УДК 532.5

Р. Н. Бахтизин, Р. К. Мухамедшин

ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ В ТРУБАХ

Рассматривается подход для получения частных решений уравнения ламинарного течения неньютоновских жидкостей в трубах на основании группового анализа дифференциальных уравнений. Приводятся инвариантные решения относительно точечных и касательных преобразований, удовлетворяющие естественным граничным условиям.

1. Задача о нестационарном ламинарном течении вязкой несжимаемой жидкости по цилиндрической трубе может быть сформулирована в виде следующего уравнения для скорости потока w:

$$w_t = \nu\,(w_{rr} + r^{-1}w_r) + \rho^{-1}f\,(t)$$

где $-\partial p/\partial z = f\,(t)$ — заданный закон изменения перепада давления; ρ, ν — соответственно плотность и кинематическая вязкость жидкости. Это уравнение исследовано многими авторами [1—3] при различных законах зависимости перепада давления от времени.

Для жидкостей, обладающих неньютоновскими свойствами [4], аналогичная задача формулируется следующим образом:

$$w_t = \Phi'\,(w_r)\,w_{rr} + r^{-1}\Phi\,(w_r) + \rho^{-1}f\,(t) \tag{1.1}$$

где Φ — функция, характеризующая закон трения неньютоновской жидкости.

Заменой

$$w = u + \frac{1}{\rho}\int\limits_0^t f\,(t)\,dt$$

уравнение (1.1) сводится к уравнению

$$u_t = \Phi'\,(u_r)\,u_{rr} + r^{-1}\Phi\,(u_r) \tag{1.2}$$

Цель работы — получение некоторых частных решений уравнения (1.2), а следовательно (1.1), путем исследования групповых свойств этого уравнения [5].

2. В случае произвольной зависимости $\Phi = \Phi\,(u_r)$ уравнение (1.2) допускает трехмерную алгебру L_3 инфинитезимальных операторов с базисом $X_1 = \partial/\partial t$, $X_2 = \partial/\partial u$, отвечающим сдвигам по t и u, и $X_3 = r\partial/\partial r + 2t\partial/\partial t + u\partial/\partial u$, соответствующего автомодельному решению.

Групповая классификация уравнения (1.2) по функции Φ (с точностью до преобразований эквивалентности [5]) приводит к следующему результату. Расширение алгебры L_3 происходит только при таких специализациях $\Phi\,(u_r)$ (случаи $\Phi' \equiv 0$, $\Phi' \equiv 1$ исключаются):

1) $\Phi\,(u_r) = \exp\,(u_r)$; дополнительный базисный оператор

$$X_4 = r\partial/\partial r + (u + 2r)\,\partial/\partial u$$

2) $\Phi\,(u_r) = u_r^{\lambda}$; дополнительный базисный оператор

$$X_5 = (\lambda - 1)\,r\partial/\partial r + (\lambda + 1)\,u\partial/\partial u$$

3) $\Phi\,(u_r) = u_r^{-1}$. Получаем бесконечномерную группу, содержащую помимо X_1, X_2, X_3, X_5 (при $\lambda = -1$) дополнительные операторы

$$X_6 = 8t^2\partial/\partial t + r\,(u^2 - 2t)\,\partial/\partial r + 8ut\partial/\partial u$$

$$X_7 = ru\partial/\partial r + 4t\partial/\partial u,\quad X_\infty = \omega r^{-1}\partial/\partial r$$

где функция ω удовлетворяет уравнению $\omega_t + \omega_{uu} = 0$.

Рассмотрим инвариантные решения уравнения (1.2), связанные с появлением указанных дополнительных симметрий и отвечающие естественным граничным условиям

$$w\,|_{r=R} = 0,\quad w_r\,|_{r=0} = 0 \tag{2.1}$$

где R — радиус трубы (в дальнейшем полагаем $R = 1$).

Рассмотрим инвариантное решение для оператора

$$X_5 + \alpha X_3 = \delta r\partial/\partial r + 2\alpha t\partial/\partial t + \sigma u\partial/\partial u$$
$$\delta = \lambda + \alpha - 1, \quad \sigma = \lambda + \alpha + 1$$

При $\alpha = 0$ получаем решение в виде

$$w = \beta\,(1 - r^{\gamma})\,(t_0 - t)^{1/(1-\lambda)}, \quad \beta = (\gamma\,(3\lambda - 1))^{1/(1-\lambda)}, \quad \gamma = (\lambda + 1)/(\lambda - 1)$$

которое соответствует $f(t) = \rho\,(\lambda - 1)^{-1}\,(t_0 - t)^{-\lambda/(\lambda-1)}$, удовлетворяет при $\lambda > 1$ условиям (2.1) и описывает режим с обострением.

При $\alpha \neq 0$ инвариантное решение записывается в виде

$$u = t^{{}^1/_2\sigma/\alpha}\varphi(\xi), \quad \xi = rt^{-{}^1/_2\sigma/\alpha}$$

где φ удовлетворяет соответствующему дифференциальному уравнению. При $\alpha = -\lambda - 1$ оно интегрируется в квадратурах, и решение, удовлетворяющее условиям (2.1) (при $\lambda < 0$), записывается в виде

$$w = \int\limits_{rt^{-1/(1+\lambda)}}^{t^{-1/(1+\lambda)}} \xi^{-1/\lambda}\left(\frac{1-\lambda}{(1+\lambda)(3\lambda+1)}\,\xi^{(3\lambda-1)/\lambda} + \xi_0\right)d\xi$$

и соответствует режиму

$$f(t) = \rho t^{1/[\lambda(\lambda+1)]}\left(\frac{1-\lambda}{(1+\lambda)(3\lambda-1)}\,t^{(1-3\lambda)/[\lambda(\lambda+1)]}\right)^{1/(\lambda-1)}$$

При $\Phi(u_r) = u_r^{-1}$ уравнение (1.2) заменой $x = r^2$ сводится к уравнению

$$u_t = (1/u_x)_x \tag{2.2}$$

которое заменой $x_1 = u$, $u_1 = x$ переводится в линейное уравнение теплопроводности [6, 7]. Однако из решений этого уравнения затруднительно получение и исследование решения уравнения (1.1), удовлетворяющего условиям (2.1).

Если ввести функцию $v = u_x$, то для нее дифференцированием (2.2) по x получим уравнение, которое обладает автомодельным решением (функция φ имеет параметрическое представление):

$$v = {}^1/_2\sqrt{2}\xi\varphi(\ln\xi), \quad \xi = xt^{-{}^1/_2} \tag{2.3}$$

$$\varphi = \frac{1}{s - F(s)}, \quad \xi = \exp\int\limits_{s_2}^{s}\frac{(F'(s) - 1)\,ds}{(s - F(s))(sF(s) - F^2(s) - 1)}$$

$$F(s) = \exp\left(\frac{s}{2}\right)^2\left(\int\limits_{s_0}^{s}\exp\left(\frac{\tau^2}{2}\right)d\tau + s_1\right)^{-1}$$

Тогда решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям (2.1), можно представить посредством (2.3) в виде

$$w = \sqrt{t}\int\limits_{\ln r^2t^{-1/2}}^{\ln t^{-1/2}}\frac{dz}{\varphi(z)} \tag{2.4}$$

Решение уравнения (1.2), соответствующее (2.4), уже не инвариантно относительно точечных преобразований, но будет инвариантным относительно некоторого касательного преобразования [6].

3. Приведем прием построения некоторых касательных симметрий для уравнения (1.2), рассмотренный в [8].

Дифференцируя уравнение (1.2) и вводя новую функцию $v = u_r$, получим уравнение

$$v_t = (r^{-1}\,(r\Phi\,(v))_r)_r \tag{3.1}$$

Групповая классификация уравнения (3.1) относительно точечных преобразований приводит к следующему результату. Если $\Phi(v)$ — произвольная функция, то уравнение (3.1) допускает двумерную алгебру с базисом $Y_1 = \partial/\partial t$, $Y_2 = 2t\partial/\partial t + r\partial/\partial r$. Расширение этой алгебры происходит при таких специализациях $\Phi(v)$ (случаи $\Phi' \equiv 0$, $\Phi' \equiv 1$ исключаются):

1) $\Phi(v) = e^v$; дополнительный оператор

$$Y_3 = r\partial/\partial r + 2\partial/\partial v$$

2) $\Phi(v) = v^{\lambda}$; дополнительный оператор

$$Y_4 = (\lambda - 1)\, r\partial/\partial r + 2v\partial/\partial v$$

3) $\Phi(v) = v^{-1/5}$; дополнительные операторы

$$Y_4, Y_5 = r^3\partial/\partial r - 5r^2 v\partial/\partial v$$

4) $\Phi(v) = v^{-1}$; дополнительные операторы

$$Y_4, Y_6 = r^{-1}\partial/\partial r + vr^{-2}\partial/\partial v$$

Операторы $Y_3, \ldots, Y_6$ ассоциируют для уравнения (1.2) операторы касательной симметрии и позволяют строить соответствующие им инвариантные решения.

В частности, при $\Phi(u_r) = u_r^{-1/5}$ инвариантное решение, соответствующее оператору, ассоциированному $Y_2 + {}^5/_6 Y_4 + Y_5$, может быть записано в виде

$$w = \int\limits_r^1 r \exp\left(\frac{1}{6r^2}\right) F\left(t^{1/2} \exp\left(\frac{1}{6r^2}\right)\right)^{-5} dr$$

где $F(z)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$2z^2F'' + 6zF' + 15F^{-6}z^{-5}F' + 18F = 0 \tag{3.2}$$

а оператору $Y_2 + Y_5$ соответствует решение

$$w = \int\limits_r^1 (r^2+1)^{-5/2} G^{-5}\left(\frac{r^2}{(r^2+1)\,t}\right) dr$$

где $G(z)$ удовлетворяет уравнению

$$4z^2G'' + 4zG' + 5z^2G^{-6}G' - G = 0 \tag{3.3}$$

В уравнениях (3.2), (3.3) введением новых функций

$$F(z) = z^{-1}\varphi(\ln z), \quad G(z) = z^{1/6}\psi(\ln z)$$

можно понизить порядок и исследовать их методами качественной теории дифференциальных уравнений.

Следует отметить, что уравнение (1.2) используется при описании плоско-радиальной фильтрации неньютоновских сред [9]. Поэтому полученные результаты могут иметь и фильтрационную интерпретацию.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Громека И. С.* К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубах // Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1952. С. 149—171.
2. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
3. *Лямбоси П.* Вынужденные колебания несжимаемой вязкой жидкости в жесткой горизонтальной трубе // Механика. 1953. вып. 3. С. 67—77.
4. *Уилкинсон У. Л.* Неньютоновские жидкости. М.: Мир, 1964. 216 с.
5. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1980. 399 с.
6. *Ибрагимов Н. Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1980. 283 с.
7. *Ахатов И. Ш., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х.* Групповая классификация уравнений нелинейной фильтрации // Докл. АН СССР. 1987. т. 293. № 5. С. 1033—1035.
8. *Ахатов И. Ш., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х.* Преобразования Беклунда и нелокальные симметрии // Докл. АН СССР. 1987. т. 297. № 1. С. 11—14.
9. *Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.* Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 288 с.

Уфа

Поступила в редакцию
11.IV.1989