Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 1, 1991

УДК 531.36

А. Б. Аминов, Т. К. Сиразетдинов

УСЛОВИЯ ЗНАКООПРЕДЕЛЕННОСТИ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ И УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Разрабатываются способы построения знакопостоянных и знакоопределенных сложных функций. Доказываются теоремы об устойчивости и неустойчивости движения со сложной функцией Ляпунова, позволяющей оценивать и определять области притяжения. Рассматриваются примеры.

Развитие метода векторных функций Ляпунова [1], постановка и решение различных задач устойчивости движения по части переменных [2], полуустойчивости [3], а также практика проектирования автоматических систем с использованием этих методов показали необходимость дальнейшей разработки способов и алгоритмов построения функций Ляпунова и получения условий их знакоопределенности, обладающих достаточной простотой и конструктивностью. В настоящее время только для квадратичных форм получены необходимые и достаточные условия знакоопределенности. Это известный критерий Сильвестра и рекуррентный критерий [4]. Для форм более высоких порядков и их сумм получены, в основном, достаточные условия знакоопределенности [4, 5]. Кроме того, при решении различных задач устойчивости движения в многочисленных работах знакоопределенность используемых функций определялась путем оценки их значений.

В работе приводится обобщение этих подходов к получению условий знакоопределенности сложных функций, дается способ построения функций Ляпунова в виде композиции известных знакоопределенных функций, обладающих специальными свойствами отображений.

1. Построение знакопостоянных и знакоопределенных сложных функций. Пусть в области (открытом множестве) $G_y \subseteq R^m$ $(0 \in G_y)$ задана непрерывная вещественная функция Ляпунова V: $G_y \to H_v \subseteq R^1$ вещественной переменной $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)^T \in R^m$, которая, вообще говоря, может быть знакопостоянной или знакоопределенной в некоторой области $G_y^\circ \subseteq G_y$ $(0 \in G_y^\circ)$. Здесь H_v — область значений этой функции $\mathbf{y} \to V(\mathbf{y})$, R^m — m-мерное евклидово пространство.

Как известно [1], функция $\mathbf{y} \to V(\mathbf{y})$ называется знакопостоянной в области G_y°, если $V(\mathbf{y}) \geqslant 0$, $\forall \mathbf{y} \in G_y^\circ \setminus 0$, или $V(\mathbf{y}) \leqslant 0$, $\forall \mathbf{y} \in G_y^\circ \setminus 0$ и $V(0) = 0$. Если $V(0) = 0$ и $V(\mathbf{y}) > 0$, $\forall \mathbf{y} \in G_y^\circ$ или $V(\mathbf{y}) < 0$, $\forall \mathbf{y} \in G_y^\circ \setminus 0$, то функция $\mathbf{y} \to V(\mathbf{y})$ называется знакоопределенной в области G_y°.

Пусть далее эта функция $\mathbf{y} \to V(\mathbf{y})$ при помощи непрерывного отображения f: $G_x^* \to G_y^*$ $(0 \in G_x^* \subseteq R^n,\ 0 \in G_y^* \subseteq R^m)$ вида

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}),\ \mathbf{f}(0) = 0; \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in R^n, \quad \mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)^T \tag{1.1}$$

преобразуется в функцию W: $G_x \to H_w \subseteq R^1$, где G_y^* — область значений, G_x^* — область определения отображения $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ (1.1), G_x — область определения $(G_x \subseteq G_x^*)$, H_w — область значений $(H_w \subseteq H_v)$ функции $\mathbf{x} \to W(\mathbf{x})$, R^n — n-мерное евклидово пространство.

Требуется указать такие свойства отображения $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ (1.1), при которых функция $\mathbf{x} \to W(\mathbf{x})$ будет обладать свойствами функции $\mathbf{y} \to V(\mathbf{y})$, т. е. будет знакопостоянной или знакоопределенной в некоторой непустой области $G_x^\circ \subseteq R^n$ $(0 \in G_x^\circ)$ в зависимости от того, какими свойствами обладает функция $y \to V(y)$ в области G_y°. Обозначим $G_y^{*\circ}$ область образов всех $x \in G_x^\circ$ при отображении $y = f(x)$ (1.1), т. е. образ G_x°.

Определение 1. Непрерывное отображение $y = f(x)$ (1.1) называется постоянно нетривиальным, если $f(0) = 0$, и найдутся такие значения $x \in G_x^* \setminus 0$, что соответствующие значения $y = f(x) \neq 0$.

Определение 2. Непрерывное отображение $y = f(x)$ (1.1) называется определенно нетривиальным в области G_x° $(0 \in G_x \subseteq G_x^*)$, если $f(0) = 0$ и при любом $x \in G_x^\circ \setminus 0$ соответствующие значения $y = f(x) \neq 0$.

Заметим, что множество постоянно нетривиальных отображений включает в себя определенно нетривиальные отображения. Это аналогично включению знакоопределенных функций Ляпунова во множество знакопостоянных функций.

Теорема 1. Если непрерывная функция $y \to V(y)$ знакопостоянна в области $G_y^\circ \subseteq R^m$, отображение $y = f(x)$ (1.1) постоянно нетривиально и $G_y^{*\circ} \subseteq G_y^* \cap G_y^\circ$, то их композиция $W(x) = V(f(x))$ — непрерывная знакопостоянная функция в области $G_x^\circ \subseteq G_x^*$ того же знака, что и исходная функция $y \to V(y)$.

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы, причем для определенности примем $V(y) \geqslant 0$, $\forall y \in G_y^\circ \setminus 0$, $V(0) = 0$. При $x = 0$ имеем $y = 0$ и, следовательно, $W(0) = V(0) = 0$. Теперь выберем в области $G_x^\circ \subseteq G_x^*$ произвольную точку $x \in G_x^\circ \setminus 0$. Отображением $y = f(x)$ (1.1) эта точка x преобразуется в точку $y \in G_y^{*\circ} \subseteq G_y^* \cap G_y^\circ$, где $V(y) \geqslant 0$. Следовательно, для композиции $W(x) = V(f(x))$ в произвольной точке $x \in G_x^\circ$ имеет место условие $W(x) \geqslant 0$, $\forall x \in G_x^\circ \setminus 0$, $W(0) = 0$. Аналогично, при $V(y) \leqslant 0$ получим $W(x) \leqslant 0, \forall x \in G_x^\circ \setminus 0$, $W(0) = 0$. Таким образом, функция $x \to W(x)$ знакопостоянна в области G_x° того же знака, что и функция $y \to V(y)$ в области G_y°. Непрерывность функции $x \to W(x)$ следует из непрерывности функции $y \to W(y)$ и непрерывности отображения $y = f(x)$ (1.1).

Заметим, что если функция $y \to V(y)$ и отображение $y = f(x)$ дифференцируемы, то и композиция также дифференцируема. При исследовании устойчивости этим свойством сложных функций часто будем пользоваться.

Пример 1. Даны функция $V(y) = y_1^2 + (y_2 - y_3)^2$, дифференцируемая и знакопостоянная во всем пространстве R^3, и отображение $y_1 = x_1 + \operatorname{tg} x_2$, $y_2 = \sin x_2$, $y_3 = x_1 \cos x_2$, дифференцируемое и постоянно нетривиальное в области $G_x^* = \{x_1, x_2): |x_1| < \pi/2, x_2 \in R^1\}$. Все условия теоремы 1 выполняются. Следовательно, функция $W(x) = V(y(x)) = (x_1 + \operatorname{tg} x_2)^2 + (\sin x_2 - x_1 \cos x_2)^2$ дифференцируема и знакопостоянна в области $G_x^\circ = G_x^*$ того же знака, что и данная функция $y \to V(y)$.

Следствие 1. Линейные преобразования $y = Ax$, где A — $m \times n$-матрица вещественных чисел, сохраняют постоянную положительность функций в R^n.

Теорема 2. Если непрерывная функция $y \to V(y)$ знакоопределенна в области $G_y^\circ \subseteq R^m$, а отображение $y = f(x)$ (1.1) определенно нетривиально в области $G_x^\circ \subseteq G_x^*$ и при этом $G_y^{*\circ} \subseteq G_y^* \cap G_y^\circ$, то их композиция $W(x) = V(f(x))$ — непрерывная знакоопределенная функция в области G_x° того же знака, что и исходная функция $y \to V(y)$.

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы. Для определенности примем $V(y) > 0$, $\forall y \in G_y^\circ \setminus 0$, $V(0) = 0$. Из условий теоремы следует, что $W(0) = V(0) = 0$. Теперь выберем в области G_x° произвольную точку $x \in G_x^\circ \setminus 0$ $(G_x^\circ \subseteq G_x^*)$. Отображением $y = f(x)$ (1.1) эта точка x преобразуется в точку $\mathbf{y} \in G_y^{*\circ} \subseteq G_y^\circ \cap G_y^*$. В силу определенной нетривиальности отображения $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ получим $\mathbf{y} \neq 0$, и, следовательно, $V(\mathbf{y}) > 0$.

Таким образом, для композиции $W(\mathbf{x}) = V(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ в произвольной точке $\mathbf{x} \in G_x^\circ$ имеет место условие $W(\mathbf{x}) > 0$, $\forall \mathbf{x} \in G_x^\circ \setminus \mathbf{0}$, $W(\mathbf{0}) = 0$. Аналогично при $V(\mathbf{y}) < 0$, $\forall \mathbf{y} \in G_y^\circ \setminus \mathbf{0}$ получим $W(\mathbf{x}) < 0$, $\forall \mathbf{x} \in G_x^\circ \setminus \mathbf{0}$, $W(\mathbf{0}) = 0$. Таким образом, функция $\mathbf{x} \to W(\mathbf{x})$ является знакоопределенной в области G_x° того же знака, что и функция $\mathbf{y} \to V(\mathbf{y})$ в области G_y°. Непрерывность функции $\mathbf{x} \to W(\mathbf{x})$ следует из непрерывности функции $\mathbf{y} \to V(\mathbf{y})$ и непрерывности отображения $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ (1.1).

Пример 2. Даны функция $V(\mathbf{y}) = y_1^2 = y_1y_2 + y_2^2$, непрерывная и определенно положительная во всем пространстве R^2, и отображение $\mathbf{f}$: $R^2 \to R^2$ вида $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2 \cos x_1$, определенно нетривиальное в области R^2. Все условия теоремы 2 выполняются. Следовательно, функция $W(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_1x_2 \cos x_1 + x_2^2 \cos^2 x_1$ непрерывна и определенно положительна в R^2.

Отображение $\mathbf{f}$: $R^3 \to R^2$ вида $y_1 = \sqrt{x_1^2 + x_3^2}$, $y_2 = x_2 \cos x_1$ непрерывно и определенно нетривиально в R^3. Поэтому функция $W(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_3^2 - x_2\sqrt{x_1^2+x_3^2} \times \cos x_1 + x_2^2 \cos^2 x_1$ непрерывна и определенно положительна в R^3.

Отображение $\mathbf{f}$: $R^2 \to R^1$ вида $y_1 = x$, $y_2 = ax$, $a \neq 0$ также непрерывно и определенно нетривиально в R^1. Следовательно, функция $W(x) = (1 - a + a^2)\, x^2$ непрерывна и определенно положительна в R^1.

Следствие 2. Линейные невырожденные преобразования $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, где A—$n \times n$-матрица вещественных чисел, $\det A \neq 0$, сохраняют определенную положительность функций, заданных в R^n.

Замечание. На размерности m и n отображаемых пространств никаких ограничений не накладывается. Поэтому в некоторых частных случаях знакопостоянная функция может сделаться знакоопределенной и, наоборот, знакоопределенная — знакопостоянной. Например, если к знакопостоянной функции $V(\mathbf{y}) = y_1^2 + (y_2 - y_3)^2$ применить определенно нетривиальное отображение $y_1 = x_1$, $y_2 = x_1 + x_2$, $y_3 = x_1$, то получим знакоопределенную функцию $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$ в пространстве R^2. Действуя в обратном порядке, из знакоопределенной получим знакопостоянную функцию в R^3. При этом обратное отображение $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2 - y_3$ является уже постоянно нетривиальным, так как при $y_1 = 0$, $y_2 = y_3 \neq 0$ получим $x_1 = x_2 = 0$.

2. Условие знакоопределенности, использующее квадратичные формы. Рассмотрим квадратичную форму

$$V(\mathbf{y}) = \sum_{i_1=1}^{n-m} A_{i_1i_2} y_{i_1} y_{i_2}^* + \sum_{i_1=n-m+1}^{n} A_{i_1i_1} y_{i_1}^2 + \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=2}^{n} A_{i_1i_2} y_{i_1} y_{i_2} \, (i_1 \neq i_2) \qquad (2.1)$$

в которой выделены $n - m$ координат y_{i_1} ($i_1 = 1, 2, \ldots, n - m$), помеченные звездочкой. Вещественные числа $A_{i_1i_2}$ ($i_1, i_2 = 1, \ldots, n$) образуют определенно положительную $n \times n$-матрицу, т. е. форма (2.1) определенно положительна.

Введем непрерывное отображение f: $G_y^f \to G_{y^*}$ ($0 \in G_y^f \subseteq R^n$, $0 \in G_{y^*} \subseteq R^{n-m}$) вида

$$y_{i_1}^* = \mathbf{f}(y_1, \ldots, y_m),\ f(0) = 0,\ i_1 = 1, 2, \ldots, n - m \qquad (2.2)$$

где G_y^f — область значений, G_{y^*} — область определения отображения $\mathbf{y}^* = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ (2.2), $\mathbf{y}^* = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-m}) \in R^{n-m}$, $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_{n-m})$ — вектор-функция, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in R^n$, R^{n-m} — $(n - m)$-мерное евклидово пространство.

Используя это отображение как подстановку, преобразуем квадратичную форму $V(\mathbf{y})$ (2.1) в функцию $W\colon G_y \to H_w \subseteq R^1$, т. е.

$$W(\mathbf{y}) = \sum_{i_1=1}^{n-m} A_{i_1i_1} y_{i_1} f_{i_1}(y_1, \ldots, y_n) + \sum_{i_1=n-m+1}^{n} A_{i_1i_1} y_{i_1}^2 + \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} A_{i_1i_2} y_{i_1} y_{i_2} (i_1 \neq i_2) \tag{2.3}$$

где G_y — область определения, H_w — область значений функции $\mathbf{y} \to W(\mathbf{y})$ (2.2).

Требуется указать такие свойства отображения $\mathbf{y}^* = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ (2.2), при которых функция $\mathbf{y} \to W(\mathbf{y})$ (2.3) будет определенно положительной в некоторой непустой области $G_y^\circ \subseteq R^n$ $(\mathbf{0} \in G_y^\circ \subseteq G_y)$.

Теорема 3. Если квадратичная форма $V(\mathbf{y})$ (2.1) определенно положительна, а отображение $\mathbf{y}^* = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ (2.2) определенно нетривиально в области $G_y^\circ \subseteq G_y^f$ и удовлетворяет неравенствам

$$f_{i_1}(\mathbf{y})/y_{i_1} \geqslant 1, \quad \forall i_1 = 1, 2, \ldots, n-m; \quad \forall \mathbf{y} \in G_y^\circ \tag{2.4}$$

то функция $\mathbf{y} \to W(\mathbf{y})$ (2.3) определенно положительна в области $G_y^\circ \cap \cap R^m$.

Доказательство. Пусть выполняются условия теоремы. Тогда из неравенств (2.4) следует

$$A_{11} y_1 f_1(y) - A_{11} y_1^2 \geqslant 0\,(A_{11} > 0), \ldots, A_{n-m,\,n-m}\, y_{n-m} f_{n-m}(\mathbf{y}) - \\ - A_{n-m,\,n-m}\, y_{n-m}^2 \geqslant 0\,(A_{n-m,\,n-m} > 0) \tag{2.5}$$

Суммируя $n - m$ неотрицательных функций (2.5) и определенно положительную квадратичную форму $V(\mathbf{y})$ (2.1), получим функцию $\mathbf{y} \to W(\mathbf{y})$ (2.3), которая будет определенно положительной в области $G_y^\circ \cap R^m$. Действительно, для точки $y = 0$ будет $W(\mathbf{0}) = 0$ (2.3), а для любой точки $\mathbf{y} \in G_y^\circ \setminus \mathbf{0}$ будет выполняться $W(\mathbf{y}) > 0$, так как в этой точке у суммируется значение $V(\mathbf{y}) > 0$ и сумма неотрицательных величин (2.5). Теорема доказана.

Пример 3. Функция $F(\mathbf{x}) = ax_1 \sin x_1 + x_1x_2 + x_2^2$ будет определенно положительной в области $G_x^\circ = \{(x_1, x_2)\colon |x_1| < \pi/2,\ x_2 \in R^1\}$ при $a \geqslant \pi/2$. Это следует из условия (2.4) теоремы 3, т. е. неравенство $a \sin x_1/x_1 \geqslant 1$ при $|x_1| < \pi/2$ выполняется, если $a \geqslant \pi/2$.

Теорема 4. Для определенной положительности в области $G_x^\circ \subseteq R^n$ функции

$$W(\mathbf{x}) = \sum_{i_1=1}^{m-p} A_{i_1i_2} f_{i_1}(x) F_{i_1}(f(x)) + \sum_{i_1=m-p+1}^{m} A_{i_1i_1} f_{i_1}^2(x) + \\ + \sum_{i_1=1}^{m} \sum_{i_2=1}^{m} A_{i_1i_1} f_{i_1}(x) f_{i_2}(x) (i_1 \neq i_2), \quad W(\mathbf{0}) = 0 \tag{2.6}$$

где $A_{i_1i_2}$ $(i_1, i_2 = 1, \ldots, m)$ — вещественные числа, образующие симметричную $m \times m$-матрицу, достаточно, чтобы существовали вещественные числа

$$a_{ij} = \frac{1}{a_{ii}}\Big(A_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ki} a_{kj}\Big) \tag{2.7}$$

$$i = 1, 2, \ldots, m;\ j = i, i+1, \ldots, m;\ i > k \geqslant 1,\ a_{ki} \equiv 0,\ \forall k \geqslant i$$

удовлетворяющие условию

$$a_{ii} = 0, \ \forall i = 1, \ldots, m \tag{2.8}$$

определенно нетривиальное в области $G_y^\circ \subseteq G_y^F$ отображение $F\colon G_y^F \to G_{y^*} \subseteq R^{m-p}$ для выделенных координат $y_i^* \in R^{m-p}$:

$$y_{i_1}^* = F_{i_1}(y_1, \ldots, y_m),\ i_1 = 1, 2, \ldots, m-p \tag{2.9}$$

удовлетворяющее неравенствам

$$F_{i_1}(\mathbf{y})/y_{i_1} \geqslant 1, \ \forall i_1 = 1, 2, \ldots, m-p \tag{2.10}$$

определенно нетривиальное в области $G_x^\circ \subseteq G_x^f \subseteq R^n$ отображение f: $G_x^f \to G_y^f \subseteq R^m$ вида

$$y_{i_1} = f_{i_1}(\mathbf{x}), \ i_1 = 1, \ldots, m \tag{2.11}$$

Доказательство. Пусть существуют вещественные числа a_{ij} (2.7) при условии (2.8), т. е. справедлив рекуррентный критерий знакоопределенности квадратичной формы [3]

$$V(\mathbf{y}) = \sum_{i_1=1}^{m} \sum_{i_2=1}^{m} A_{i_1 i_2} y_{i_1} y_{i_2}, \quad A_{i_1 i_2} = A_{i_2 i_1} \tag{2.12}$$

Действительно, рекуррентные формулы (2.7) и условия (2.8) получаются из следующего равенства:

$$\sum_{i_1=1}^{m} \sum_{i_2=1}^{m} A_{i_1 i_2} y_{i_1} y_{i_2} = \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=i}^{m} a_{ij} y_j \Big)^2 \tag{2.13}$$

где правая часть при условии (2.8) представляет собой определенно положительную квадратичную форму, а левая — квадратичную форму $V(\mathbf{y})$ (2.12). Поэтому форма $V(\mathbf{y})$ (2.12) также определенно положительна.

Пусть существует определенно нетривиальное в области $G_y^\circ \subseteq G_y^f \subseteq$ $\subseteq G_y^F$ отображение F: $G_y^F \to G_y^*$ (2.9), действующее лишь на выделенные координаты $y_{i_1}^*$ ($i_1 = 1, \ldots, m-p$) и удовлетворяющее условию (2.10). Тогда, согласно теореме 3, будет определенно положительной в области $G_y^\circ \cap R^m$ функция

$$V^*(\mathbf{y}) = \sum_{i_1=1}^{m-p} A_{i_1 i_1} y_{i_1} F_{i_1}(y_1, \ldots, y_m) + \sum_{i_1=m-p+1}^{m} A_{i_1 i_1} y_{i_1}^2 + \sum_{i_1=1}^{m} \sum_{i_2=1}^{m} A_{i_1 i_2} y_{i_1} y_{i_2} (i_1 \neq i_2) \tag{2.14}$$

Если существует отображение $y_{i_1} = f_{i_1}(\mathbf{x})$ (2.11), определенно нетривиальное в области $G_x^\circ \subseteq G_x^f$, то, подставляя значения $y_{i_1} = f_{i_1}(\mathbf{x})$, $i = 1, \ldots, m$ (3.11) в функцию $V^*(\mathbf{y})$ (2.14), получим согласно теореме 2 определенно положительную в области G_x° функцию $W(\mathbf{x}) = W^*(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ (2.6). Теорема доказана.

Пример 4. Функция $W(x) = 5\sin^2 x + 11\cos^2 x + 7x\sin x - 2x\cos x -$ $- 5\sin 2x + 2x + 10\sin x - 22\cos x + 11$ определенно положительна при $|x| < \pi/2$, так как выполнены все условия теоремы 6. Действительно, эта функция получается из определенно положительной квадратичной формы $V(\mathbf{y}) = y_1^2 + 2y_1y_2 + y_1y_3 +$ $+ 5y_2^2 + 2y_2y_1 + 5y_2y_3 + 11y_3^2 + y_3y_1 + 5y_3y_2$ при помощи отображения одной выделенной координаты y_1 в первом члене, т. е. $y_1^* = 3\sin y_1$, определенно нетривиального и удовлетворяющего условию (2.10) при $|x| < \pi/2$, и отображения $y_1 = x$, $y_2 = \sin x$, $y_3 = 1 - \cos x$, определенно нетривиального при $|x| < \pi$.

3. Теоремы об устойчивости и неустойчивости со сложной функцией Ляпунова. Пусть задана система дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{X}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{X}(0) = 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n \tag{3.1}$$

где $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ — вектор-функция, такая, что выполняются условия существования и единственности решений уравнений (3.1) в области $G = \{\mathbf{x}: \|x\| < H = \text{const}, \ \|x\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2\}$. Исследуем устойчивость невозмущенного движения $\mathbf{x} = 0$ системы (3.1).

Теорема 5. Если для системы (3.1) существуют дифференцируемая и определенно положительная в области $G_y^\circ \supseteq G_y^f$ функция $\mathbf{y} \to V(\mathbf{y})$; дифференцируемое и определенно нетривиальное в области $G_x^\circ \subseteq G_x^f \subseteq G$

отображение f: $G_x^f \to G_y^f$ $(0 \in G_x^f \subseteq R^n,\quad 0 \in G_y^f \subseteq R^m)$, $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, где $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m) \in R^m$, $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ — вектор-функция; дифференцируемое и постоянно нетривиальное отображение g: $G_x^g \to G_z^g$ $(0 \in G_x^g \subseteq R^n,\ 0 \in G_z^g \subseteq R^p)$, $\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$, где $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_p) \in R^p$, $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_p)$ — вектор-функция, такие, что полная производная композиции $V(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ по t в силу системы (3.1)

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} X_j(\mathbf{x}) \qquad (3.2)$$

при помощи отображения $\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ преобразуется в постоянно отрицательную или тождественно равную нулю функцию $\mathbf{z} \to W(\mathbf{z})$, т. е. $dV/dt = W(\mathbf{z})$, то невозмущенное движение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (3.1) устойчиво (равномерно по t_0), и все траектории, исходящие из области G_x°, остаются в ограниченной области.

Доказательство. Пусть выполняются условия теоремы. Тогда согласно теореме 2 композиция определенно положительной в области G_y° функции $\mathbf{y} \to V(\mathbf{y})$ и определенно нетривиального в области G_x° отображения $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, т. е. функция $\mathbf{x} \to V(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ будет определенно положительной в области $G_x^\circ \subseteq R^n$. Согласно же теореме 1, композиция знакопостоянной (постоянно отрицательной) или тождественно равной нулю функции $\mathbf{z} \to W(\mathbf{z})$ и постоянно нетривиального отображения $\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$, т. е. функция $\mathbf{x} \to W(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$ будет постоянно отрицательной или соответственно тождественно равной нулю функцией в окрестности невозмущенного движения $x = 0$. Тогда все условия теоремы Ляпунова об устойчивости [6] с дополнением К. П. Персидского [7] выполнены. В силу $V(\mathbf{f}(\mathbf{x}))|_{t>0} \leqslant V(\mathbf{f}(\mathbf{x}))|_{t=0}$ и определенной положительности сложной функции $\mathbf{x} \to V(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ траектории движения останутся в ограниченной области, если они исходят из области G_x°. Теорема доказана.

Замечание. Теорема 5 остается справедливой, если в качестве функции Ляпунова взять сумму $V(\mathbf{f}(\mathbf{x})) + p(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} \to p(\mathbf{x})$ — неотрицательная знакопостоянная функция, $p(0) = 0$.

Теорема 6. Если для системы (3.1) существуют дифференцируемая и определенно положительная в области $G_y^\circ \supseteq G_y^f$ функция $\mathbf{y} \to V(\mathbf{y})$; дифференцируемое и определенно нетривиальное в области $G_x^\circ \subseteq G_x^f \subseteq G$ отображение f: $G_x^f \to G_y^f$ $(0 \in G_x^f \subseteq R^n),\ 0 \in G_y^f \in R^m)$, $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, где $y = (y_1, \ldots, y_m) \in R^m$, $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ — вектор-функция; определенно нетривиальное в области $G_x^W \subseteq G_x^g \subseteq G$ отображение g: $G_x^g \to G_z^g$ $(0 \in G_x^g \subseteq R^n,\ 0 \in G_z^g \subseteq R^p)$, $\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$, где $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_p) \in R^p$, $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_p)$ — вектор-функция, такие, что полная производная dV/dt (3.2) композиции $V(f(x))$ по t в силу системы (3.1) при помощи отображения $\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ преобразуется в определенно отрицательную в области $G_z^\circ \supseteq G_z^g$ функцию $\mathbf{z} \to W(\mathbf{z})$, т. е. $dV/dt = W(\mathbf{z})$, то невозмущенное движение $x = 0$ системы (3.1) асимптотически устойчиво (равномерно по x_0, t_0) и ограниченная область

$$G_{v<c} = \{\mathbf{x} : V(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \leqslant c = \mathrm{const} > 0\} \subseteq G_x^\circ \cap G_x^W \qquad (3.3)$$

лежит в области притяжения невозмущенного движения $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (3.1).

Доказательство. Пусть выполняются условия теоремы. Тогда согласно теореме 2, композиция определенно положительной в области G_y° функции $\mathbf{y} \to V(\mathbf{y})$ и определенно нетривиального в области G_x° отображения

$y = f(x)$, т. е. функция $x \to V(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ будет определенно положительной в области G_z°. Согласно этой же теореме, композиция определенно отрицательной в области G_z° функции $\mathbf{z} \to W(\mathbf{z})$ и определенно нетривиального в области G_x^W отображения $\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$, т. е. функция $\mathbf{x} \to W(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$ будет определенно отрицательной в области G_x^W $(0 \in G_x^W \cap G_x^\circ \neq \varnothing)$. Тогда все условия теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости [6] с дополнением И. Г. Малкина [7] выполнены и невозмущенное движение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (3.1) равномерно по x_0, t_0 асимптотически устойчиво.

Так как при этом ограниченная область $G_{v<c}$ (3.3) содержится в пересечении областей G_x° и G_x^W, то поверхности уровня определенно положительной функции $\mathbf{x} \to V(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ будут замкнутыми, вложенными друг в друга поверхностями. Поэтому любая траектория $\mathbf{x}(t;\ x_0,\ t_0)$ с начальным значением $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) \in G_{v<c}$ будет пересекать эти поверхности снаружи вовнутрь и стремиться к решению $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ при $t \to \infty$. Теорема доказана.

Замечание к теореме 5 справедливо и для теоремы 6.

Теорема 7. Если для системы (3.1) существуют дифференцируемая функция $\mathbf{y} \to V(\mathbf{y})$, принимающая положительные значения в некоторых точках $\mathbf{y}$ сколь угодно малой окрестности G_y^ε начала координат $\{\mathbf{y} = \mathbf{0}\} \in R^m$; дифференцируемая и определенно нетривиальное в области $G_x^\circ \subseteq G_x^f \subseteq G$ отображение f: $G_x^f \to G_y^f$ $(0 \in G_x^f \subseteq R^n, \quad 0 \in G_y^f \subseteq R^m)$, где $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m) \in R^m$, $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ — вектор-функция; определенно нетривиальное в области $G_x^W \subseteq G_x^g \subseteq G$ отображение $\mathbf{g}$: $G_x^g \to G_z^g$, $z = g(x)$ $(0 \in G_x^f \subseteq R^n, \quad 0 \in G_y^f \subseteq R^m)$, где $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_p) \in R^p$, $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_p)$ — вектор-функция, такие, что полная производная dV/dt (3.2) композиции $\mathbf{x} \to V(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ по t в силу системы (3.1) при помощи отображения $\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ преобразуется в определенно положительную в области $G_z^\circ \subseteq G_z^g$ функцию $\mathbf{z} \to W(\mathbf{z})$, т. е. $dV/dt = W(\mathbf{z})$, то невозмущенное движение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (4.1) неустойчиво.

Доказательство. Пусть выполняются условия теоремы. Тогда в силу непрерывности отображения $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, в частности, в точке $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$, такое, что при $\|\mathbf{x}\| < \delta$ будет выполняться условие $\|\mathbf{y}\| < \varepsilon$. Другими словами, точки $\mathbf{x} \in G_x^\delta = \{x\colon \|x\| < \delta = \mathrm{const} > 0\}$ сколь угодно малой окрестности G_y^ε начала координат $\{y = 0\} \in R^m$. А так как по условию теоремы функция $\mathbf{y} \to V(\mathbf{y})$ принимает в некоторых точках $\mathbf{y} \in G_y^\varepsilon$ положительные значения, то в силу определенной нетривиальности отображения $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ композиция $V(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ также положительна в соответствующих точках $\mathbf{x} \in G_x^\delta$.

С другой стороны, согласно теореме 2, композиция определенно положительной в области $G_z^\circ \subseteq G_z^g$ функции $\mathbf{z} \to W(\mathbf{z})$ и определенно нетривиального в области G_x^W отображения $\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$, т. е. функция $\mathbf{x} \to W(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$, будет определенно положительной в области G_x^W $(0 \in G_x^W \cap G_x^\circ \neq \varnothing)$.

В этом случае все условия первой теоремы Ляпунова о неустойчивости [6] выполнены. Теорема доказана.

4. Примеры. 1°. Применим полученные результаты к решению задачи об устойчивости вращательного движения снаряда. При весьма настильной траектории стрельбы имеют место следующие дифференциальные уравнения возмущенного движения [8]:

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1x_2\frac{\sin x_4}{\cos x_4} - \frac{Ap}{B}\frac{x_2}{\cos x_4} + \frac{a}{B}\frac{\sin x_3}{\cos x_4}.$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1^2 \sin x_4 \cos x_4 + \frac{Ap}{B} x_1 \cos x_4 + \frac{a}{B} \sin x_4 \cos x_3 \qquad (4.1)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_1, \qquad \frac{dx_4}{dt} = x_2$$

где x_3 — угол, который образует ось снаряда со своей проекцией на плоскость стрельбы, x_4 — угол между этой проекцией и касательной к траектории центра тяжести, A, B, p, a — постоянные, зависящие от параметров и условий движения снаряда.

В работе [8] показана устойчивость в малом невозмущенного движения $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. Здесь получим кроме устойчивости еще оценку области начальных возмущений, при которых траектории остаются в ограниченной области.

Рассмотрим определенно положительную в R^4 функцию [5]

$$V_1(\mathbf{y}) = (a_{11}y_1 + a_{14}y_4)^2 + (a_{22}y_2 + a_{23}y_3)^2 + (a_{33}y_3)^2 + (a_{44}y_4)^2 \qquad (4.2)$$

$$a_{11}^2 = a_{22}^2 = 1/2BAp, \; a_{11}a_{14} = -a_{22}a_{23} = Ba, \; a_{14}^2 + a_{44}^2 = a_{23}^2 + a_{33}^2 = {}^1\!/_2 Apa$$

и определенно нетривиальное в области

$$G_x{}^\circ = \{\mathbf{x}\colon x_i \in R^1, \; i = 1, 2; \; |x_j| < \pi/2, \; j = 3, 4\} \qquad (4.3)$$

отображение $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ вида

$$y_1 = x_1 \cos x_4, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = \sin x_3, \quad y_4 = \sin x_4 \cos x_3 \qquad (4.4)$$

Составим функцию Ляпунова

$$V(\mathbf{x}) = V_1(\mathbf{f}(\mathbf{x})) + {}^1\!/_2 Apa\,(1 - \cos x_3 \cos x_4)^2 \qquad (4.5)$$

где $\mathbf{x} \to V_1(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ — композиция функций (4.2) и (4.4).

Полная производная функции $x \to V(x)$ (4.5) в силу системы (4.1) равна тождественно нулю. Согласно теореме 5 и замечанию к ней, невозмущенное движение $\mathbf{x} = 0$ устойчиво и траектории, исходящие из области $G_x{}^\circ$ (4.3), остаются в ограниченной области.

2°. Применим полученные результаты к выводу достаточных условий асимптотической устойчивости невозмущенного движения $\mathbf{x} = 0$ следующей автономной системы, встречающейся в задачах о многочастотных колебаниях:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \sin x_j, \quad i = 1, \ldots, n; \quad (x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{x} \in R^n \qquad (4.6)$$

где c_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ — вещественные числа.

Рассмотрим определенно отрицательную в R^n функцию

$$V = \sum_{i=1}^{n} b_i y_i^2, \quad b_i = \mathrm{const} < 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n \qquad (4.7)$$

и определенно нетривиальное в области $G_x{}^\circ = \{\mathbf{x}\colon |x_i| < \pi; \; i = 1, \ldots, n\}$ отображение $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ вида

$$y_i = \sqrt{1 - \cos x_i}, \quad i = 1, \ldots, n \qquad (4.8)$$

Полная производная композиции функции (4.7) и отображения (4.8) в силу системы (4.6)

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{b_i}{2} (c_{ij} + c_{ji}) \sin x_i \sin x_j$$

при помощи определенно нетривиального в области $G_x{}^W = G_x{}^\circ$ отображения $\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ вида $z_i = \sin x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ преобразуется в квадратичную форму

$$W(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} z_i z_j, \quad A_{ij} = A_{ji} = {}^1\!/_2 b_i (c_{ij} + c_{ji}) \qquad (4.9)$$

Применяя к квадратичной форме $W(\mathbf{z})$ (4.9) рекуррентный критерий определенной положительности [3], получим утверждение: для асимптической устойчивости невозмущенного движения $x = 0$ системы (4.6) с областью притяжения $G_{v<c} = \{\mathbf{x}\colon |x_i| < \pi, \; i = 1, \ldots, n\}$ достаточно, чтобы существовали вещественные числа $b_i < 0$

$(i = 1, \ldots, n)$ и

$$a_{ij} = \frac{1}{a_{ii}} \left[\frac{b_i}{2} (c_{ij} + c_{ji}) - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ki} a_{kj} \right]$$

$$i = 1, \ldots, n;\ j = i, i+1, \ldots, n;\ i > k \geqslant 1,\ a_{ki} \equiv 0,\ \forall k \geqslant i$$

удовлетворяющие условию $a_{ii} \neq 0$, $\forall i = 1, \ldots, m$.

Действительно, пусть эти условия выполнены. Тогда функция $\mathbf{y} \to V(\mathbf{y})$ (4.7) определенно отрицательна, а функция $\mathbf{z} \to W(\mathbf{z})$ (4.9) определенно положительна. При этом существуют определенно нетривиальное в области $G_x{}^{\circ}$ отображение $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ (4.8) и определенно нетривиальное в области $G_x{}^W$ отображение $z = g(x)$, причем $G_x{}^{\circ} = G_x{}^W = \{x\colon |x_i| < \pi,\ i = 1, \ldots, n\}$. Область $G_{v<c} = \{\mathbf{x}\colon V(f(x)) < c = \mathrm{const} > 0\}$ в данном случае совпадает с областью $G_x{}^{\circ}$, т. е. $G_{v<c} = G_x{}^{\circ} = G_x{}^W$. А так как фазовым пространством системы (4.6) служит n-мерный тор, то $G_{v<c}$ — область притяжения невозмущенного движения $\mathbf{x} = 0$, ибо других точек на n-мерном торе, откуда исходили бы асимптотически устойчивые траектории, нет. В данном случае условия теоремы 6 выполнены. Утверждение доказано.

Заметим, что в силу периодичности правой части системы (4.6) асимптотически устойчивыми при выполнении этих условий будут также решения $x_i = 2k\pi$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $i = 1, \ldots, n$, а решения $x_i = (2k + 1)\pi$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, $i = 1, \ldots, n$ будут при этом неустойчивы. Действительно, в любой сколь угодно малой окрестности последних существуют точки $x \in G_{v<c}$, где $G_{v<c} = \{x\colon |x_i| < \pi,\ i = 1, \ldots, n\}$ — область притяжения решений $x_i = 2k\pi$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, $i = 1, \ldots, n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абдуллин Р. З., Анапольский А. Ю., Воронов А. А. и др.* Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости / Под ред. А. А. Воронова, В. М. Матросова. М.: Наука, 1987. 309 с.
2. *Румянцев В. В., Озиранер А. С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 253 с.
3. *Аминов А. Б., Сиразетдинов Т. К.* Метод функций Ляпунова в задачах о полиустойчивости движения // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 5. С. 709—716.
4. *Аминов А. Б., Сиразетдинов Т. К.* Условия знакоопределенности четных форм и устойчивости в целом нелинейных однородных систем // ПММ. 1984. Т 48. Вып. 3. С. 339—347.
5. *Аминов А. Б., Сиразетдинов Т. К.* Функции Ляпунова для исследования устойчивости в целом нелинейных систем // ПММ. 1985.
6. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 472 с.
7. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 212 с.
8. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1965. 207 с.

Казань

Поступила в редакцию
13.II.1990