Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 1, 1991

УДК 531.36

С. А. Агафонов, К. Б. Алексеев, Н. В. Николаев

К УСТОЙЧИВОСТИ УПРАВЛЕНИЯ ПЛОСКИМ РАЗВОРОТОМ КОСМИЧЕСКОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

Рассматривается метод экстенсивного управления по замкнутой схеме и обосновывается возможность построения стабилизирующего момента, обеспечивающего асимптотическую устойчивость программного движения аппарата.

Способ переориентации покоящегося несимметричного летательного аппарата путем одного плоского разворота относительно неподвижной оси, названный экстенсивным [1], позволяет получить выигрыш в быстродействии и энергозатратах. В работах [2—4] были решены задачи построения оптимальных программных управлений на основе данного способа для различных целевых функционалов. Однако неустойчивость полученных программных решений снижает их практическую ценность.

1. Введем две системы координат с общим началом в центре масс аппарата: инерциальную $X_1X_2X_3$ и жестко связанную с аппаратом $x_1x_2x_3$. Предполагается, что в момент начала разворота ($t = 0$) одноименные оси систем совпадают, а требуемая переориентация аппарата осуществляется его поворотом вокруг оси, направление которой задано единичным вектором

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{3} \nu_k e_k = \sum_{k=1}^{3} \nu_k i_k$$

где ν_k — направляющие косинусы, e_k и i_k — орты осей X_k и x_k, на заданный угол $\varphi_0 \leqslant \pi$. Движение аппарата относительно центра масс описывается уравнениями Эйлера, которые при совмещении осей x_k ($k = 1, 2, 3$) с главными осями инерции имеют вид

$$I_1\omega_1' + (I_3 - I_2)\,\omega_2\omega_3 = M_1 \qquad (1\ 2\ 3) \tag{1.1}$$

Здесь I_k — главные моменты инерции аппарата, ω_k и M_k проекции векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{M}$ соответственно угловой скорости и внешнего момента сил на оси x_k ($k = 1, 2, 3$); штрихом обозначены производные по времени. Кинематические уравнения при использовании для определения ориентации параметров Родрига — Гамильтона [5] имеют вид

$$\begin{gathered} 2\lambda_0' = -\omega_1\lambda_1 - \omega_2\lambda_2 - \omega_3\lambda_3 \\ 2\lambda_1' = \omega_1\lambda_0 + \omega_3\lambda_2 - \omega_2\lambda_3 \qquad (1\ 2\ 3) \end{gathered} \tag{1.2}$$

Уравнения (1.1) и (1.2) образуют полную систему уравнений для решения задачи управления разворотом космического аппарата.

Программное управление по разомкнутой схеме выполняется в предположении, что вектор угловой скорости аппарата совпадает с заданным направлением оси $\mathbf{v}$:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{v} = \varphi'\mathbf{v} \tag{1.3}$$

где $\omega(t)$ — величина угловой скорости, $\varphi(t)$ — величина угла поворота в момент времени t. С учетом (1.3) получаем следующее выражение для вектора программного управляющего момента сил:

$$J_\alpha\varphi''\mathbf{e}_\alpha + J_\beta\varphi'^2\mathbf{e}_\beta = \mathbf{M} \tag{1.4}$$

Введенные здесь единичные векторы $\mathbf{e}_\alpha$ и $\mathbf{e}_\beta$, а также параметры J_α и J_β определяются через тензор инерции $\mathbf{I}$ следующим образом:

$$J_\alpha = |\mathbf{I}\mathbf{v}|, \quad J_\beta = |\mathbf{v}\times\mathbf{I}\mathbf{v}|, \quad \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{I}\mathbf{v}/J_\alpha, \quad \mathbf{e}_\beta = \mathbf{v}\times\mathbf{I}\mathbf{v}/J_\beta$$

Таким образом, если известна функция $\varphi(t)$ программного изменения угла поворота, то вектор управляющего момента сил определяется из (1.4).

2. Программное вращательное движение аппарата неустойчиво по отношению к начальным возмущениям, поэтому управление плоским разворотом должно выполняться по замкнутой схеме. При наличии внешней информации о текущем угловом положении и угловой скорости аппарата в основу построения такого управления может быть положено сравнение программного и действительного движений. Основной задачей в этом случае является выбор технически реализуемой структуры стабилизирующего момента, исходя из требования обеспечения асимптотической устойчивости программного движения. Для решения этой задачи обозначим параметры действительного движения аппарата через $\boldsymbol{\omega}^*(t)$, $\Lambda^*(t)$, тогда

$$\begin{gathered}\omega_k{}^* = \omega_k(t) + \Omega_k, \quad \omega_k(t) = \omega(t)\nu_k\\ \Lambda^* = (\lambda_0{}^*, \lambda_1{}^*, \lambda_2{}^*, \lambda_3{}^*), \quad \lambda_0{}^* = \lambda_0 + \xi_0\\ \lambda_k{}^* = \lambda_k + \xi_k, \quad \mathrm{M}_k{}^* = \mathrm{M}_k + m_k, \quad k = 1, 2, 3\end{gathered} \tag{2.1}$$

где Ω_k, ξ_0, ξ_k — возмущения, ω_k, λ_0, λ_k, M_k — программные значения компонентов угловой скорости, кватерниона и управляющего момента, m_k $(k = 1, 2, 3)$ — компоненты искомого стабилизирующего момента сил. Подставляя выражения (2.1) в уравнения (1.1), (1.2), получим уравнения возмущенного движения

$$\begin{gathered}I_1\Omega_1' + (I_3 - I_2)(\omega\nu_3\Omega_2 + \omega\nu_2\Omega_3 + \Omega_2\Omega_3) = m_1 \quad (1\ 2\ 3)\\ 2\xi_0' = -\nu_1\Omega_1\sin\frac{\varphi}{2} - \nu_2\Omega_2\sin\frac{\varphi}{2} - \nu_3\Omega_3\sin\frac{\varphi}{2} - \omega(\nu_1\xi_1 + \nu_2\xi_2 + \nu_3\xi_3) -\\ - \Omega_1\xi_1 - \Omega_2\xi_2 - \Omega_3\xi_3\\ 2\xi_1' = \Omega_1\cos\frac{\varphi}{2} + \nu_2\Omega_3\sin\frac{\varphi}{2} - \nu_3\Omega_2\sin\frac{\varphi}{2} + \omega(\nu_1\xi_0 + \nu_3\xi_2 - \nu_2\xi_3) +\\ + \Omega_1\xi_0 + \Omega_3\xi_2 - \Omega_2\xi_3 \quad (1\ 2\ 3)\end{gathered} \tag{2.2}$$

Компоненты стабилизирующего момента сил примем в виде линейных функций от возмущений кинематических параметров

$$m_k = -\gamma\theta_k - \delta_k\Omega_k \quad (k = 1, 2, 3) \tag{2.3}$$

где γ, δ_k — положительные постоянные, θ_k — угловое отклонение программного движения от действительного. Возмущение углового положения $\theta = \theta_1 i_1 + \theta_2 i_2 + \theta_3 i_3$ выразим при помощи кватернионов программного Λ и возмущенного $\Delta^* - \Lambda$ движений векторной частью их кватернионного произведения

$$\theta = \mathrm{vect}\,(\Lambda_1 - \Lambda_2) \circ \Lambda \tag{2.4}$$

где Λ_1 и Λ_2 — кватернионы, сопряженные соответственно Λ и Λ^*. При учете соотношений (2.1) находим θ и после подстановки значений θ_k в равенство (2.3) получим выражения для стабилизирующих моментов:

$$m_1 = -\gamma\left(-\nu_1\xi_0\sin\frac{\varphi}{2} - \xi_1\cos\frac{\varphi}{2} + \nu_3\xi_2\sin\frac{\varphi}{2} - \nu_2\xi_3\sin\frac{\varphi}{2}\right) - \delta_1\Omega_1 \quad (1\ 2\ 3) \tag{2.5}$$

Рассмотрим положительно определенную функцию

$$V = (I_1\Omega_1{}^2 + I_2\Omega_2{}^2 + I_3\Omega_3{}^2)/2 + \gamma(\xi_0{}^2 + \xi_1{}^2 + \xi_2{}^2 + \xi_3{}^2) \tag{2.6}$$

Производная по времени от функции (2.6) в силу системы (2.2) при учете выражений (2.5) имеет вид

$$\begin{gathered}V' = -\delta_1\Omega_1{}^2 - \delta_2\Omega_2{}^2 - \delta_3\Omega_3{}^2 - (I_1 - I_2)\nu_3\omega\Omega_1\Omega_2 +\\ + (I_1 - I_3)\nu_2\omega\Omega_1\Omega_3 - (I_2 - I_3)\nu_1\omega\Omega_2\Omega_3\end{gathered} \tag{2.7}$$

Предполагая без уменьшения общности, что $I_1 \geqslant I_2 \geqslant I_3$, условие постоянной отрицательности функции (2.7) можно привести к одному неравенству

$$\begin{gathered}\delta_1\delta_2\delta_3 - {}^1/_4(I_1 - I_2)(I_2 - I_3)(I_1 - I_3)\nu_1\nu_2\nu_3\omega_m{}^2 - {}^1/_4(I_1 - I_3)^2\nu_2{}^2\omega_m{}^2\delta_2 -\\ - {}^1/_4(I_1 - I_2)^2\nu_3{}^2\omega_m{}^2\delta_3 - {}^1/_4(I_2 - I_3)^2\nu_1{}^2\omega_m{}^2\delta_1 > 0\\ \omega_m = \max_{t\geqslant 0}|\omega(t)|\end{gathered} \tag{2.8}$$

При выполнении неравенства (2.8) невозмущенное движение

$$\omega_k = \omega(t)\nu_k, \quad \lambda_0 = \cos\varphi/2, \quad \lambda_k = \nu_k\sin\varphi/2$$

устойчиво по отношению к Ω_k, ξ_0, ξ_k $(k = 1, 2, 3)$. Покажем, что оно асимптотически устойчиво. Для этого рассмотрим еще одну функцию

$$\begin{gathered}W = I_1\Omega_1\chi_1 + I_2\Omega_2\chi_2 + I_3\Omega_3\chi_3\\ \chi_1 = -\xi_1\cos\frac{\varphi}{2} + (\nu_1\xi_0 + \nu_2\xi_3 - \nu_3\xi_2)\sin\frac{\varphi}{2} \quad (1\ 2\ 3)\end{gathered} \tag{2.9}$$

Производная по времени от функции (2.9) в силу системы (2.2) на множестве $\{V' = 0: \Omega_k = 0,\ k = 1, 2, 3\}$ равна

$$W' = \gamma (\chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2) \tag{2.10}$$

Отметим, что возмущения ξ_0, ξ_k $(k = 1, 2, 3)$ удовлетворяют уравнению

$$\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2\xi_2^2 + \xi_3^2 + 2\xi_0 \cos \varphi/2 + 2(\nu_1\xi_1 + \nu_2\xi_2 + \nu_3\xi_3) \sin \varphi/2 = 0 \tag{2.11}$$

Покажем, что W' — положительно определенная функция переменных ξ_0, ξ_k. Уравнение $W' = 0$ равносильно системе

$$\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 0 \tag{2.12}$$

Если функция $\omega(t)$ такова, что

$$\omega(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi = \int_0^t \omega(\tau)\, d\tau$$

и $\varphi(t)$ не приближается неограниченно к π на некотором интервале $0 < t < t_1$, то, выражая ξ_k $(k = 1, 2, 3)$ через ξ_0 из системы (2.12) по формулам

$$\xi_k = \nu_k \xi_0 \operatorname{tg} (\varphi/2) \tag{2.13}$$

и подставляя выражения (2.13) в (2.11), получим

$$\xi_0 \sec^2 (\varphi/2) (\xi_0 + 2 \cos (\varphi/2)) = 0$$

Из этого соотношения следует $\xi_0 = 0$, а из (2.13) $\xi_k = 0$ $(k = 1, 2, 3)$. На некотором интервале $t_1 < t < t_2$ функция $\varphi(t)$ принимает значения из достаточно малой окрестности π. В этом случае из системы (2.12) выразим ξ_0, ξ_1, ξ_2 через ξ_3:

$$\xi_0 = \xi_3 \operatorname{ctg} (\varphi/2)/\nu_3, \quad \xi_1 = \nu_1\xi_3/\nu_3, \quad \xi_2 = \nu_2\xi_3/\nu_3 \tag{2.14}$$

Подставляя выражения (2.14) в (2.11), получим

$$\xi_3 \operatorname{cosec} (\varphi/2) (\xi_2 \operatorname{cosec} (\varphi/2) + 2) = 0$$

Из этого соотношения следует $\xi_3 = 0$, а из (2.14) следует, что $\xi_0 = \xi_1 = \xi_2 = 0$. На основании теоремы 1.2 [6] невозмущенное движение асимптотически устойчиво по отношению к переменным Ω_k, ξ_0, ξ_k $(k = 1, 2, 3)$ при выполнении неравенства (2.8).

Полученные результаты устанавливают принципиальную возможность построения асимптотически устойчивой замкнутой системы управления плоским разворотом; при этом программное движение предполагается известным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петров Б. Н., Боднер В. А., Алексеев К. Б.* Аналитическое решение задачи управления пространственным поворотным маневром // Докл. АН СССР. 1970. Т. 192. № 6. С. 1235—1238.
2. *Алексеев К. Б., Бебенин Г. Г.* Управление космическими летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1974. 343 с.
3. *Акуленко Л. Д.* Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 365 с.
4. *Соловьев В. П.* Об оптимальном развороте космического аппарата вокруг произвольной неподвижной оси // Космич. исследования. 1969. Т. 7. Вып. 1. С. 42—46.
5. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
6. *Матросов В. М.* Об устойчивости движения // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 5. С. 885—895.

Москва

Поступила в редакцию
5.III.1990