Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 1, 1991

УДК 531.36

С. В. Зубарев

СКОЛЬЗЯЩИЕ РЕЖИМЫ В МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Рассматриваются механические системы с неудерживающими кинематическими связями. Получены условия, при которых уравнения движения таких систем, определенные методами классической механики, выпуклого доопределения и эквивалентных управлений, совпадают.

Вопросы, связанные с методами определения уравнений движения в скользящих режимах, возникающих в системах дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями, наиболее подробно освещены в [1, 2]. С точки зрения классической механики, появление таких режимов вызывается наложением на систему материальных точек $P_i, (i = 1, 2, \ldots, N)$ неудерживающих связей S_β $(\beta = 1, 2, \ldots, m)$

$$S_\beta = \varphi_\beta (t, r, r^\cdot), \; r = (r_1, \ldots, r_N), \; r^\cdot = (r_1^\cdot, \ldots, r_N^\cdot) \tag{0.1}$$

где r_i и $r_i^\cdot$ — радиус-векторы и скорости точек P_i соответственно.

Скользящим движениям здесь соответствуют такие движения, когда связи S_β на определенных этапах поведения таких систем являются удерживающими, т. е. $S_\beta = 0$. При этом правые части уравнений динамики материальных точек P_i терпят разрывы на гиперповерхностях $S_\beta = 0$.

В дальнейшем будем предполагать, что в случае, когда связи удерживающие (связь включена), они идеальны. Для широкого класса механических систем это предположение естественно.

Например, такая ситуация возникает, когда S_β — неудерживающая фрикционная связь [3]. Если связи (0.1) идеальны (в вышеуказанном смысле) и линейны по скоростям, то для вывода уравнений движения динамики точек P_i несвободной системы можно применить метод неопределенных множителей Лагранжа (альтернативный методам выпуклого доопределения и эквивалентных управлений [1, 2]). Однако каждый из этих подходов в отдельности может не дать достаточной информации для исследования поведения таких систем переменной структуры. В частности, метод Лагранжа, однозначно определяя уравнения скольжения, вообще говоря, не устанавливает условий их переключения, в то время как методы [1, 2], в принципе дающие условия существования особых режимов, в ряде случаев не гарантируют правильности вывода уравнений движения, когда связи S_β удерживающие.

В связи с этими и некоторыми другими вопросами представляет интерес задача согласования различных методов вывода уравнений движения в скользящих режимах для механических систем переменной структуры в рамках ньютоновой механики.

1. Рассмотрим сначала динамическую систему вида

$$m_i x_{ij}^{\cdot\cdot} = F_{ij}(t, x, x^\cdot) + \sum_{\beta=1}^{m} b_{i\beta}^j (t, x, x^\cdot)\, u_\beta (x, x^\cdot) \tag{1.1}$$

$$u_\beta = \begin{cases} u_\beta^+, S_\beta > 0, \\ u_\beta^-, S_\beta < 0, \end{cases} \quad S_\beta = \sum_{i, j=1}^{N, 3} l_{\beta i}^j x_{ij}^\cdot + l_{\beta(N+1)}^4 \tag{1.2}$$

$$l_{\beta i}^j = l_{\beta i}^j (x), \; l_{\beta(N+1)}^4 = l_{\beta(N+1)}^4 (x); \; i = 1, 2, \ldots, N; \; j = 1, 2, 3$$
$$x = (x_1, \ldots, x_N), \quad x^\cdot = (x_1^\cdot, \ldots, x_N^\cdot)$$
$$x_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}), \quad x_i^\cdot = (x_{i1}^\cdot, x_{i2}^\cdot, x_{i3}^\cdot)$$

Здесь m_i — масса i-й точки, x_i и $x_i^\cdot$ — координаты и скорости по трем измерениям i-й точки.

Дифференциальная связь S_β $(\beta = 1, 2, \ldots, m)$ как скалярная функция переменных x и $x^\cdot$ является поверхностью разрыва $u_\beta (x, x^\cdot)$. Если $S_\beta \neq 0$, $\forall \beta = 1, 2, \ldots, m$, то правые части системы (1.1) — активные

силы (наряду с F_{ij}). Если включена какая-либо связь S_r ($r = 1, 2, \ldots$
$\ldots, m$), то соответствующие члены $b_{ir}{}^j u_r$ определяют реакции связи S_r.

В дальнейшем будем использовать обозначения

$$F_{ij}^r[\varphi(u)] = F_{ij} + \sum_{\beta=1,\ \beta\neq r}^{m} b_{i\beta}^j \varphi_{i\beta}^j(u_\beta)$$

$$\alpha_r[\varphi(u)] = \sum_{\nu,\ k=1}^{N,\ 3} \frac{F_{ij}{}^r[\varphi_{i\beta}{}^j(u_\beta)]\, l_{r\nu}^k}{m_\nu} + \Gamma_r \qquad (1.3)$$

$$a_r(\varkappa, \omega, \sigma, \tau) = \sum_{\nu,\ k=1}^{N,\ 3} \frac{\varkappa_{r\nu}^k \omega_{i\nu}^k \sigma_{\nu r}^k \tau_{\nu r}^k}{m_\nu}$$

$$\Gamma_r = \sum_{\nu,\ k=1}^{N,\ 3} \langle \nabla l_{r\nu}^k x^{\cdot} \rangle\, \dot{x}_{\nu k} + \langle \nabla l_{r(N+1)}^4 x^{\cdot} \rangle$$

($\langle \cdot \rangle$ — означает скалярное произведение).

Выпишем уравнения движения системы с наложенной связью S_r', используя метод Лагранжа [4] и метод эквивалентного управления [2], который для системы (1.1) приводит к тому же результату, что и метод А. Ф. Филиппова [1]

$$m_i x_{ij}^{\cdot\cdot} = F_{ij}{}^r(u) + l_{ri}{}^j \lambda_r \qquad (1.4)$$

$$m_i x_{ij}^{\cdot\cdot} = F_{ij}{}^r(u) + b_{ir}{}^j u_r{}^{\text{eq}} \qquad (1.5)$$

Здесь

$$\lambda_r = -\frac{\alpha_r(u)}{a_r(l, l, 1, 1)}, \quad u_r^{\text{eq}} = -\frac{\alpha_r(u)}{a_r(l, 1, b, 1)} \qquad (1.6)$$

$$\min(u_r^+,\ u_r^-) \leqslant u_r{}^{\text{eq}} \leqslant \max(u_r^+, u_r^-) \qquad (1.7)$$

Функции $F_{ij}{}^r(u)$, $\alpha_r(u)$, a_r определяются, согласно (1.3), при $\varphi(u) = u$.

Заметим, что из соотношений (1.6) следует, что λ_r и $u_r{}^{\text{eq}}$ равны нулю или отличны от него одновременно. Тривиальный случай совпадения уравнений (1.4) и (1.5) при $\lambda_r = u_r{}^{\text{eq}} = 0$ рассматривать не будем.

Оказывается, что для совпадения уравнений (1.4) и (1.5) необходимо и достаточно выполнения системы равенств

$$l_{ri}{}^j b_{\nu r}{}^k = b_{ir}{}^j l_{r\nu}{}^k, \quad \forall i,\ \nu = 1,\ 2, \ldots, N; \quad j, k = 1,\ 2,\ 3 \qquad (1.8)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть уравнения (1.4) и (1.5) совпадают. Тогда λ_r и $u_r{}^{\text{eq}}$ будут удовлетворять линейной системе уравнений

$$l_{ri}{}^j \lambda_r - b_{ir}{}^j u_r{}^{\text{eq}} = 0 \qquad (1.9)$$

Так как λ_r и $u_r{}^{\text{eq}}$, по предположению, не равны нулю, то ранг системы (1.9) меньше двух, откуда получаем условия (1.8).

Достаточность. Пусть выполнены соотношения (1.8). Взяв какие-либо $l_{ri}{}^j$ и $b_{ir}{}^j$, отличные от нуля, и выразив все $b_{\nu r}{}^k$ из (1.8) через остальные величины, подставим во второе равенство (1.6). Получаем

$$u_r{}^{\text{eq}} = (l_{ri}{}^j / b_{ir}{}^j)\, \lambda_r$$

Последнее соотношение приводит к совпадению правых частей (1.4) и (1.5). Здесь и далее предполагается, что F_{ij} и $b_{i\beta}{}^j$ непрерывны по x и x' и измеримы в смысле Лебега по t, а $l_{\beta i}{}^j$ и $l_{\beta(N+1)}^4$ непрерывно дифференцируемы по всем входящим в них аргументам.

Замечание. Если на систему (1.1) накладываются несколько связей $S_1, \ldots, S_z$, $z \leqslant m$, $m \neq 3N$, то условия (1.8) и в этом случае оказываются достаточными для совпадения уравнений движения, полученных этими тремя методами. А так как, чтобы существовало движение на пересечении поверхностей разрывов $S_1, \ldots, S_z$, необходимо хотя бы существование по каждой из них, то условия (1.12) являются критерием совпадения уравнений движения скольжения, полученным различными методами. При $z = m$, $m = 3N$ уравнения скользящих движений получаются одинаковыми для любых $b_{i\beta}{}^j$, поскольку в этом случае они однозначно определяются уравнениями связей.

2. Рассмотрим случай нелинейного вхождения разрывных функций в правые части уравнений динамики

$$m_i x_{ij}^{\cdot\cdot} = F_{ij}(t, x, x^{\cdot}) + \sum_{\beta=1}^{m} b_{i\beta}{}^j (t, x, x^{\cdot})\, \varphi_{i\beta}{}^j (u_\beta) \tag{2.1}$$

с наложенными связями (1.2). Функции $\varphi_{i\beta}{}^j (u_\beta)$ непрерывны по u_β. Уравнения движения при включенной связи S_β, получаемые методом Лагранжа, имеют вид

$$m_i x_{ij}^{\cdot\cdot} = F_{ij}^{\cdot\cdot} [\varphi (u)] - l_{ri}{}^j \alpha_r [\varphi (u)]/a_r (l, \ \ l, \ \ 1, \ \ 1) \tag{2.2}$$

Как отмечалось [2], результаты применения к системам вида (2.1) методов выпуклого доопределения и эквивалентных управлений, вообще говоря, не совпадают, и для гарантии правильности вывода уравнений скольжения необходима дополнительная информация о существе объекта исследования. В качестве такой информации в рассматриваемом случае могут служить уравнения (2.2).

Сравним (2.2) с системой, полученной методом выпуклого доопределения. Применяя стандартную технику А. Ф. Филиппова, после преобразований будем иметь

$$m_i x_{ij}^{\cdot\cdot} = F_{ij}{}^r [\varphi (u)] - \frac{\Delta\varphi_{ir}{}^j b_{ir}{}^j \alpha_r \ [\varphi (u)] + \gamma_{ir}{}^j}{a_r (l, 1, b, \Delta\varphi)} \tag{2.3}$$

$$\Delta\varphi_{ir}{}^j = \varphi_{ir}{}^j (u_r^+) - \varphi_{ir}{}^j (u_r^-)$$

$$\gamma_{ir}{}^j = \sum_{\nu, k=1}^{N, 3} \frac{l_{r\nu}{}^k b_{\nu i}{}^k b_{ir}{}^j}{m_\nu} \Phi_{\nu ir}^{kj}$$

$$\Phi_{\nu ir}^{kj} = \varphi_{\nu r}^k (u_r^-)\, \varphi_{ir}{}^j (u_r^+) - \varphi_{\nu r}^k (u_r^+)\, \varphi_{ir}{}^j (u_r^-)$$

Здесь предполагается, что $\Delta\varphi_{ir}{}^j \neq 0$. Сравнивая правые части систем (2.2) и (2.3) при произвольных активных силах F_{ij}, получаем систему

$$l_{ri}{}^j a_r (l, \ \ 1, \ \ b, \ \ \Delta\varphi) - b_{ir}{}^j \Delta\varphi_{ir}{}^j a_r (l, \ \ l, \ \ 1, \ \ 1) = 0 \tag{2.4}$$

$$i = 1, 2, \ldots, N; \quad j = 1, 2, 3; \quad r = 1, 2, \ldots, m$$

Предполагая, что $a_r (l, 1, b, \Delta\varphi) \neq 0$ и $a_r (l, l, 1, 1) \neq 0$, аналогично, как и ранее, получаем соотношения

$$l_{ri}{}^j \Delta\varphi_{\nu r}^k b_{\nu r}^k - l_{r\nu}^k \Delta\varphi_{ir}{}^j b_{ir}{}^j = 0 \tag{2.5}$$

Далее приравняем правые части систем (2.2) и (2.3) и в это равенство подставим величину $b_{\nu r}{}^k$, выраженную из (2.5) через остальные величины. При естественном требовании, чтобы $l_{ri}{}^j$ и $\varphi_{ri}{}^j$ не зависили от массовых параметров, окончательно будем иметь

$$\Phi_{\nu ir}^{kj} = 0 \tag{2.6}$$

Таким образом, (2.5) и (2.6) — условия совпадения уравнений скольжения, полученные методами Лагранжа и выпуклого доопределения.

Условия совпадения уравнений скольжения, полученные указанными тремя методами, можно записать в виде

$$\frac{l_{ri}^j}{l_{r\nu}^k} = \frac{b_{ir}{}^j \Delta\varphi_{ir}{}^j}{b_{\nu r}^k \Delta\varphi_{\nu r}^k} = \frac{b_{ir}{}^j \varphi_{ir}{}^j (u_r^{\pm})}{b_{\nu r}^k \varphi_{\nu r}^k (u_r^{\pm})} = \frac{b_{ir}^j \varphi_{ir}^j (u_r^{eq})}{b_{\nu r}^k \varphi_{\nu r}^k (u_r^{eq})} \tag{2.7}$$

где $u_r{}^{eq}$ определяется согласно [2].

Пример.

$$m_\beta x_{\beta 1}^{\cdot\cdot} = F_{\beta 1}(x_{11},\ x_{21}) + b_{\beta 1}{}^1\varphi_{\beta 1}{}^1(u_1) + b_{\beta 2}{}^1\varphi_{\beta 2}{}^1(u_2) \qquad (2.8)$$

$$u_\beta = \begin{cases} 1, & S_\beta > 0, \\ -1, & S_\beta < 0, \end{cases} \quad S_\beta = l^1_{\beta 1}x_{11}^{\cdot} + l^1_{\beta 2}x_{21}^{\cdot}, \quad \beta = 1, 2$$

Если (2.8) интерпретировать как механическую систему с «сухим» трением, показанную на фигуре, то

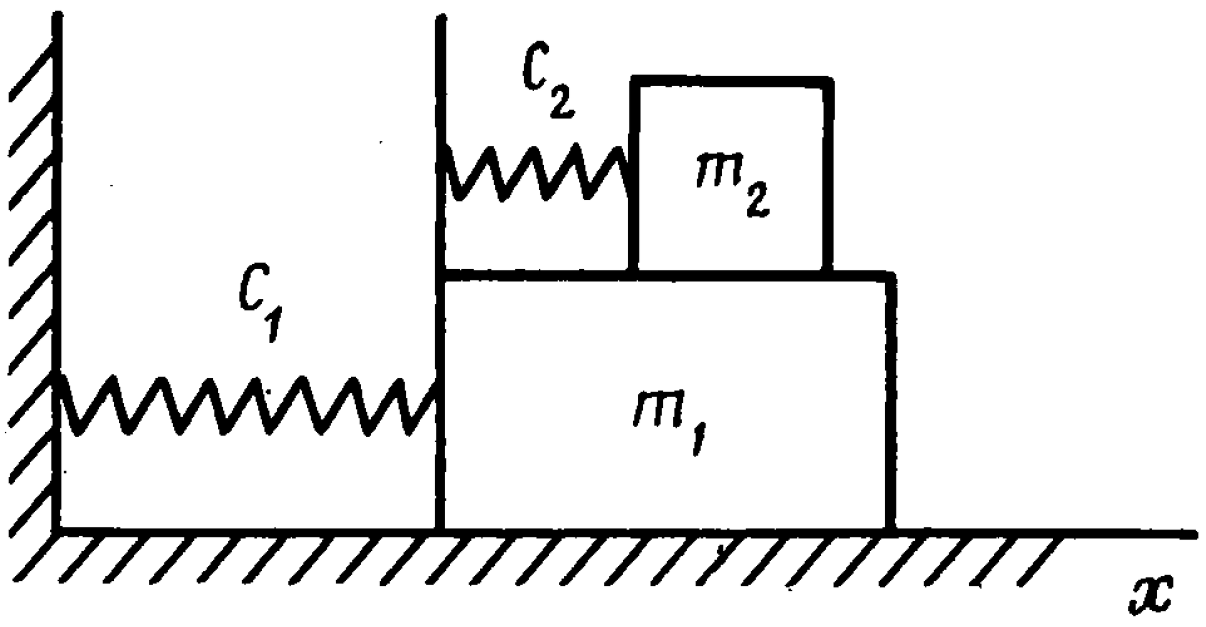
$$F_{11} = -c_1x_{11} - c_2(x_{11} - x_{21}),\ F_{21} = c_2(x_{11} - x_{21})$$

$$b_{1\beta}{}^1 = -m_\beta gk_\beta,\ b_{21}{}^1 = 0,\ b_{22}{}^1 = m_2gk_2$$

$$l_{\beta 1}{}^1 = 1,\ l_{12}{}^1 = 0,\ l_{22}{}^1 = -1.$$

$$\varphi^1_{\beta i}(u_\beta) = \begin{cases} 1; & S_\beta > 0, \\ -1, & S_\beta < 0 \end{cases} \quad \beta = 1, 2; \quad i = 1, 2 \qquad (2.9)$$

т. е. $\varphi_{\beta i}{}^1$ могут быть любыми нечетными функциями с предельными значениями, совпадающими с предельными значениями u_β. Здесь c_1 и c_2 — соответственно жесткости пружин, g — ускорение свободного падения, k_1 и k_2 — коэффициенты трения.



Если $\varphi_{\beta i}{}^1(u_\beta) = u_\beta,\ \forall i,\ \beta = 1, 2$, то уравнения движения при любой включенной связи S_β, получаемые тремя методами, будут совпадать, так как здесь выполнены условия (1.8).

Действительно

$$l_{11}{}^1b_{21}{}^1 = 0, \quad l_{12}{}^1b_{11}{}^1 = 0, \quad \Rightarrow l_{11}{}^1b_{21}{}^1 = l_{12}{}^1b_{11}{}^1$$

$$b_{12}{}^1l_{22}{}^1 = m_2gk_2, \quad l_{21}{}^1b_{22}{}^1 = m_2gk_2, \quad \Rightarrow b_{12}{}^1l_{22}{}^1 = b_{22}{}^1l_{21}{}^1$$

Если $\varphi_{\beta i}{}^1(u_\beta)$ нелинейны по u_β и удовлетворяют условиям (2.9), то уравнения скользящих режимов, полученные методом Лагранжа и Филиппова, также будут совпадать, так как выполнены условия (2.5), (2.6)

$$\Delta\varphi_{\beta i}{}^1 = 2,\ l_{11}{}^12b_{21}{}^1 = 0,\ l_{12}{}^12b_{11}{}^1 = 0$$

$$l_{21}{}^12b_{22}{}^1 = l_{22}{}^12b_{12}{}^1 = 2m_2gk_2,\ \beta,\ i = 1,\ 2$$

Следовательно

$$l^1_{ri}\Delta\varphi^1_{\nu r}b^1_{\nu r} = l^1_{r\nu}\Delta\varphi^1_{ir}b^1_{ir}, \quad \forall r, i, \nu = 1, 2$$

Выполнение условия (2.9) непосредственно следует из (2.9). Выпишем, например, уравнения движения при включенной связи $S_2 = 0$, т. е. когда относительная скорость масс m_1 и m_2 равна нулю]

$$(m_1 + m_2)\ x_{11}^{\cdot\cdot} = F_{11} + F_{21} - m_1gk_1\varphi_{11}{}^1(u_1) \qquad (2.10)$$

при условии]

$$|\ G/[m_2(m_1 + m_2)\ gk_2]\ | \leqslant 1$$

$$G = F_{11}m_2 - F_{21}m_1 - m_1m_2gk_1\varphi_{11}{}^1(u_1)$$

Метод эквивалентных управлений может привести к другим уравнениям динамики при наложенной связи $S_2 = 0$ и в случае нелинейной зависимости $\varphi_{2i}{}^1$ от u_2, удовлетворяющей условиям (2.9). Пусть $\varphi_{21}{}^1(u_2) = u_2$, а $\varphi_{22}{}^1(u_2) = (u_2)^3$. Тогда эквивалентное управление $u_2{}^{eq}$ будет удовлетворять уравнению

$$gk_2(u_2{}^{eq})^3 + (m_2/m_1)\ gk_2u_2{}^{eq} + G/(m_1m_2) = 0 \qquad (2.11)$$

С другой стороны, согласно (2.7), величина $u_2{}^{eq}$ должна удовлетворять соотношению

$$\frac{l_{21}{}^1}{l_{22}{}^1} = \frac{b_{12}{}^1u_2^{eq}}{b_{22}{}^1(u_2^{eq})^3}, \quad \Rightarrow u_2^{eq} = \pm 1$$

Очевидно, ни одно из этих значений u_2^{eq} не удовлетворяет уравнению (2.11), если силовые характеристики системы формально не связаны специальным соотношением, характеризующим неустойчивое состояние системы.

3. Покажем, что условия типа (1.8) имеют место и в случае, когда механическая система с линейным вхождением разрывных функций записана в обобщенных координатах $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Пусть на механическую систему, которая характеризуется кинематической и потенциальной энергией T и V, действуют обобщенные силы

$$Q_i = F_i(t, q, q^{\cdot}) + \sum_{\beta=1}^{m} b_{i\beta}(t, q, q^{\cdot})\, u_\beta$$

$$T = T_1 + T_2 = \sum_{i=1}^{n} a_i(q)\, q_i^{\cdot} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(q)\, q_i^{\cdot} q_j^{\cdot}$$

$$q = (q_1, \ldots, q_n), \quad q^{\cdot} = (q_1^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot})$$

$$u_\beta = \begin{cases} u_\beta^{+}, & S_\beta > 0, \\ u_\beta^{-}, & S_\beta < 0, \end{cases} \quad S_\beta = \sum_{i=1}^{n} B_{\beta i}(q)\, q_i^{\cdot} + B_\beta(q)$$

$$\beta = 1, 2, \ldots, m$$

Тогда, следуя [5, 2], заключаем, что при некоторой включенной связи $S_r = 0$ уравнения скользящего режима будут иметь вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{\cdot}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F_i^{r} + B_{ri}\lambda_r \tag{3.1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{\cdot}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F_i^{r} + b_{ir}u_r^{\text{eq}}$$

$$F_i^{r} = F_i + \sum_{\beta=1,\ \beta\neq r}^{m} b_{i\beta}u_\beta, \quad L = T - V \tag{3.2}$$

λ_r и u_r^{eq} находятся из (3.1), (3.2) совместно с уравнением $S_r' = 0$. Аналогично, как и ранее, показывается, что для совпадения уравнений (3.1) и (3.2) необходимы условия

$$B_{ri}b_{jr} = B_{rj}b_{ir}, \quad \forall i,\ j = 1,\ 2, \ldots,\ n \tag{3.3}$$

Покажем их достаточность. Запишем системы (3.1) и (3.2) в развернутой форме

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j^{\cdot\cdot} = P_i + B_{ri}\lambda_r \tag{3.4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j^{\cdot\cdot} = P_i + b_{ir}u_r^{\text{eq}} \tag{3.5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} B_{ri}q_i^{\cdot} + B_r = 0 \tag{3.6}$$

где P_i зависят только от q, $q^{\cdot}$, t.

Из (3.4), (3.6) и из (3.5), (3.6) находим

$$\lambda_r = -(D^r\Delta + \Sigma_r)\Big(\sum_{\nu, j=1}^{n} B_{r\nu}B_{rj}A_{j\nu}\Big)^{-1} \tag{3.7}$$

$$u_r^{\text{eq}} = -(D^r\Delta + \Sigma_r)\Big(\sum_{\nu, j=1}^{n} B_{r\nu}b_{jr}A_{j\nu}\Big)^{-1} \tag{3.8}$$

$$D^r = \sum_{\nu=1}^{n} \langle \nabla B_{r\nu} q^{\cdot}\rangle\, q_\nu^{\cdot} + \langle \nabla B_r q^{\cdot}\rangle$$

$$\Sigma_r = \sum_{\nu,\, j=1}^{n} B_{r\nu} P_j A_{j\nu}$$

$$\Delta = \det \| a_{ij} \|_{j=1,\,\ldots,\,n}^{i=1,\,\ldots,\,n}$$

A_{ji} — алгебраические дополнения элементов a_{ij}.

Выразим из соотношений (3.3) все b_{jr} через остальные величины и подставим в равенства (3.8). В результате получаем

$$u_r^{\text{eq}} = (B_{ri}/b_{ir})\, \lambda_r$$

что приводит к совпадению уравнений (3.1) и (3.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
2. *Уткин В. И.* Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1981. 367 с.
3. *Антонюк Е. Я.* Динамика механизмов переменной структуры. Киев: Наук. думка, 1988. 184 с.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966, 300 с.
5. *Парс Л. А.* Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971. 635 с.

Киев

Поступила в редакцию
12.II.1990