Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 1, 1991

УДК 531.35

Д. М. Климов, А. П. Маркеев, О. В. Холостова

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ УПРУГОВЯЗКОГО КОЛЬЦА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Исследуется движение тонкого однородного нерастяжимого упруговязкого кольца в центральном ньютоновском гравитационном поле на круговой орбите. Выписана приближенная нелинейная система дифференциальных уравнений, описывающая квазистатические режимы движения кольца относительно центра масс. Получено условие устойчивости в первом приближении вращения кольца в плоскости орбиты с убывающей по величине угловой скоростью. Доказана асимптотическая устойчивость относительного равновесия кольца в орбитальной системе координат, когда кольцо лежит в плоскости орбиты, и неустойчивость такого равновесия, когда плоскость кольца перпендикулярна вектору скорости центра масс.

1. Рассмотрим движение однородного нерастяжимого кругового кольца постоянного сечения в центральном ньютоновском гравитационном поле на круговой орбите. Линейные размеры поперечного сечения кольца будем считать малыми по сравнению с радиусом r его центральной линии. Обозначим через σ плотность кольца, F — площадь поперечного сечения, EI — изгибную жесткость, $m = 2\pi r F\sigma$ — массу кольца.

Пусть $Ox_1x_2x_3$ — система координат, образованная главными центральными осями инерции недеформированного кольца, ось x_3 перпендикулярна плоскости кольца. Положение элемента dm недеформированного кольца задается углом α, отсчитываемым от оси x_1.

Будем рассматривать такие движения кольца относительно центра масс, когда его упругие колебания являются изгибными колебаниями в плоскости кольца [1]. Положение элемента dm деформированного кольца зададим радиусом-вектором $\boldsymbol{\rho}$ относительно точки O, где $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\xi} + \mathbf{u}$, где $\boldsymbol{\xi} = (x_1, x_2, x_3)$, $x_1 = r\cos\alpha$, $x_2 = r\sin\alpha$, $x_3 = 0$, а $\mathbf{u}$ — упругое смещение. Вектор-функцию $\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}, t)$ будем представлять в виде ряда по ортонормированным собственным формам свободных упругих колебаний кольца. Для плоских изгибных колебаний этот ряд имеет вид [1]

$$\mathbf{u} = \sum_{n=2}^{\infty} q_n'(t)\,\mathbf{U}'^{(n)} + q_n''(t)\,\mathbf{U}''^{(n)} \tag{1.1}$$

$$\mathbf{U}'^{(n)} = \sqrt{\frac{2}{m(n^2+1)}}\left\|\begin{matrix} n\cos n\alpha\cos\alpha + \sin n\alpha\sin\alpha \\ n\cos n\alpha\sin\alpha - \sin n\alpha\cos\alpha \\ 0 \end{matrix}\right\| \tag{1.2}$$

$$\mathbf{U}''^{(n)} = \sqrt{\frac{2}{m(n^2+1)}}\left\|\begin{matrix} n\sin n\alpha\cos\alpha - \cos n\alpha\sin\alpha \\ n\sin n\alpha\sin\alpha + \cos n\alpha\cos\alpha \\ 0 \end{matrix}\right\|$$

В случае свободных колебаний величины q_n', q_n'' удовлетворяют уравнениям гармонических колебаний с частотами Ω_n, задаваемыми равенствами

$$\Omega_n^2 = \frac{EI(n^2-1)^2 n^2}{\sigma F r^4 (n^2+1)} \quad (n = 2, 3, \ldots) \tag{1.3}$$

---

[1] *Климов Д. М., Маркеев А. П.* Динамика неоднородного упругого кольца в гравитационном поле: Препринт Ин-та проблем механики АН СССР № 331. 1988. 42 с.

Силы внутреннего трения, возникающие при относительных смещениях элементов кольца, будем моделировать при помощи диссипативной функции Релея вида

$$R = \chi\beta \sum_{n=2}^{\infty} \Omega_n^2 (\dot{q}_n'^2 + \dot{q}_n''^2), \quad \beta = \text{const} > 0 \tag{1.4}$$

где χ — безразмерный параметр, точкой обозначено дифференцирование по времени.

В абсолютном пространстве положение кольца зададим при помощи орбитальной системы координат $OX_1X_2X_3$, оси X_1, X_2, X_3 которой направлены соответственно по трансверсали к орбите, по бинормали и вдоль радиуса-вектора центра масс O относительно притягивающего центра. Ориентацию связанной системы координат $Ox_1x_2x_3$ относительно $OX_1X_2X_3$ зададим при помощи углов Эйлера ψ, θ, φ.

Ранее[2] получена система уравнений движения кольца относительно центра масс, включающая уравнения движения кольца как целого (движение системы координат $Ox_1x_2x_3$ относительно орбитальной) и уравнения упругих колебаний тела в системе координат $Ox_1x_2x_3$.

Предположим, что кольцо обладает большой жесткостью, а затухание его свободных упругих колебаний происходит за время, много меньшее периода обращения центра масс по орбите. Считая последнюю величину порядка единицы, введем малый параметр ε, полагая, что величина ω_0/Ω_2 имеет порядок ε (ω_0 — среднее движение центра масс). Указанное допущение означает выполнение неравенств $0 < \chi \ll \varepsilon \ll 1$, что позволяет на интервалах времени порядка единицы и больших рассматривать только квазистатический режим движения кольца [2], соответствующий его вынужденным упругим колебаниям под действием гравитационных сил и сил инерции.

В предположении, что $\chi \sim \varepsilon^\delta$ ($1 < \delta < 2$) можно получить (см. сноску) следующую систему дифференциальных уравнений, описывающую движение кольца как целого относительно центра масс в квазистатическом режиме его упругих колебаний:

$$\begin{aligned}&\psi'' \sin\theta + \psi'\theta' \cos\theta - \psi' \sin\psi \cos\theta - \theta' \cos\psi \sin\theta - (b + \varphi')\, c = \\ &= (\mu A_1 + {}^1\!/_3 \varkappa A_2) \sin 2\theta + {}^1\!/_9\, [(3\mu B_1 - 2\varkappa B_2)\, a - 3\mu B_3' + 2\varkappa B_4']\end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned}&\theta'' + \psi' \cos\psi - 3 \sin\theta \cos\theta + (b + \varphi')\, d = \sin\theta \cos\theta\, (\mu A_3 + {}^2\!/_3 \varkappa A_4) + \\ &+ {}^1\!/_9 [(3\mu B_3 - 2\varkappa B_4)\, a + 3\mu B_1' - 2\varkappa B_2']\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}&\varphi' = -a' - {}^1\!/_9\, \varkappa\, [9\varphi' \sin^4\theta - 9 \sin^3\theta \cos\theta\, d - 3 \sin^2\theta a\, (c^2 - d^2) + \\ &+ 6cd \sin\theta \cos\theta \quad \theta' + 3 \sin\theta \cos\theta\, d\, (c^2 + d^2) - b\, (c^2 + d^2)^2]\end{aligned} \tag{1.7}$$

$$(\mu = 27\varepsilon^2\omega_0^2 / (10\lambda_2^2), \quad \varkappa = 81\chi\varepsilon^2\beta\omega_0^3 / (5\lambda_2^2))$$

В уравнениях (1.5)—(1.7) отброшены величины порядка ε^4 и выше, штрихом обозначено дифференцирование по переменной $\tau = \omega_0 t$ и приняты следующие обозначения:

$$a = \psi' \cos\theta - \cos\psi \sin\theta, \quad b = \varphi' + a \tag{1.8}$$

$$c = \theta' + \sin\psi, \quad d = \psi' \sin\theta + \cos\psi \cos\theta$$

$$A_1 = cd, \quad A_2 = 3 \sin^2\theta\varphi' - b\, (c^2 - d^2) - 3 \sin\theta \cos\theta d \tag{1.9}$$

$$A_3 = 3 \sin^2\theta + (c^2 - d^2), \quad A_4 = 2bcd - 3 \sin\theta \cos\theta\, (\theta' + c)$$

[2] *Климов Д. М., Маркеев А. П., Холостова О. В.* К динамике упруго-вязкого кольца в гравитационном поле: Препринт Ин-та проблем механики АН СССР № 406. 1989. 35 с.

$$B_1 = -c\,(3\sin^2\theta + c^2 + d^2),\quad B_2 = A_2 d + A_4 c$$
$$B_3 = d\,(c^2 + d^2 - 3\sin^2\theta),\quad B_4 = -A_2 c + A_4 d \tag{1.10}$$

В (1.5)—(1.7) и в дальнейшем введено обозначение $\Omega_2 = \varepsilon^{-1}\lambda_2$ для наименьшей частоты плоских свободных изгибных колебаний кольца. Отметим, что в квазистатических режимах движения кольца существенны лишь его плоские изгибные колебания, отвечающие наименьшей частоте Ω_2.

2. Система уравнений (1.5)—(1.7) допускает следующие частные решения:

$$\psi = \pi,\quad \theta = \pi/2,\quad \varphi' = \varphi_0' e^{-\varkappa\tau} \tag{2.1}$$

$$\psi = \pi,\quad \theta = \pi/2,\quad \varphi' = 0 \tag{2.2}$$

$$\psi = \pi/2,\quad \theta = \pi/2,\quad \varphi' = 0 \tag{2.3}$$

В случае (2.1) кольцо расположено в плоскости орбиты и вращается вокруг нормали к плоскости орбиты с уменьшающейся по величине угловой скоростью.

Решению (2.2) соответствует относительное равновесие кольца в орбитальной системе координат, когда его плоскость лежит в плоскости орбиты.

В случае (2.3) кольцо также находится в положении равновесия в орбитальной системе координат, причем плоскость кольца перпендикулярна вектору скорости центра масс (кольцо расположено в плоскости, проходящей через нормаль к плоскости орбиты и радиус-вектор центра масс кольца относительно притягивающего центра).

Ниже исследуется устойчивость движений кольца, соответствующих решениям (2.1)—(2.3).

2.1. В случае абсолютно твердого кольца ($\varepsilon = 0$) движение (2.1) устойчиво при $\varphi_0' < -2$ или $\varphi_0' > -{}^1/_2$ и неустойчиво при $-2 < \varphi_0' < -{}^1/_2$ [3, 4]. В случае упруговязкого кольца ($\varepsilon \neq 0$, $\chi \neq 0$) ограничимся исследованием устойчивости в первом приближении. Положим $\theta = \pi/2 + x$, $\psi = \pi + y$, $\varphi' = \varphi_0' e^{-\varkappa\tau} + z$. Линеаризованная система уравнений возмущенного движения будет такой:

$$x'' + 4x + 2\varphi_0' e^{-\varkappa\tau}(1-\mu)(y' + x) - {}^4/_9\,\varkappa\varphi_0' e^{-\varkappa\tau}(4\varphi_0' e^{-\varkappa\tau} + 1)(y - x') = 0 \tag{2.4}$$

$$y'' + y + 2\varphi_0' e^{-\varkappa\tau}(1+\mu)(y - x') - {}^4/_9\,\varkappa\varphi_0' e^{-\varkappa\tau}(4\varphi_0' e^{-\varkappa\tau} + 1)(x + y') = 0 \qquad z' = -\varkappa z$$

Воспользуемся теоремой Ляпунова об устойчивости движения [5]. Функцию Ляпунова V берем в виде (см. сноску на стр. 21)

$$V = {}^1/_2\,(a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 x'^2 + a_4 y'^2 + 2a_5 x'y' + 2a_6 xy + z^2) \tag{2.5}$$
$$a_1 = [2\varphi_0' e^{-\varkappa\tau} + 4 - 2\mu\,(\varphi_0' e^{-\varkappa\tau} + 4)]\,a_4,\quad a_2 = (2\varphi_0' e^{-\varkappa\tau} + 1 - 2\mu\varphi_0' e^{-\varkappa\tau})\,a_4$$
$$a_3 = (1 + 2\mu)\,a_4,\quad a_5 = a_6 = {}^2/_9\,\varkappa\,(4\varphi_0' e^{-\varkappa\tau} + 1)\,a_4$$

Ее производная V' в силу уравнений возмущенного движения (2.4) имеет вид

$$V' = {}^1/_2\,(a_1' x^2 + a_2' y^2 + b_1 x'^2 + b_2 y'^2) - \varkappa z^2$$
$$b_1 = (1 + 2\mu)\,a_4',\quad b_2 = a_4' \tag{2.6}$$

Функция $a_4(\tau)$ может быть взята произвольной, но такой, чтобы выполнялись условия $a_4 \geqslant \eta > 0$, $a_4' \leqslant 0$ ($\eta = \text{const}$). Если, кроме того, на величину φ_0' наложить ограничения, задаваемые неравенствами $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_1' < 0$, $a_2' < 0$, то функция V будет определенно положительной, а ее производная V' в силу уравнений (2.4) знакопостоянной, противоположного с V знака, и выполняются требования теоремы Ляпунова об устойчивости.

Положим, например, $a_4 = \varkappa + e^{-\tau}$. Тогда анализ указанных неравенств приводит к следующему достаточному условию устойчивости движения (2.1) при малых значениях параметров ε, χ:

$$\varphi_0' > -{}^1/_2 + {}^1/_2\,(\mu+\varkappa) \tag{2.7}$$

2.2. Для исследования устойчивости движения (2.2) положим $\theta = \pi/2 + x$, $\psi = \pi + y$, $\varphi' = z$, тогда уравнения возмущенного движения могут быть представлены в следующем виде:

$$x'' = -4x + xy^2 + 2x^2y' + xy'^2 + {}^8/_3x^3 - 2z\,(x + y' - {}^1/_2xy^2 - {}^1/_6x^3 - {}^1/_2x^2y') + {}^1/_9\,(3\mu f_1 + 2\varkappa g_1) + O_4 \tag{2.8}$$

$$y'' = -y + {}^2/_3y^3 + 2xyy' + 2z\,(-y + x' + {}^1/_6y^3 - {}^1/_2x^2y + {}^1/_2x^2x') + {}^1/_9\,(3\mu f_2 + 2\varkappa g_2) + O_4 \tag{2.9}$$

$$z' = -xy + yy' + xx' + x'y' - 2z\,(xy - xx') - 2\mu z\,(xy - xx') - {}^1/_3\varkappa\,[3z\,(1 - 2x^2) + 4x^2 - y^2 + 2x'y + 5xy' - x'^2] + O_4 \tag{2.10}$$

Здесь O_4 — совокупность членов не ниже четвертой степени относительно x, y, x', y', z, а через f_i, g_i ($i = 1, 2$) обозначены следующие полиномы третьей степени:

$$f_1 = 6z\,(x + y') + 8xy^2 + 2y^2y' - 22xyx' - 4x'yy' + 8x^3 + 18x^2y' + 12xy'^2 + 14xx'^2 + 2y'^3 + 2x'^2y'$$

$$g_1 = 6z^2\,(y - x') + 2y^3 - 9y^2x' - 19x^2y + 2yy'^2 + 4xyy' + 15x'^2y + 28x^2x' - 10xx'y' - 5x'y'^2 - 8x'^3$$

$$f_2 = 6z\,(x' - y) + 2y^3 - 6x'y^2 + 2x^2y + 4xyy' + 2yy'^2 + 6x'^2y - 8x^2x' - 10xx'y' - 2x'y'^2 - 2x'^3$$

$$g_2 = 6z^2\,(x + y') - 11xy^2 - 2y^2y' + 22xyx' + 4x'yy' - 28x^3 - 45x^2y' - 15xy'^2 - 8xx'^2 + x'^2y' - 2y'^3$$

Задача об устойчивости системы (2.8)—(2.10) принадлежит к критическому случаю одного отрицательного и двух пар чисто мнимых корней. Для решения задачи воспользуемся «принципом сведения» в теории устойчивости [5].

Сделаем в системе (2.8)—(2.10) замену переменных $z \to \xi$, уничтожающую в правой части уравнения (2.10) члены второй степени, содержащие только критические переменные x, y, x', y'. Замену переменных ищем в виде

$$z = \xi + u_{11}x^2 + 2u_{12}xy + 2u_{13}xx' + 2u_{14}xy' + u_{22}y^2 + 2u_{23}yx' + 2u_{24}yy' + u_{33}x'^2 + 2u_{34}x'y' + u_{44}y'^2 \tag{2.11}$$

После замены (2.11) уравнение (2.10) должно принять вид

$$\xi' = -2\xi\,(xy - xx') - 2\mu\xi\,(xy - xx') - \varkappa\xi\,(1 - 2x^2) + O_4 \tag{2.12}$$

Можно проверить, что величины u_{ij} удовлетворяют некоторой системе линейных уравнений. С погрешностью порядка $(\chi\varepsilon^2)^2$ решение этой системы имеет вид (см. сноску на с. 21)

$$\begin{gathered} u_{11} = \frac{1}{4}, \quad u_{12} = 0, \quad u_{13} = \frac{19}{96}\varkappa, \quad u_{14} = \frac{1}{2}, \quad u_{22} = \frac{5}{12} \\ u_{23} = 0, \quad u_{24} = \frac{1}{24}\varkappa, \quad u_{33} = -\frac{1}{16}, \quad u_{34} = \frac{1}{3}\varkappa, \quad u_{44} = -\frac{1}{12} \end{gathered} \tag{2.13}$$

После замены переменных (2.11) уравнения (2.8) и (2.9) станут такими:

$$x'' = -4x - 2\xi (x + y') + h_1 + {}^1/_3\mu F_1 + {}^2/_9\varkappa G_1 + O_4$$
$$y'' = -y + 2\xi (-y + x') + h_2 + {}^1/_3\mu F_2 + {}^2/_9\varkappa G_2 + O_4 \quad (2.14)$$

где

$$h_1 = \frac{1}{6}xy^2 - \frac{5}{6}y^2y' + \frac{13}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2y' - \frac{5}{6}xy'^2 + \frac{1}{8}xx'^2 + \frac{1}{6}y'^3 + \frac{1}{8}x'^2y' \quad (2.15)$$

$$h_2 = -\frac{1}{6}y^3 + \frac{5}{6}y^2x' - \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{6}yy'^2 + \frac{1}{8}yx'^2 + \frac{1}{2}x^2x' + 2xx'y' - \frac{1}{6}x'y'^2 - \frac{1}{8}x'^3$$

$$F_1 = 6\xi (x + y') + F_1^*, \quad G_1 = 6\xi^2 (y - x') + G_1^*$$
$$F_2 = -6\xi (y - x') + F_2^*, \quad G_2 = 6\xi^2 (x + y') + G_2^* \quad (2.16)$$

$$F_1^* = \frac{21}{2}xy^2 + \frac{9}{2}y^2y' - 22xyx' - 4yx'y' + \frac{19}{2}x^3 + \frac{51}{2}x^2y' + \frac{35}{2}xy'^2 + \frac{109}{8}xx'^2 + \frac{3}{2}y'^3 + \frac{13}{8}x'^2y'$$

$$G_1^* = 2y^3 - 9y^2x' + \frac{5}{4}yy'^2 + \frac{13}{4}xyy' + 15yx'^2 + \frac{391}{16}x^2x' - \frac{313}{16}xx'y' - 11x'y'^2 - 8x'^3$$

$$F_2^* = -\frac{1}{2}y^3 - \frac{7}{2}y^2x' + \frac{1}{2}x^2y - 2xyy' + \frac{5}{2}yy'^2 + \frac{51}{8}yx'^2 - \frac{13}{2}x^2x' - 4xx'y' - \frac{5}{2}x'y'^2 - \frac{19}{8}x'^3$$

$$G_2^* = -11xy^2 - \frac{11}{4}y^2y' + \frac{295}{16}xyx' - \frac{5}{4}yx'y' - 28x^3 - 45x^2y' - 15xy'^2 - \frac{71}{16}xx'^2 - 2y'^3 + 7x'^2y'$$

«Укороченная» система, получающаяся из уравнений (2.14), если в них положить $\xi = 0$, имеет вид

$$x'' = -4x + \varphi_1 + O_4, \quad y'' = -y + \varphi_2 + O_4 \quad (2.17)$$
$$\varphi_i = h_i + {}^1/_3\mu F_i^* + {}^2/_9\varkappa G_i^* \quad (i = 1, 2)$$

Задача об устойчивости «укороченной» системы (2.17) принадлежит к критическому случаю двух пар чисто мнимых корней. Для ее решения используем алгоритм Каменкова [6]. Сначала нужно получить нормальную форму [7] системы (2.17) до членов третьей степени включительно, а затем перейти к полярным координатам ρ_i, θ_i $(i = 1, 2)$. При отсутствии резонансов 1 : 2 и 1 : 3 условия устойчивости выражаются через коэффициенты правых частей уравнений для ρ_1, ρ_2.

Так как в (2.17) нет членов второй степени, то имеющийся в рассматриваемой задаче резонанс 1 : 2 не влияет на структуру нормальной формы и уравнения для ρ_1, ρ_2 можно получить следующим образом. Сделаем замену переменных $x, y, x', y' \to \rho_1, \rho_2, \theta_1, \theta_2$ по формулам $y = \rho_1 \cos\theta_1$, $y' = -\rho_1 \sin\theta_1$, $x = \rho_2 \cos\theta_2$, $x' = -2\rho_2 \sin\theta_2$.

Если в системе (2.17) отбросить члены O_4, то в новых переменных она запишется в виде

$$\rho_1' = -\varphi_2 \sin\theta_1, \quad \rho_2' = -{}^1/_2\varphi_1 \sin\theta_2, \quad \theta_1' = 1 - \rho_1^{-1}\varphi_2 \cos\theta_1, \quad \theta_2' = 2 - {}^1/_2\rho_2^{-1}\varphi_1 \cos\theta_2 \quad (2.18)$$

Усреднив правые части первых двух уравнений (2.18) по θ_1 и θ_2, получим искомые уравнения для ρ_1, ρ_2:

$$\zeta_i' = \zeta_i (c_{i1}\zeta_1 + c_{i2}\zeta_2) \quad (i = 1, 2) \tag{2.19}$$

$$(\zeta_i = \rho_i^2, \quad c_{11} = -35\varkappa/72, \quad c_{12} = -17\varkappa/9, \quad c_{21} = -20\varkappa/9$$
$$c_{22} = -1145\varkappa/288)$$

Согласно критерию Каменкова, «укороченная» система (2.17) асимптотически устойчива и этот вывод не зависит от членов выше третьей степени в ее правых частях. А так как разложение в ряд правой части уравнения (2.12), вычисленной при $\xi = 0$, начинается с членов не ниже четвертой степени, то на основании «принципа сведения» можно сделать вывод об асимптотической устойчивости полной системы (2.8)—(2.10) и рассматриваемого движения (2.2).

Отметим, что в случае абсолютно твердого кольца движение (2.2) просто устойчиво по Ляпунову [3, 8].

2.3. Для исследования устойчивости движения, отвечающего решению (2.3), положим $\theta = \frac{\pi}{2} + x$, $\psi = \frac{\pi}{2} + y$, $\varphi' = z$. Линеаризованная система уравнений возмущенного движения будет такой:

$$\begin{gathered} x'' + 3\,(1 - {}^2/_3\mu)\,x + {}^2/_3\varkappa x' = 0 \\ y'' - (1 - {}^2/_3\mu)\,y - {}^2/_3\varkappa y' - (2 + {}^2/_9\varkappa)\,z = 0 \\ z' + y' + {}^4/_9\varkappa\,(2z - y) = 0 \end{gathered} \tag{2.20}$$

Характеристическое уравнение системы (2.20) имеет две пары комплексно-сопряженных корней

$$\lambda_{1,2} = -{}^1/_3\varkappa \pm i\sqrt{3}\,(1 - {}^1/_3\mu) + O(\varepsilon^4), \quad \lambda_{3,4} = -\varkappa \pm i\,(1 + \mu) + O(\varepsilon^4)$$

и один вещественный положительный корень

$$\lambda_5 = 16/9\varkappa + O(\varepsilon^4)$$

поэтому рассматриваемое относительное равновесие кольца неустойчиво.

Отметим, что в случае абсолютно твердого кольца ($\varepsilon = 0$) решение (2.3) отвечает частному случаю гиперболоидальной прецессии, которая устойчива по Ляпунову [8] и это следует из знакоопределенности интеграла энергии в окрестности решения (2.3). Наличие внутренней вязкости ($\chi \neq 0$) в материале упругого кольца ($\varepsilon \neq 0$) разрушило эту устойчивость до неустойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
2. *Маркеев А. П.* К динамике упругого тела в гравитационном поле // Космич. исследования. 1989. Т. 27. Вып. 2. С. 163—175.
3. *Черноусько Ф. Л.* Об устойчивости регулярной прецессии спутника // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 1. С. 155—157.
4. *Маркеев А. П.* Резонансные эффекты и устойчивость стационарных вращений спутника // Космич. исследования. 1967. Т. 5. № 3. С. 363—375.
5. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
6. *Каменков Г. В.* Избранные труды. Т. 2. М.: Наука, 1972. 214 с.
7. *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
8. *Белецкий В. В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.

Москва

Поступила в редакцию
19.III.1990