

(звездочка означает комплексно сопряженную величину).

2. **Описание проекционного метода.** Предположим, что решение задачи (1.2) определено при всех $\tau \in [-1, 1]$, причем $\mathbf{x}(\tau) \in Q$, где Q — область сходимости ряда функции $\mathbf{X}$ по переменной $\mathbf{x} \in Q \subset \mathbf{R}^n$. Известно, что задача (1.2) эквивалентна уравнению

$$\mathbf{x} = \mathbf{Z}(\mathbf{x}, \mu), [\mathbf{Z}(\mathbf{x}, \mu)](\tau) = \int_1^\tau \nu\mathbf{Y}[\mathbf{x}(\alpha), \alpha, \mu]\,d\alpha \tag{2.1}$$

Чтобы построить проекционный метод решения уравнения (2.1), необходимо задаться подходящим функциональным пространством и в этом пространстве определить систему операторов проектирования на его конечномерные подпространства.

Известно, что многочлены Чебышева первого и второго рода образуют полные ортогональные семейства функций на отрезке $[-1, 1]$, снабженном мерами $d\mu_1 = (1-\tau^2)^{-1/2}d\tau$ и $d\mu_2 = (1-\tau^2)^{1/2}d\tau$ соответственно.

Рассмотрим гильбертово пространство соболевского типа $H^1([-1, 1], \mu_1, \mu_2; \mathbf{R}^n)$ (далее просто H^1) со скалярным произведением

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)^1 = \int_{-1}^1(\mathbf{x}_1(\tau), \quad \mathbf{x}_2(\tau))\,d\mu_1 + \int_{-1}^1(\mathbf{x}_1'(\tau), \mathbf{x}_2'(\tau))\,d\mu_2$$

где (,) —скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$, а штрих означает дифференцирование по τ. H^1 можно определить как пополнение множества непрерывно дифференцируемых на $[-1, 1]$ функций по норме

$$\|\mathbf{x}\|^1 = \left(\int_{-1}^{1} \|\mathbf{x}(\tau)\|^2 d\mu_1 + \int_{-1}^{1} \|\mathbf{x}'(\tau)\|^2 d\mu_2\right)^{1/2}$$

Обозначим символом CA ($[-1, 1]$, $\mathbf{R}^n$) (далее просто CA) пространство функций, абсолютно непрерывных на отрезке $[-1. 1]$. В CA можно ввести банахову структуру при помощи нормы, определенной по формуле

$$\|\mathbf{x}\|_A = \|\mathbf{x}(1)\| + \mathrm{Var}([-1, 1], \mathbf{x})$$

С использованием известных методов [2] и свойств весовых функций $p_1(\tau) = (1 - \tau^2)^{-1/2}$, $p_2(\tau) = (1 - \tau^2)^{1/2}$ можно доказать, что пространство H^1 вложено в CA. Это означает, что сходимость в метрике H^1 приводит к сходимости в метрике CA и, в частности, к равномерной сходимости.

Пространство H^1 сузим, далее, до подпространства $H_0{}^1 = \{\mathbf{x} \in H^1 : \mathbf{x}(1) = 0\}$. Из вида правой части уравнения (2.1) следует, что она будет всегда принадлежать $H_0{}^1$, если на функцию $\mathbf{Y}$ наложить условия достаточной гладкости и суммируемости. Наконец, в качестве области определения оператора зададим множество

$$\Omega = \{\mathbf{x} \in H_0{}^1 : \mathbf{x}(\tau) \in Q \ \forall\tau \in [-1, 1]\}$$

Можно доказать, что Ω — область в $H_0{}^1$.

Чтобы построить схему Галеркина, надо в пространстве $H_0{}^1$ определить систему исчерпывающих его конечномерных подпространств $E_k \subset H_0{}^1$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Для этого вначале построим базис пространства H^1.

Пусть $\{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}$ — ортонормированный базис пространства H^1 ($[-1, 1]$, μ_1, μ_2; $\mathbf{R}$) (далее просто H^{11}). Тогда, как легко проверить, система вектор-функций $\{\mathbf{e}_j\chi_k\}$ $(j = 1, \ldots, n;\ k = 0, 1, \ldots)$ является ортонормированным базисом в H^1. Здесь $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^{n}$ — ортонормированный базис в $\mathbf{R}^n$.

Задача построения базиса в H^1 сводится к построению базиса из скалярных функций в H^{11}. Если функция $u \in H^{11}$, то автоматически $u \in L_2([-1, 1], \mu_1)$, $u' \in L_2([-1, 1], \mu_2)$. Известно, что в этих пространствах можно построить ортонормированные базисы $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ соответственно, причем $f_0 = \pi^{-1/2}T_0$, $f_k = (2/\pi)^{1/2}T_k$, $g_k = (2/\pi)^{1/2}U_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Известно, что при $k > 0$ для многочленов Чебышева первого и второго рода справедливо соотношение $T_k'(\tau) = kU_{k-1}(\tau)$. Поэтому $f_k'(\tau) = kg_k(\tau)$ $(k > 0)$, $f_0'(\tau) = 0$. В метрике пространства H^{11} функции $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ образуют ортогональную систему. Если провести нормировку, то система функций $\{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}$, таких, что

$$\chi_0(\tau) = \pi^{-1/2}T_0(\tau),\ \chi_k(\tau) = \{2/[\pi(1 + k^2)]\}^{1/2}T_k(\tau) \quad (k > 0)$$

в H^{11} ортонормированна.

Оказывается, что система $\{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}$ полна в H^{11}, то есть является базисом. Отсюда следует, что если в пространстве H^{11} у функции $u(\tau)$ известно разложение производной $u'(\tau)$ по базису $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$

$$u'(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k g_k(\tau)$$

то можно сразу указать разложение

$$u(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k f_k(\tau)$$

положив $u_k = v_k/k$ при $k > 0$. Коэффициент u_0 найдем из условия $u(1) = 0$:

$$u_0 = -\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} v_k f_k(1)$$

Теперь определим операторы проектирования P_k ($k = 0, 1, \ldots$) в H_0^1. Для этого представим их в виде $P_k = PP_k'$, где P_k' — оператор ортогонального проектирования в пространстве H^1 на конечномерное подпространство — линейную оболочку первых $n(k+1)$ базисных векторов $\mathbf{e}_1\chi_0, \mathbf{e}_2\chi_0, \ldots, \mathbf{e}_n\chi_k$. При проектировании $P_k'H_0^1$ возможен выход из пространства H_0^1. Поэтому, чтобы получить результат в H_0^1, необходимо функцию $P_k'\mathbf{x}$ спроецировать на H_0^1, но уже не ортогонально к H_0^1, а вдоль линейной оболочки векторов $\{\mathbf{e}_1\chi_0, \mathbf{e}_2\chi_0, \ldots, \mathbf{e}_n\chi_0\}$ так, чтобы $(PP_k'\mathbf{x})(1) = 0$. Оператор P определяется по формуле

$$P\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}(1)\pi^{1/2}\chi_0 \quad (\mathbf{x} \in H^1)$$

Так как пространство $P_k'H^1$ исчерпывают все H^1, то пространства $E_k = P_k'H^1 \cap H_0^1$ исчерпывают все H_0^1. Можно проверить, что $E_k = P_kH_0^1 = P_kH^1$. Операторы P и P_k' ограничены. Уравнение Галеркина имеет вид

$$\mathbf{x}_k = P_k\mathbf{Z}(\mathbf{x}_k, \mu) \quad (\mathbf{x}_k \in E_kH_0^1,\ k > 0) \tag{2.2}$$

Дальнейший анализ аналогичен проведенному в [3]. При этом используются некоторые результаты из [4]. Сначала убеждаемся в непрерывной дифференцируемости в Ω оператора $\mathbf{Z}$. Достаточное условие этого имеет вид $\mathbf{Y} \in L_2([-1, 1], \mu_2; C^1(Q))$, или в более подробном виде

$$\|\mathbf{Y}\|_2^1 < +\infty \tag{2.3}$$

$$\|\mathbf{Y}\|_2^1 = \left(\int_{-1}^{1} \sup_{\mathbf{x}\in Q} (\|\mathbf{Y}(\mathbf{x}, \tau, \mu)\|, \quad \|\mathbf{Y}_{\mathbf{x}}^{\boldsymbol\cdot}(\mathbf{x}, \tau, \mu)\|)^2 d\mu_2\right)^{1/2}$$

Если функция $\mathbf{X}$ аналитична в области определения, то условие (2.3) имеет место равномерно для любых начальных условий из некоторой меньшей области, причем величина $\|\mathbf{Y}\|_2^1$ будет порядка единицы.

Из ограниченности линейного оператора P_k следует непрерывная дифференцируемость оператора $P_k\mathbf{Z}$. Далее, при помощи неравенства

$$\|\mathbf{Z}\| \leqslant 2^{1/2}(1+\pi^2)^{1/2}\|\nu\mathbf{Y}\|_2^1$$

устанавливаем непрерывную обратимость оператора $I - \mathbf{Z}^{\boldsymbol\cdot}(\mathbf{x}, \mu)$ ($\mathbf{x} \in \Omega$). Это, очевидно, имеет место, если $\|\mathbf{Z}^{\boldsymbol\cdot}(\mathbf{x}, \mu)\| < 1$, или

$$(\mu T/\pi)\|\mathbf{Y}\|_2^1 < [2(1+\pi^2)]^{-1/2} \tag{2.4}$$

Отсюда заключаем, что длина интервала времени, при которой будет сохраняться сходимость приближений к точному решению, должна удовлетворять условию $T < C\mu^{-1}$, где $C = O(1) = \pi[2(1+\pi^2)]^{-1/2}(\|\mathbf{Y}\|_2^1)^{-1}$. Можно положить, например, $T = C(2\mu)^{-1}$.

По аналогии с результатом работы [3] получим утверждение.

Теорема. Уравнение (2.1) имеет единственное решение $\mathbf{x} \in H_0^1$. Кроме того, при выполнении условия (2.4) существует такое целое число N и действительное $\varepsilon > 0$, что при любом $k > N$ уравнение (2.2) имеет в шаре $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^1 \leqslant \varepsilon$ единственное решение $\mathbf{x}_k$, и справедлива оценка скорости сходимости

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\|^1 \leqslant \|\mathbf{x} - P_k\mathbf{x}\|^1 + \|\mathbf{x}_k - P_k\mathbf{x}\|^1 \to 0 \qquad (k \to \infty)$$

причем, при некоторых $c_1, c_2 > 0$ имеет место двусторонняя оценка

$$c_1 \| P_k \mathbf{Z}(\mathbf{x}) - P_k \mathbf{Z}(P_k \mathbf{x}) \|^1 \leqslant \| \mathbf{x}_k - P_k \mathbf{x} \|^1 \leqslant c_2 \| P_k \mathbf{Z}(\mathbf{x}) - P_k \mathbf{Z}(P_k \mathbf{x}) \|^1$$

Эта теорема гарантирует существование галеркинских приближений и их равномерную сходимость к точному решению. Решение конечномерного уравнения (2.2) можно получить итеративным путем, если обеспечить условие $\| P_k \mathbf{Z}^{\boldsymbol{\cdot}}(\mathbf{x}) \| < 1$. Так как $\| P_k \| \leqslant 2^{1/2}(1 + 2\pi)^{1/2}$, то условие сходимости итеративного процесса имеет вид

$$2\,[(1 + 2\pi)(1 + \pi^2)]^{1/2} \nu \,\| \mathbf{Y} \|_2^1 < 1 \tag{2.5}$$

В качестве начального приближения можно взять функцию $\mathbf{x}_k = 0$, которая соответствует решению невозмущенной задачи.

3. Аналитическая техника. Теперь рассмотрим проблему практической реализации процесса решения уравнения (2.2). Считаем, что k достаточно велико, вектор-функция $\mathbf{Y}(\mathbf{x}, \tau, \mu)$ имеет вид (1.4). Свойства полиномов Чебышева позволяют надеяться, что число k будет не слишком большим.

В реальных вычислениях в разложении (1.4) нужно ограничиться конечным числом слагаемых по мультииндексу $\| \mathbf{k} \| \leqslant K$ ($\| \mathbf{k} \| = \max | k_i |$ $(i = 1, \ldots, m)$), что соответствует учету конечного (хотя, может быть, и большого) числа гармоник в ряде Фурье вектор-функции $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t, \mu)$. В свою очередь в степенных разложениях коэффициентов этого ряда также нужно ограничиться конечным числом слагаемых по мультииндексу $\| \mathbf{l} \| \leqslant L$ ($\| \mathbf{l} \| = \max | l_i |$ $(i = 1, \ldots, n)$), причем величина L может зависеть от мультииндекса k. Обычно учитываются те слагаемые ряда (1.4), которые имеют порядок малости по параметру μ не выше заданного. Итак, вместо функции $\mathbf{Y}(\mathbf{x}, \tau, \mu)$ будем рассматривать

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^*(\mathbf{x}, \tau, \mu) = -\sum_{\|\mathbf{k}\| \leqslant K} \sum_{\|\mathbf{l}\| \leqslant L} \mathbf{x}^{\mathbf{l}} [\mathbf{A}_{\mathbf{lk}}(\mu)(1 - \tau^2)^{-1/2} \cos(q_{\mathbf{k}} \arccos \tau) + \\ + \mathbf{B}_{\mathbf{lk}}(\mu)(1 - \tau^2)^{-1/2} \sin(q_{\mathbf{k}} \arccos \tau)] \end{aligned} \tag{3.1}$$

Цель — найти разложение функции $\mathbf{Y}^*$ по полиномам Чебышева второго рода, с учетом того, что вектор $\mathbf{x}(\tau)$ представлен в виде суммы первых k многочленов Чебышева первого рода. Такое представление $\mathbf{x}(\tau)$ соответствует разложению $\mathbf{Y}^*(\mathbf{x}(\tau), \tau, \mu)$ в пространстве $L_2([-1, 1], \mu_2; \mathbf{R}^n)$ по базису $\{\mathbf{e}_i g_j\}_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots}$. После этого автоматически получим разложение первообразной от $\mathbf{Y}^*(\mathbf{x}(\tau), \tau, \mu)$ по полиномам Чебышева первого рода, что соответствует ее разложению в пространстве $L_2([-1, 1], \mu_1; \mathbf{R}^n)$ по базису $\{\mathbf{e}_i f_j\}_{i=1,\ldots,n}^{j=0,1,\ldots}$, либо в пространстве H^1 по базису $\{\mathbf{e}_i \chi_j\}_{i=1,\ldots,n}^{j=0,1,\ldots}$.

Приведем формулы, необходимые для достижения поставленной цели. Во-первых, это разложения

$$\frac{\cos(q \arccos \tau)}{(1 - \tau^2)^{1/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} c_l U_l(\tau), \qquad \frac{\sin(q \arccos \tau)}{(1 - \tau^2)^{1/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} s_l U_l(\tau)$$

Формулы для вычисления коэффициентов

$$c_l = \frac{2}{\pi} \frac{(l + 1)[1 + (-1)^l \cos q\pi]}{(l + 1)^2 - q^2}, \quad s_l = \frac{2}{\pi} \frac{(l + 1)(-1)^l \sin q\pi}{(l + 1)^2 - q^2} \tag{3.2}$$

охватывают случаи целочисленности параметра q, что, в частности при $q = 0$ означает резонансность соответствующих гармоник в (1.3), причем в этих случаях имеют место более простые формулы

$$c_{2l} = \frac{4}{\pi}\frac{2l+1}{(2l+1)^2-q^2}, \quad c_{2l+1} = 0 \quad (l = 0, 1, \ldots; \; q = 2r; \; r \in \mathbf{Z})$$

$$c_{2l} = 0, \quad c_{2l+1} = \frac{4}{\pi}\frac{2l+2}{(2l+2)^2-q^2} \quad (l = 0, 1, \ldots; \; q = 2r+1; \; r \in \mathbf{Z})$$

$$s_r = 1, \; s_l = 0 \qquad (l = 0, 1, \ldots; \; l \neq r; \; r \in \mathbf{Z}_+)$$

которые получаются из (3.2) предельным переходом при $q \to 2r$, $q \to 2r+1$, $q \to r+1$ соответственно.

Полагая, что $\mathbf{x}_k \in E_k = P_k H_0^1$ получим представление

$$\mathbf{x}_k(\tau) = \sum_{l=0}^{k} \mathbf{x}_{kl} T_l(\tau), \quad \mathbf{x}_{kl} \in \mathbf{R}^n, \mathbf{x}_k(1) = \mathbf{0}$$

Вектор $\mathbf{x}_{kl}$ можно представить в виде столбца своих координат $\mathbf{x}_{kl} = (x_{kl}^1, x_{kl}^2, \ldots, x_{kl}^n)^T$. Поэтому при учете условия $\mathbf{x}_k(1) = 0$ в уравнение Галеркина (2.2) должно входить kn неизвестных скалярных величин. В координатном представлении

$$x_k^r(\tau) = \sum_{l=0}^{k} x_{kl}^r T_l(\tau) \quad (r = 1, \ldots, n)$$

Поскольку степенной множитель в (3.1) имеет вид $\mathbf{x}^l = (x^1)^{l_1}(x^2)^{l_2} \ldots (x^n)^{l_n}$, то при известном разложении по полиномам Чебышева первого рода каждого сомножителя необходимо найти аналогичное представление для всего произведения. Для этого воспользуемся известным тождеством

$$T_m(\tau)\, T_n(\tau) = 2^{-1}(T_{m-n}(\tau) + T_{m+n}(\tau)) \; (m, n \in \mathbf{Z}) \tag{3.3}$$

Используя (3.3), можно получить разложение по полиномам Чебышева первого рода всего одночлена $\mathbf{x}^l$. Наконец, чтобы разложить по многочленам Чебышева второго рода все слагаемое в (3.1), необходимо воспользоваться тождеством

$$U_m(\tau)\, T_n(\tau) = 2^{-1}(U_{m-n}(\tau) + U_{m+n}(\tau)) \quad (m, n \in \mathbf{Z})$$

В итоге после всех подстановок и перемножений, в выражении (3.1) приводим подобные члены и отбрасываем все слагаемые, которые содержат $U_l(\tau)$ с $l > k-1$. Это позволяет исключить лишние операции и на более ранних этапах вычислений — при перемножениях. Обозначая усечение ряда при помощи квадратных скобок, получим

$$[\mathbf{Y}^*(\mathbf{x}_k(\tau), \tau, \mu)]_{k-1} = \sum_{l=0}^{k-1} \mathbf{y}_l(x_{k1}, \ldots, x_{kk}, \mu)\, U_l(\tau) \tag{3.4}$$

Векторный коэффициент $\mathbf{y}_l$ полиномиально зависит от неизвестных величин x_{kl}^r $(l = 1, \ldots, k; \; r = 1, \ldots, n)$. Начальное условие $\mathbf{x}_k(1) = 0$ обеспечивает зависимость

$$x_k^r(1) = -\sum_{l=1}^{k} x_{kl}^r T_l(1) = -\sum_{l=1}^{k} x_{kl}^r \quad (r = 1, \ldots, n)$$

которая также должна использоваться при выводе разложения (3.4). Операция усечения ряда Чебышева соответствует действию оператора ортогонального проектирования P_k' (в пространстве производных $L_2([-1, 1], \mu_2; \mathbf{R}^n)$). Вычисляя первообразную и применяя оператор проектирования P_k имеем

$$[P_k \mathbf{Z}(x_k, \mu)](\tau) = \int_1^{\tau} \nu\, [\mathbf{Y}^*[x(\alpha), \alpha, \mu]]_{k-1}\, d\alpha =$$

$$= \left(-\sum_{l=1}^{k} \nu l^{-1} \mathbf{y}_{l-1}\right) T_0(\tau) + \sum_{l=1}^{k} \nu l^{-1} \mathbf{y}_{l-1} T_l(\tau)$$

В результате получим систему из kn алгебраических уравнений, соответствующую функциональному уравнению (2.2)

$$x_{kl}^r = \nu l^{-1} y_{l-1}^r (x_{k1}, \ldots, x_{kk}, \mu) \quad (r = 1, \ldots, n; \; l = 1, \ldots, k)$$

Эту систему можно решать итерационным методом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М.: Наука, 1983. 384 с.
2. *Шварц Л.* Анализ. Т. 1. М.: Мир, 1972. 824 с.
3. *Косенко И. И.* О построении фазовых траекторий гамильтоновой системы в окрестности положения равновесия // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 4. С. 531—538.
4. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 455 с.

Москва

Поступила в редакцию
18.XII.1989