УДК 532.5 : 534



А. Г. Горшков, Д. В. Тарлаковский, А. М. Шукуров

# РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ОТ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ В АКУСТИЧЕСКОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Рассматривается распространение нестационарной акустической волны давления от сферической полости, расположенной в полупространстве, заполненном идеальной сжимаемой жидкостью. В пространстве изображений преобразования Лапласа получена бесконечная система алгебраических уравнений, решение которой определяется в виде ряда по экспонентам.

Для задачи подобного рода была получена [1] бесконечная система интегральных уравнений Вольтерры второго рода в пространстве оригиналов, которая решалась численно.

**1. Постановка задачи.** Пусть в акустическом полупространстве $z \geqslant 0$ на расстоянии $h$ от свободной границы $z = 0$ расположен центр $O$ сферической полости радиуса $R$ $(h > R)$, в который поместим начало сферической системы координат $r$, $\theta$, $\vartheta$. К поверхности полости приложено давление $p_1$. Потенциал скорости акустической среды $\varphi$ при учете осевой симметрии задачи удовлетворяет волновому уравнению и соответствующим граничным условиям на свободной границе и поверхности полости

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2} = \Delta\varphi; \quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right|_{z=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right|_{r=1} = -p_1(\tau, \theta) \tag{1.1}$$

В начальный момент времени $\tau = 0$ среда находится в состоянии покоя

$$\varphi|_{\tau=0} = \partial\varphi/\partial\tau|_{\tau=0} = 0 \tag{1.2}$$

Использованы следующие безразмерные величины:

$$r = \frac{r'}{R}, \quad h = \frac{h'}{R}, \quad p = \frac{p'}{\rho c^2}, \quad \tau = \frac{ct}{R}, \quad \varphi = \frac{\varphi'}{cR}$$

где штрихом обозначены размерные величины, $t$ — время, $\rho$ и $c$ — плотность и скорость распространения звука в акустической среде.

**2. Метод решения.** К начально-краевой задаче (1.1), (1.2) применим интегральное преобразование Лапласа по времени $\tau$ ($L$ — трансформанта Лапласа, $s$ — параметр преобразования). В пространстве изображений потенциал скорости представим в виде:

$$\varphi^L = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{r}} A_n^L(s) K_{n+1/2}(sr) P_n(\cos\theta) + \frac{1}{\sqrt{r_1}} B_n^L(s) K_{n+1/2}(sr_1) P_n(\cos\theta_1)\right] \tag{2.1}$$

где $K_{n+1/2}(x)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода, $P_n(x)$ — полиномы Лежандра, $A_n^L(s)$ и $B_n^L(s)$ — неизвестные функции, которые определяются из граничных условий, $r_1$, $\theta_1$ — координаты сферической системы координат с центром в точке $O_1$, симметричной точке $O$ относительно границы полупространства $z = 0$ (фигура).

Учитывая соотношения

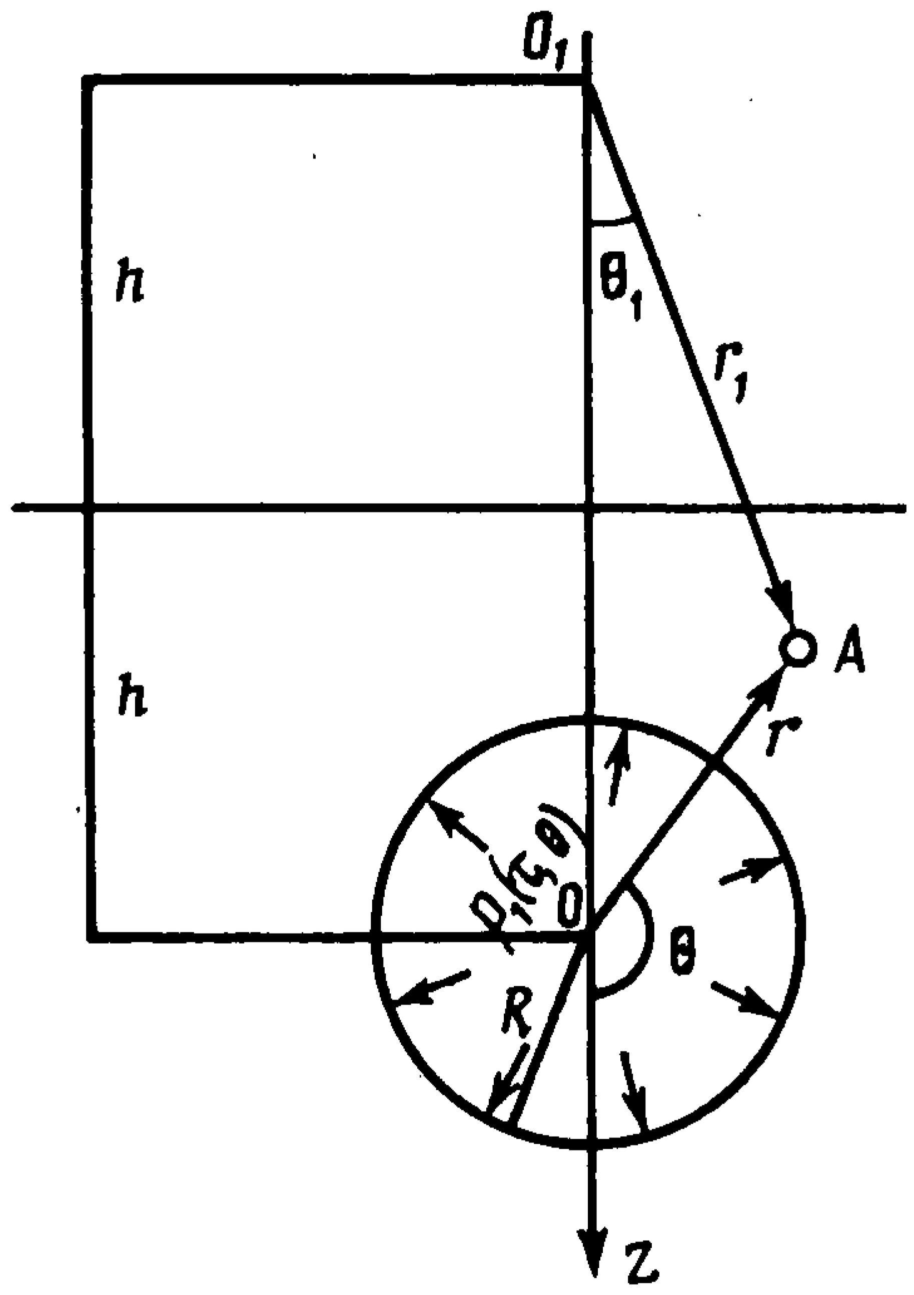
$$\begin{gathered} r|_{z=0} = r_1|_{z=0}, \quad \theta|_{z=0} + \theta_1|_{z=0} = \pi \\ (-1)^n P_n(\cos\theta)|_{z=0} = P_n(\cos\theta_1)|_{z=0} \end{gathered} \tag{2.2}$$

и удовлетворяя первому граничному условию в (1.1), получим зависимость

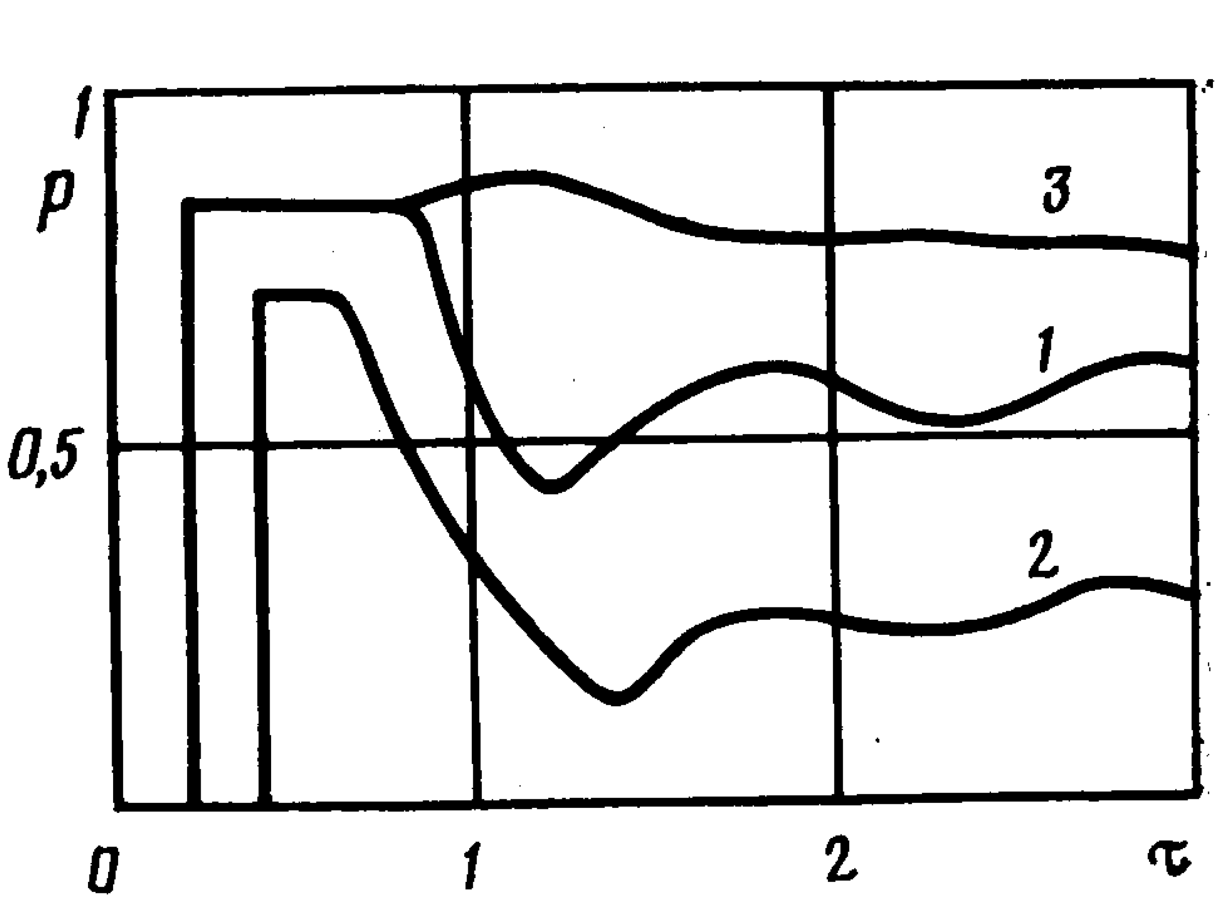
$$B_n^L(s) = (-1)^{n+1} A_n^L(s) \tag{2.3}$$

Используя теорему сложения для функций $K_{n+1/2}(x)$ [2], представим потенциал $\varphi^L$ следующим образом:

$$\varphi^L = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{r}}\left[A_n^L(s) K_{n+1/2}(sr) + (-1)^n (2n+1) I_{n+1/2}(sr) \times \right.$$
$$\left. \times \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+1} A_p^L(s) \sum_{\sigma=|p-n|}^{p+n} b_\sigma^{(n0p0)} \sqrt{\frac{\pi}{4hs}} K_{\sigma+1/2}(2hs)\right] P_n(\cos\theta) \tag{2.4}$$




Фиг. 1




Фиг. 2

где $b_{\sigma}^{(n0p0)}$ — коэффициенты Клебша — Гордона [2]; $I_{n+1/2}(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода.

Раскладывая изображение заданного давления $p_1^L(s, \theta)$ в ряд по полиномам Лежандра с коэффициентами $p_{n1}^L(s)$ и подставляя выражение (2.4) во второе граничное условие (1.1), получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно $A_n^L(s)$

$$M_n(s) D_n^L(s) e^{-2s} + \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(1)}(s) D_p^L(s) e^{-2hs} + \\ + \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(2)}(s) D_p^L(s) e^{-2hs} e^{-2s} = -\frac{p_{n_1}^L(s)}{s} e^{-s} \tag{2.5}$$

$$M_n(s) = \frac{R_{n0}(s)}{s^n}, \qquad D_n^L(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2s}} A_n^L(s)$$

$$C_{np}^{(1)}(s) = (-1)^{p+1}(2n+1)\frac{R_{n0}(-s)}{4hs^{n+1}} \sum_{\sigma=|p-n|}^{p+n} b_{\sigma}^{(n0p0)} \frac{R_{\sigma 0}(2hs)}{(2hs)^{\sigma}}$$

$$C_{np}^{(2)}(s) = (-1)^{p}(2n+1)\frac{R_{n0}(s)}{4hs^{n+1}} \sum_{\sigma=|p-n|}^{p+n} b_{\sigma}^{(n0p0)} \frac{R_{\sigma 0}(2hs)}{(2hs)^{\sigma}}$$

$$R_{m0}(s) = \sum_{k=0}^{m} A_{mk} s^{m-k}, \qquad A_{mk} = \frac{(m+k)!}{(m-k)!\,k!\,2^k}$$

При построении системы уравнений (2.5) учтена связь функции $K_{n+1/2}(x)$ и $I_{n+1/2}(x)$ с элементарными функциями [3].

Обозначая $X = e^{-2hs}$ и $Y = e^{-s}$, бесконечную систему алгебраических уравнений (2.5) запишем в матричном виде

$$\mathbf{M}\mathbf{D}Y^2 + \mathbf{C}^{(1)}\mathbf{D}X + \mathbf{C}^{(2)}\mathbf{D}XY^2 = -\mathbf{P}_1 Y \tag{2.6}$$

где $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$ — бесконечные матрицы соответственно с элементами $C_{np}^{(1)}(s)$, $C_{np}^{(2)}(s)$; $\mathbf{M}$ — бесконечная диагональная матрица с элементами $M_n(s)$; $\mathbf{P}_1$ — бесконечный вектор с элементами $p_{n1}^L(s)/s$; $\mathbf{D}$ — бесконечный неизвестный вектор с элементами $D_n^L(s)$.

Решение матричного уравнения (2.6) представим в виде ряда по экспонентам

$$\mathbf{D} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{d}_{ij}(s) X^i Y^{-j} \tag{2.7}$$

где $\mathbf{d}_{ij}(s)$ — бесконечный вектор с элементами $d_{ij}^{(n)}(s)$.

Отметим, что для конечного времени τ ряд (2.7) обращается в конечную сумму.

Подставляя выражение (2.7) в уравнение (2.6) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $X$ и $Y$, получим рекуррентные соотношения

$$\mathbf{M}\mathbf{d}_{0,1} = -\mathbf{P}_1, \quad \mathbf{M}\mathbf{d}_{i,1} + \mathbf{C}^{(2)}\mathbf{d}_{i-1,1} = 0 \quad (i \geqslant 1)$$
$$\mathbf{d}_{0,2} = 0, \quad \mathbf{M}\mathbf{d}_{i,2} + \mathbf{C}^{(2)}\mathbf{d}_{i-1,2} = 0 \quad (i \geqslant 1) \tag{2.8}$$
$$\mathbf{d}_{0,j+2} = 0 \quad (j \geqslant 1), \quad \mathbf{M}\mathbf{d}_{i,j+2} + \mathbf{C}^{(1)}\mathbf{d}_{i-1,j} + \mathbf{C}^{2}\mathbf{d}_{i-1,j+2} = 0 \quad (i \geqslant 1, \quad j \geqslant 1)$$

позволяющие определить все элементы $d_{ij}^{(n)}(s)$ столбцов $\mathbf{d}_{ij}(s)$ в виде рациональных функций. Тогда в пространстве изображений найдем следующее выражение для давления в среде:

$$p_n^L(r, s) = \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \Big[ sM_n(sr)\, d_{ij}^{(n)}(s)\, e^{-2hsi} e^{-(r-j)s} +$$
$$+ \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{n+1} sM_n(-sr)\, C_{np}(s)\, d_{ij}^{(p)}(s)\, e^{-2hs(i+1)}\, e^{-(r+j)s} +$$
$$+ \sum_{p=0}^{\infty} sM_n(sr)\, C_{np}(s)\, d_{ij}^{(p)}(s)\, e^{-2hs(i+1)}\, e^{-(r-j)s} \Big] \tag{2.9}$$
$$C_{np}(s) = \frac{(-1)^p (2n+1)}{4hs} \sum_{\sigma=|p-n|}^{p+n} b_\sigma^{(n0p0)} \frac{R_{\sigma 0}(2hs)}{(2hs)^\sigma}$$

Коэффициенты при экспонентах в формуле (2.9) — рациональные функции параметра преобразования $s$, что позволяет достаточно просто вычислить их оригиналы, и, следовательно, найти оригиналы коэффициентов соответствующих рядов.

Отметим, что предлагаемый подход может быть без принципиальных изменений применен к аналогичной задаче с заданной на границе полости скорости (изменяется второе граничное условие в (1.1)), к задаче о дифракции плоских волн на полости, неподвижном или подвижном абсолютно-жестком шаре, а также к соответствующим задачам для упругого полупространства.

При практической реализации алгоритма используется метод редукции для бесконечных матричных уравнений (2.8). Столбцы $\mathbf{d}_{ij}$ и матрицы $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}^{(1)}$ и $\mathbf{C}^{(2)}$ заменяются конечными столбцами и матрицами размером $N \times 1$ и $N \times N$. При этом в выражении (2.9) вместо рядов по индексу $p$ используются соответствующие частичные суммы.

*Пример.* Рассмотрим случай равномерно распределенного по поверхности полости давления: $p_1(\tau, \theta) = p_0 H(\tau)$ где $H(\tau)$ — функция Хевисайда. На фиг. 2 приведена зависимость давления $p$ от времени $\tau$ при $h = 1{,}5$, $p_0 = 1$ в трех точках: $r = 1{,}2$, $\theta = \pi$ (кривая *1*), $r = 1{,}4$, $\theta = \pi$ (кривая *2*) и $r = 1{,}2$, $\theta = \pi/2$ (кривая *3*).

При вычислениях удерживалось четыре члена ряда по полиномам Лежандра. Это ограничение обеспечивает достаточную точность результатов, так как полученная сумма для давления отличается от точного значения при $\tau \geqslant 1{,}8$ приблизительно на 7%.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Кубенко В. Д., Бабаев А. Э., Годенко В. П.* Взаимодействие нестационарной волны давления с жесткой сферой, расположенной вблизи свободной поверхности // Гидромеханика. Киев: Наук. думка, 1988. Т. 57. С. 10—15.
2. *Иванов Е. А.* Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
3. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. *М. Абрамовица* и *И. Стиган*. М.: Наука, 1979. 830 с.



Москва

Поступила в редакцию 28.V.1990