Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 1, 1991

УДК 539.375

С. А. Назаров, О. Р. Полякова

РАЗРУШЕНИЕ УЗКОЙ ПЕРЕМЫЧКИ МЕЖДУ ТРЕЩИНАМИ, ЛЕЖАЩИМИ В ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ

Исследуется напряженно-деформированное состояние изотропного упругого пространства, ослабленного семейством трещин нормального отрыва. В некоторых зонах ребра трещин сближены и образуют узкие перемычки. Строится асимптотика решения задачи в предположении, что перемычка стягивается к контуру или к разомкнутой дуге. Изучаются особенности напряжений в кончике перемычки при различных его формах. На основе полученных асимптотических формул осуществляются вариационные постановки задач, отсутствие единственности решений которых интерпретируется как неустойчивость процесса разрушения узких перемычек. Рассматриваются примеры.

1. Перемычка, стягивающаяся к замкнутому контуру. Пусть G — область на плоскости $\mathbf{R}^2$ с гладкой (класса C^∞) границей ∂G, причем G — ограниченное множество или G — внешность ограниченного множества. Пусть еще Γ — произвольный гладкий замкнутый контур длины l, расположенный в G, и (n, s) — естественная система локальных координат в окрестности Γ ($|n|$ — расстояние вдоль нормали, s — длина дуги). Положим $\Gamma_\varepsilon = \{(n, s)\colon s \in [0, l),\ -\varepsilon h_-(s) \leqslant n \leqslant \varepsilon h_+(s)\}$ и $G_\varepsilon = G \setminus \Gamma$; здесь $h_\pm$ — гладкие положительные функции, $h = h_+ + h_-$ — ширина перемычки; $0 < \varepsilon$ — малый параметр (все координаты безразмерные). Рассмотрим однородное изотропное упругое пространство $\mathbf{R}^3$ с трещиной G_ε в плоскости $\{x = (y, z) : z = 0\}$; к берегам $G_\varepsilon^\pm$ трещины приложена симметричная нормальная нагрузка $p(y)$, гладкая в $\overline{G}$ функция. При помощи представления Папковича — Нейбера задача сводится [1] к отысканию гармонической в полупространстве $\mathbf{R}_+^3 = \{x : z > 0\}$ функции v^ε, удовлетворяющей условиям

$$v^\varepsilon(y, 0) = 0,\quad y \in \mathbf{R}^2 \setminus G_\varepsilon;\quad (\partial_z v^\varepsilon)(y, 0) = P(y) \equiv -\mu^{-1}(1-\nu)\, p(y),\quad y \in G^\varepsilon \tag{1.1}$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона, μ — модуль сдвига, $\partial_z = \partial/\partial z$. При $\varepsilon \to 0$ перемычка Γ_ε стягивается к замкнутой дуге Γ. Асимптотика решений задач в областях с подобным сингулярным возмущением границы исследовалась в [2—5]. Главный член разложения v^ε при $\varepsilon \to 0$ ищется в виде

$$v^0(x) = -\int_G P(\eta)\, \Phi(x; \eta, 0)\, d\eta - \int_\Gamma \gamma(\tau)\, \Phi(x; \eta, 0)\, d\tau \tag{1.2}$$

В (1.2) Φ — функция Грина для уравнения Пуассона в $\mathbf{R}_+^3$, с краевыми условиями типа (1.1), а τ — координата точки $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ на дуге Γ. Первый интеграл отвечает нагрузке p, а второй — нормальный силе, распределенной вдоль контура Γ с некоторой гладкой плотностью $\mu(1-\nu)^{-1}\gamma$. Для того чтобы найти уравнение для γ, вычислим асимптотику функции (1.2) при $r = (n^2 + z^2)^{1/2} \to 0$. Поскольку $\Phi(x; \eta, 0) = (2\pi)^{-1}(|y - \eta|^2 + z^2)^{-1/2} + O(1)$, то регуляризация второго интеграла в (1.2) приводит к формулам

$$v^0(x) = \gamma(s)(\pi^{-1}\ln(^1/_8 k(s)\, r) - b(s)) + (J\gamma)(s) - g(s) + O(r\,|\ln r\,|)$$
$$(r \to 0) \qquad (1.3)$$

$$b(s) = \int_\Gamma \{\Phi(y, 0; \eta, 0) - \chi(\tau - s)\,\Xi(\tau, s)\}\,d\tau -$$
$$- \int_{|\tau|<\pi/k(s)} (1 - \chi(\tau - s))\,\Xi(\tau, s))\,d\tau \qquad (1.4)$$

$$\Xi(\tau, s) = (2\pi)^{-1} k(s)\,[2(1 - \cos[(\tau - s)\,k(s)])]^{-1/2}$$

$$g(s) = \int_G P(\eta)\,\Phi(y, 0; \eta, 0)\,d\eta$$

$$(J\gamma)(s) = \int_\Gamma (\gamma(s) - \gamma(\tau))\,\Phi(y, 0; \eta, 0)\,d\tau \qquad (1.5)$$

Здесь $\chi \in C_0^\infty(-d, d)$ — срезающая функция, $\chi(\tau) = 1$ при $|\tau| \leqslant {}^1/_2 d$, $0 < d$ — малое число, $k(s)$ — кривизна контура Γ в точке s. Заметим, что множитель при γ в (1.3) не содержит особенности в случае $k(s^\circ) = 0$: согласно (1.4) разность $\ln k(s) - \pi b(s)$ остается ограниченной при $s \to s^\circ$. Можно проверить, что интегральный оператор (1.5) является псевдодифференциальным оператором с главным символом $\pi^{-1}\ln|\xi|$.

Вблизи перемычки Γ_ε возникает явление пограничного слоя. Введем «растянутые» переменные $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) = [\varepsilon h(s)]^{-1}(n, z)$. Перейдем к координатам ζ, s и положим $\varepsilon = 0$. В результате для функции $w^0(\zeta, s)$ типа пограничного слоя получаем параметрически зависящую от $s \in \Gamma$ задачу

$$\Delta_\zeta w^0(\zeta, s) = 0, \quad \zeta \in \mathbf{R}_+^2 = \{\zeta : \zeta_2 > 0\}$$
$$(\partial w^0/\partial\zeta_2)(\zeta_1, 0, s) = 0, \quad \zeta_1 \overline{\in} (0, 1), \quad w^0(\zeta_1, 0, s) = 0, \quad \zeta_1 \in (0, 1)$$

Решение этой задачи, имеющее логарифмический рост на бесконечности, определяется равенством

$$w^0(\zeta, s) = a(s)\ln|2\zeta - h^{-1}(h_+ - h_-) + 2[(\zeta - h_+h^{-1})(\zeta + h_-h^{-1})]^{1/2}|,$$
$$\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2 \qquad (1.6)$$

Из условий сращивания разложения (1.3) и разложения $w^0(\zeta, s) = a(s)\ln(4|\zeta|) + O(|\zeta|^{-1})$, $|\zeta| \to \infty$, выводим соотношения

$$a(s) = \pi^{-1}\gamma(s) \qquad (1.7)$$
$$[\pi^{-1}(\ln(\varepsilon h(s)\,k(s)) - 5\ln 2) - b(s)]\,\gamma(s) + (J\gamma)(s) = g(s) \qquad (1.8)$$

Итак, плотность γ является решением интегрального уравнения (1.8) Поскольку $\Phi(y, 0; \eta, 0)$ — положительная симметричная функция переменных y и η, то J — симметрический и неотрицательно определенный оператор; в частности,

$$\int_\Gamma \gamma(s)(J\gamma)(s)\,ds = \frac{1}{2}\int_\Gamma\int_\Gamma |\gamma(s) - \gamma(\tau)|^2\,\Phi(y, 0; \eta, 0)\,ds\,d\tau \qquad (1.9)$$

Обозначим через $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$ и $\psi_1, \psi_2, \ldots$ последовательности собственных чисел и отвечающих им нормированных в $L_2(\Gamma)$ собственных функций оператора

$$I_h = \pi^{-1}(\ln(hk) - 5\ln 2) - b + J \qquad (1.10)$$

Заметим, что при $\varepsilon = \varepsilon_k \equiv \exp(-\pi\lambda_k)$ уравнение (1.8), вообще говоря, неразрешимо и что $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$. Поэтому, как и в [2—5], приходится отыскивать лишь асимптотическое решение. Положим

$$g(s) = \sum_{k=1}^\infty g_k\psi_k(s), \quad \gamma_\varepsilon(s) = \sum_{k\leqslant\varepsilon^{-1/2}} (\lambda_k + \pi^{-1}\ln\varepsilon)^{-1} g_k\psi_k(s) \qquad (1.11)$$

Так как g — гладкая функция на Γ, то γ_ε удовлетворяет равенству (1.8) с точностью $O(\varepsilon^N)$ при большом N.

Итак, построена функция (1.3) гладкого типа и функция (1.6) типа пограничного слоя; их сращивание дает глобальное асимптотическое приближение к решению задачи (1.1). Аналогично [3, 5] проверяется оценка $O(\varepsilon \mid \ln \varepsilon \mid)$ остатка в асимптотике.

Вблизи перемычки Γ_ε выполняется соотношение $| v(x) - w^0(\zeta, s) | \leqslant c\varepsilon \mid \ln \varepsilon \mid$, которое вместе с (1.6), (1.7) приводит к формуле для коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) на ребрах $\Gamma_\varepsilon^\pm = \{x : z = 0, s \in [0, l), n = \pm\varepsilon h(s)\}$ трещин

$$v(x) = \mu^{-1}(1-\nu)(2r_\pm\pi^{-1})^{1/2} K_\pm(s, \varepsilon)\sin {}^1/_2\varphi_\pm$$

$$K_\pm(s, \varepsilon) = (\pi\varepsilon h(s)/2)^{-1/2}\mu(1-\nu)^{-1}\gamma(s) + O(\varepsilon^{1/2} \mid \ln \varepsilon \mid) \tag{1.12}$$

Здесь $(r_\pm, \varphi_\pm)$ — полярные координаты в плоскостях, перпендикулярных контурам $\Gamma_\varepsilon^\pm$.

Уравнение (1.8) содержит большой параметр $| \ln \varepsilon |$, и решение γ_ε в свою очередь может быть разложено в ряд по обратным степеням $| \ln \varepsilon |$:

$$\gamma_\varepsilon(s) \sim \sum_{k=0}^{\infty} | \ln \varepsilon |^{-k-1} \gamma^{(k)}(s)$$

$$\gamma^{(0)}(s) = -\pi g(s),\ \gamma^{(k+1)}(s) = \pi(I_h\gamma^{(k)})(s) \tag{1.13}$$

Отметим, что при $g < 0$ на Γ и при малом $\varepsilon > 0$ плотность γ_ε положительна, т. е. около перемычки реализуется растяжение.

Пусть $G = \mathbf{R}^2$ и $\Gamma_\varepsilon = \{y: R < | y | < R + \varepsilon\}$ (два полупространства, соединенные по тонкому кольцу). В этом случае $k(s) = R^{-1}$, $h(s) = 1$, $b(s) = 0$ и

$$(J\gamma)(s) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} (\gamma(s) - \gamma(\tau)) \left| \sin \frac{\mathrm{T} - s}{2R} \right|^{-1} d\tau$$

Рассмотрим два варианта нагружения: 1°. нормальные силы q, приложенные в точке $y = 0$; 2°. равномерная нормальная нагрузка постоянной интенсивности $p°$ на берегах внутренней круговой трещины. В силу осевой симметрии плотности γ_1 и γ_2 постоянны, а интегральное уравнение превращается в алгебраическое. Решениями служат величины $\gamma_1 = 4\pi\mu^{-1}(1-\nu)R\omega q$ и $\gamma_2 = (2\mu)^{-1}(1-\nu)\omega p°$ соответственно; здесь $\omega = (\ln(\varepsilon R^{-1}) - 5\ln 2)^{-1}\pi$. Формулы (1.12) доставляют асимптотику КИН с точностью $O(\varepsilon^{1/2} \mid \ln \varepsilon \mid)$:

$$K_\pm^{(1)}(s, \varepsilon) \sim (\pi\varepsilon/2)^{-1/2} 4\omega Rq,\quad K_\pm^{(2)}(s, \varepsilon) \sim (2\pi\varepsilon)^{-1/2}\omega p°(\pi R)^{-1}$$

2. Перемычка, стягивающаяся к дуге. Примем те же обозначения, что и в разд. 1, и обозначим через $\Gamma' \subset \Gamma$ дугу длины l с концами P_0 и P_l. Предположим, что множество Γ_ε имеет вид $\{(n, s) : s \in [0, l], -\varepsilon h_-(s) \leqslant n \leqslant \varepsilon h_+(s)\}$. Сначала обсудим возможную форму перемычки вблизи точки P_0 (или P_l). Рассмотрим четыре варианта: 1°. $h_\pm(0) = 0$, $h_\pm'(0) \neq 0$ (угол); 2°. $h_\pm(0) = h_\pm'(0) = 0$ (пик); 3°. $h_\pm(s) = s^{1/2}(p_0 + O(s))$ при $s \to +0$ (малый, но положительный радиус кривизны кончика перемычки Γ_ε); 4°. $h_\pm(0) \neq 0$ (тупой кончик).

1°. Вблизи точки P_0 область $\mathbf{R}^3 \setminus \Gamma_\varepsilon$ диффеоморфна конусу, полученному удалением из пространства угловой в плане трещины с раствором угла порядка $\varepsilon h'(0)$ (на берегах трещины назначаются условия Дирихле). Напряженно-деформированное состояние вблизи подобной особой точки определяется показателем сингулярности напряжений $\Lambda(\varepsilon)$. Этот показатель является собственным числом некоторой спектральной задачи в области, вырезаемой конусом на единичной сфере. Асимптотика таких собственных чисел имеет вид [6] $\Lambda(\varepsilon) = -1 - (2\ln\varepsilon)^{-1} + O(| \ln \varepsilon |^{-2})$.

Поскольку на Γ_ε КИН ведет себя как $s^{\Lambda(\varepsilon)+1/2}$ при $s \to +0$, то трещина не является локально равновесной вблизи P_0.

2°. Вычислим асимптотику напряженно-деформированного состояния вблизи вершины плоской трещины, представляющей собой внешность пика $S = \{y \in \mathbf{R}^2 : y_1 > 0, \ |y_2| \leqslant m y_1^n\}$, где $m > 0$ и $n = 2, 3, \ldots$. Обозначим через ρ, θ, φ сферические координаты с центром в точке O (северный полюс единичной сферы поместили в точку $(1, 0, 0)$), а через $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ — переменные $\xi_j = m^{-1} x_1^{-n} x_{j+1}$, $j = 1, 2$. Рассмотрим гармоническую в окрестности O функцию V, подчиненную однородным условиям Дирихле на S. Согласно [7—9] асимптотика при $\rho \to 0$ функции V ищется в виде

$$V(x) = C\,|\ln\rho|^{-\beta} \{\chi(\theta^{1/2})\,(1 + \alpha\,|\ln\rho|^{-1} \ln(\sin {}^1\!/_2\theta)) + (1 - \chi(\theta^{1/2}))\,\alpha\,|\ln\rho|^{-1} w(\xi_1, \xi_2)$$

Здесь χ — та же срезка, что и в (1.5), w — функция (1.6) при $a(s) = 1$, C — некоторая постоянная, зависящая от V, а α и β — постоянные, подлежащие определению.

Сращивая асимптотику при $\theta \to 0$ первых двух слагаемых из фигурных скобок с асимптотикой при $|\xi| \to \infty$ третьего слагаемого, находим, что $\alpha = (n-1)^{-1}$. Далее, при $\theta > \mathrm{const}$ имеем

$$\Delta V(x) = C\rho^{-2}\,|\ln\rho|^{-\beta-1} \{\beta - {}^1\!/_2\alpha + O(|\ln\rho|^{-1})\} \quad (\rho \to 0)$$

Поэтому $\beta = [2(n-1)]^{-1}$, и значит, вне малой конической окрестности точки O напряжения имеют порядок $\rho^{-1}\,|\ln\rho|^{-\beta-1}$, а КИН на ребре трещины есть $O(\rho^{-n/2}\,|\ln\rho|^{-\beta-1})$. Понятно, что такая трещина не может быть равновесной.

3°. Вблизи точки P_0 край перемычки гладкий и в отличие от предыдущих случаев КИН остается ограниченным при $s \to 0$. Соответствующий пограничный слой строится в конце этого раздела; там же обсуждается случай 4°.

Рассмотрим задачу (1.1) в предположении 3°. Главный член асимптотики ее решения по-прежнему определен формулой (1.2), в которой контур Γ заменен дугой Γ'. Асимптотика (1.3) также сохраняется с заменой b и J и $O(r\,|\ln r|)$ на b', J' и $O(\delta(x)\,|\ln\delta(x)|)$ соответственно, причем $\delta(x) = r[s(l-s)]^{-1}$, J' — интегральный оператор (1.5) на дуге Γ' и

$$b'(s) = b(s) + \int\limits_{\Delta_-(s)} [\chi(\tau - s)\,\Xi(\tau - s) - (2\pi)^{-1}(|\tau - s|^{-1} - |s - d|^{-1} \ln s/d)]\,d\tau + \int\limits_{\Delta_+(s)} [\chi(\tau - s)\,\Xi(\tau, s) - (2\pi)^{-1}(|\tau - s|^{-1} - |s + d - l|^{-1} \ln\frac{l-s}{d})]\,d\tau \qquad (2.1)$$

$$(\Delta_-(s) = (s - d, \ 0), \ \ \Delta_+(s) = (l, \ s + d))$$

В (2.1) b — величина (1.4); считаем, что $(\alpha, \beta) = \varnothing$ при $\alpha \geqslant \beta$. Как и в разд. 1, рассмотрение пограничного слоя (1.6) приводит к равенству (1.7) и аналогичному (1.8) интегральному уравнению на дуге Γ'

$$[\pi^{-1}(\ln(\varepsilon h(s)\,k(s)) - 5\ln 2) - b'(s)]\,\gamma(s) + (J'(\gamma))(s) = g(s) \qquad (2.2)$$

Отметим, что согласно (2.1) и предположению 3° о форме перемычки вблизи точек P_0 и P_l верны соотношения

$$b'(s) = (2\pi)^{-1} \ln s + O(1), \ \ h(s) = s^{1/2}(2p_0 + o(1)) \quad (s \to +0)$$

$$b'(s) = (2\pi)^{-1} \ln|l - s| + O(1), \ \ h(s) = |l - s|^{1/2}(2p_l + o(1)) \quad (s \to l - 0) \qquad (2.3)$$

Поэтому выражение из квадратных скобок в (2.2) ограничено на $[0, l]$ и асимптотическое решение γ_ε уравнения (2.2) определяется формулами (1.11) с очевидными переобозначениями. Однако в отличие от случая замкнутого контура второй интеграл из (1.2) имеет логарифмические особенности вблизи концов P_0 и P_l дуги Γ'. Это вынуждает построить пограничные слои нового типа.

Введем «растянутые» трехмерные координаты ξ, где $\xi_1 = \varepsilon^{-2}s$, $\xi_2 = \varepsilon^{-2}n$, $\xi_3 = \varepsilon^{-2}z$. Перейдем в окрестности точки P_0 к переменным ξ и положим $\varepsilon = 0$. В результате множество G_ε трансформируется в параболу $\Pi = \{\xi \in \mathbf{R}^3 : \xi_1 > 0, \ |\xi_2| \leqslant p_0\xi_1^{1/2}, \ \xi_3 = 0\}$ (см. представление в (2.3)). Соответственно решение $z^0(\xi)$ типа трехмерного пограничного слоя является гармонической в $\mathbf{R}_+^3$ функцией, удовлетворяющей граничным условиям

$$z^0(\xi) = 0, \ \xi \in \Pi; \ (\partial z^0/\partial \xi_3)(\xi) = 0, \ \xi \in \partial \mathbf{R}_+^3 \setminus \overline{\Pi} \qquad (2.4)$$

Для того чтобы найти условия, которым следует подчинить функцию z^0 на бесконечности, заметим, что

$$\int\limits_{\Gamma'} \gamma(\tau)\, \Phi(x; \eta, 0)\, d\tau = -(2\pi)^{-1}\gamma(0)\ln[(r^2+s^2)^{1/2} - s] + O(1)$$

Таким образом, условия сращивания дают представление

$$z^0(\xi) = \gamma(0)(2\pi)^{-1}\ln(|\xi|^{1/2} - \xi_1) + O(1) \ \ (|\xi| \to \infty) \qquad (2.5)$$

Подчеркнем, что это представление справедливо вне конической окрестности луча $\{\xi : \xi_1 > 0, \ \xi_2 = \xi_3 = 0\}$ — вблизи параболы возникает двумерный пограничный слой, аналогичный (1.6).

Искомое решение выводится из известного решения задачи о внешней эллиптической трещине [10]. В самом деле, пусть эллипс имеет полуоси 1 и $2^{-1/2}p_0\varepsilon$; после замены координат $\xi_1 = \varepsilon^{-2}(x_1 + 1)$, $\xi_2 = \varepsilon^{-2}x_2$ уравнение эллипса записывается в виде $\xi_2^2 = p_0^2\xi_1(1 - {}^1/_2\varepsilon^2\xi_1)$. Осуществляя формальный переход к $\varepsilon = 0$, получаем нужную параболу, и, значит, поступая таким же образом с решением, находим формулу для z^0 с неизвестным множителем, который определяется сравнением с асимптотикой (2.5) (при этом удобно считать, что $\xi_2 = \xi_3 = 0$ и $\xi_1 \to -\infty$).

Корректность использованных преобразований проверяется подстановкой решения в соотношения (2.4). Наконец, выражение [10] для КИН на ребре внешней эллиптической трещины позволяет вычислить КИН на $\partial\Pi$. Зависимость последней от переменной $s = \varepsilon^2\xi_1$ такова:

$$\varepsilon^{-1/2}(\pi p_0)^{-1/2}\mu(1-\nu)^{-1}\gamma(0)(s + {}^1/_4 p_0^2\varepsilon^2)^{-1/4} \qquad (2.6)$$

В силу (2.3) формулы (2.6), (1.12) согласованы и возможно их сращивание.

Согласно (2.6) КИН принимает максимальное значение в точке $s = 0$ или $s = l$ (этот факт упоминается в [10]). Если допустить, что перемычка Γ_ε образовалась в результате частичного разрушения большей перемычки, то естественным предположением является постоянство КИН на возникшем ребре. Как показывает соотношение (1.12), для этого необходимо, чтобы функция h — приведенная ширина перемычки — не обращалась в нуль при $s = 0$ и $s = l$. Иными словами, реализуется случай 4°, когда перемычка имеет тупые кончики.

Форму концевой зоны удобно описывать в координатах $\xi_1 = \varepsilon^{-1}s$, $\xi_2 = \varepsilon^{-1}n$, $\xi_3 = \varepsilon^{-1}z$. Пусть теперь Π — область на плоскости, которая вне круга большого радиуса близка к полуполосе $\{(\xi_1, \xi_2): \xi_1 > 0, -h_-(0) < \xi_2 < h_+(0)\}$. Задача о пограничном слое заключается в отыскании гармонической в $\mathbf{R}^3$ функции z^0, удовлетворяющей соотношениям (2.4) и (2.5). Можно проверить (используя, например, преобразование Кельвина и асимптотические формулы из п. 2°), что соответствующий КИН стремится к постоянному значению при $\xi_1 \to +\infty$. Возникает проблема определения контура $\partial\Pi$, для которого решение z^0 поставленной задачи доставляет постоянный вдоль $\partial\Pi$ КИН. Ответить на вопрос о существовании такого контура авторы не могут.

3. Вариационное неравенство для предельно равновесной перемычки. Пусть система трещин образовывала тонкую перемычку, близкую к контуру Γ и имеющую ширину $\varepsilon H(s)$. Предположим, что после изменения нагрузки произошло частичное разрушение перемычки, а конфигурация трещин вне окрестности Γ осталась прежней (согласно (1.12) значения КИН велики на ребрах перемычек и это допущение разумно). Совокупность перемычек, полученную в результате разрушения, будем интерпретировать как единую перемычку Γ_ε, ширина $\varepsilon h(s)$ которой может обращаться в нуль на некоторых участках, и положим $\Upsilon = \{s \in [0, l] : h(s) = 0\}$. Условия незарастания берегов трещины означают, что

$$0 \leqslant h(s) \leqslant H(s) \quad (s \in [0, l]) \tag{3.1}$$

Пусть γ — плотность распределения нормальной силы на дуге $\Gamma \setminus \Upsilon$, фигурировавшая в разделах 1, 2. Доопределим эту плотность нулем на Υ и при выводе вариационного неравенства будем считать γ гладкой функцией на Γ. Тогда главный член асимптотики по-прежнему имеет вид (1.2). В случае $h(s) = \gamma(s) = 0$ согласно (1.3) имеем $v^0(x) = (J\gamma)(s) - g(s) + O(r)$, $r \to 0$. Так как на Υ образовалась трещина, то $v^0 \geqslant 0$ вблизи Υ. Поэтому

$$h(s) = \gamma(s) = 0 \Rightarrow (J\gamma)(s) - g(s) \geqslant 0 \tag{3.2}$$

Вблизи перемычки $(\Gamma \setminus \Upsilon)_\varepsilon$ возникает пограничный слой, позволяющий вычислить приближение к КИН аналогично (1.12). Предположим, что ребра $\Gamma_\varepsilon^\pm$ находятся в условиях предельного равновесия. Обозначая K_c критическое значение КИН, из (1.12) выводим

$$\gamma(s) = (2\mu)^{-1} K_c (1 - \nu) [2\pi\varepsilon h(s)]^{1/2} \equiv \varkappa^{-1/2} h(s)^{1/2} \tag{3.3}$$

Определим отсюда величину $h(s)$ и заметим, что при $s \in \Gamma \setminus \Upsilon$ выполняется уравнение (1.8); приходим к формулам

$$\begin{aligned}\gamma(s) > 0 \Rightarrow \{\pi^{-1} [\ln(\varepsilon k(s)) - 5 \ln 2 + \ln(\varkappa\gamma(s)^2)] - b(s)\}\, \gamma(s) + \\ + (J\gamma)(s) - g(s) = 0\end{aligned} \tag{3.4}$$

Как обычно [11], соотношения (3.2), (3.4) можно записать в виде вариационного неравенства. В силу (3.2), (3.4)

$$(\gamma B(\varkappa\gamma^2), \ \gamma) + (J\gamma, \ \gamma) - (g, \ \gamma) = 0 \tag{3.5}$$

Здесь (,) — скалярное произведение в $L_2(\Gamma)$ (или его расширение), $B(\varkappa\gamma^2)$ — выражение из фигурных скобок в (3.4). Для любой гладкой неотрицательной функции β на Γ формулы (3.2) и (3.4) доставляют соотношение

$$(\gamma B(\varkappa\gamma^2), \ \beta) + (J\gamma, \ \beta) - (g, \ \beta) \geqslant 0 \tag{3.6}$$

Вычитая (3.5) из (3.6), получаем искомое вариационное неравенство

$$(\gamma B(\varkappa\gamma^2), \ \gamma - \beta) + (J\gamma, \ \gamma - \beta) \leqslant (g, \ \gamma - \beta) \quad \forall\beta \geqslant 0 \tag{3.7}$$

Непосредственно проверяется, что вариационное неравенство (3.7) есть не что иное, как задача о минимуме функционала

$$\tfrac{1}{2} (\gamma B(\varkappa\gamma^2), \ \gamma) + \tfrac{1}{2} (J\gamma, \ \gamma) - (g + (2\pi)^{-1} \gamma, \ \gamma) \tag{3.8}$$

Определим выпуклое множество, на котором минимизируется функционал (3.8). В соответствии с (1.9) обозначим через $\mathrm{H}_{\ln}(\Gamma)$ пространство функций на Γ, снабженное нормой

$$\left(\int\limits_\Gamma\int\limits_\Gamma|\gamma(s)-\gamma(\tau)|^2|s-\tau|^{-1}\,ds\,d\tau+\int\limits_\Gamma|\gamma(s)|^2\,ds\right)^{1/2}$$

В [12] установлено, что $\mathbf{H}_{\ln}(\Gamma)$ — пространство Хермандера [13], порожденное весовой функцией $\mu(\xi)=(1+\ln|\xi|+|\ln|\xi||)^{1/2}$; иными словами, норма в $\mathbf{H}_{\ln}(\Gamma)$ склеивается разбиением единицы из норм в $\mathbf{H}_{\ln}(\mathbf{R})$, вычисляемых при помощи преобразования Фурье $F_{s\to\xi}$ согласно формуле

$$\|\gamma;\mathbf{H}_{\ln}(\Gamma)\|=\int\limits_{\mathbf{R}}[1+\ln|\xi|+|\ln|\xi||]\,|(F_{s\to\xi}\gamma)(\xi)|^2\,d\xi$$

Подчеркнем, что вложение $\mathbf{H}_{\ln}(\Gamma)\subset L_2(\Gamma)$ компактно (это свойство приводит к дискретности спектра интегрального оператора (1.10), использованной в разд. 1, 2). Через $L_{2,\ln}(\Gamma)$ обозначим линеал таких функций на Γ, что $\gamma\mu(\gamma)\in L_2(\Gamma)$; это — пространство Орлича, построенное по N-функции $x\mapsto M(x)=x^2\mu(x)^2$ (см., например, [14]).

Итак, искомое выпуклое множество следует составить из неотрицательных функций, содержащихся в пересечении $\mathbf{H}_{\ln}(\Gamma)\cap L_{2,\ln}(\Gamma)$.

Если вблизи Γ_ε реализуется отрыв (необходимое предложение, устраняющее возможность контакта берегов трещины), то g — неположительная функция на Γ. Тогда $\gamma\equiv 0$ — решение неравенства (3.7), отвечающее случаю полного разрушения перемычки. Такое (полное) разрушение вполне соответствует представлению о неустойчивом росте трещин: КИН увеличивается с уменьшением $h(s)$. Тем не менее никаких утверждений о единственности решения γ сделать нельзя (хотя бы в силу сказанного после формулы (1.10)) и могут существовать нетривиальные решения неравенства (3.7). Таким образом, возможны перемычки между предельно равновесными трещинами, однако их положение следует характеризовать как неустойчивое.

4. Вариационное неравенство для частично разрушившейся перемычки. Поскольку утоньшение перемычки — локально неустойчивый процесс, то естественно считать, что после частичного разрушения ее ширина $\varepsilon h(s)$ может быть равна 0 или $\varepsilon H(s)$. В тех точках s, где $h(s)=H(s)$, должно выполняться условие $\gamma(s)\leqslant\varkappa^{-1/2}H(s)$ равновесности трещины (см. (3.3) и (1.12)). Поэтому рассмотрим задачу минимизации функционала $^1/_2(\gamma B(H),\gamma)+{}^1/_2(J\gamma,\gamma)-(g,\gamma)$ на выпуклом множестве $\mathbf{M}=\{\gamma\in\mathbf{H}_{\ln}(\Gamma)\colon 0\leqslant\gamma\leqslant\varkappa^{-1/2}H^{1/2}\}$ или соответствующее вариационное неравенство

$$(\gamma B(H),\ \gamma-\beta)+(J\gamma,\ \gamma-\beta)\leqslant(g,\ \gamma-\beta)\ \ \forall\beta\in\mathbf{M}\qquad(4.1)$$

При $g\leqslant 0$ на Γ (перемычка находилась в условиях растяжения) есть тривиальное решение $\gamma\equiv 0$, но, как и ранее, не исключено существование других, нетривиальных, решений. Пусть γ — такое гладкое решение. При помощи обычных рассуждений [11] устанавливаем формулы

$$\gamma(s)=0\Rightarrow(J\gamma)(s)-g(s)\geqslant 0\qquad(4.2)$$

$$0<\gamma(s)<\varkappa^{-1/2}H(s)^{1/2}\Rightarrow B(H;\ s)\gamma(s)+(J\gamma)(s)-g(s)=0\qquad(4.3)$$

$$\gamma(s)=\varkappa^{-1/2}H(s)^{1/2}\Rightarrow B(H;\ s)\gamma(s)+(J\gamma)(s)-g(s)\leqslant 0\qquad(4.4)$$

Предположим, что для рассматриваемого решения знак неравенства реализуется в (4.4) на множестве Υ^* меры нуль (лишь в некоторых точках). Тогда необходимое соотношение (1.8) (уравнение равновесия) выполнено вне Υ^*, если только $\gamma(s)>0$ (перемычка в точке s осталась целой). Условия $\gamma(s)=0$ и $(J\gamma)(s)>g(s)$ означают, что берега трещины разошлись на положительное расстояние и в этой точке перемычки уже нет. В случае

$\gamma(s) = 0$ и $(J\gamma)(s) = g(s)$ возможны обе ситуации (поэтому и при $\gamma \equiv 0$ перемычка может остаться целой на множестве $\Upsilon^\circ = \{s \in \Gamma\colon g(s) = 0\}$). Следовательно, при решении вариационного неравенства (4.1) определяются зона обязательного разрушения и зона, где достоверно перемычка сохранилась; на дуге Υ° деформации в теле таковы, что безразлично, если там перемычка.

Подчеркнем, что выведенное в [15] вариационное неравенство, описывающее изменение формы одиночной трещины при квазистатическом подрастании, существенно отличается от (3.7) и (4.1). Дело в том, что статья [15] посвящена изучению устойчивого развития трещины; в частности, малая вариация нагрузки приводила, вообще говоря, к малому приращению свободной поверхности, если только не начинался лавинообразный рост трещины. В задаче, рассматриваемой в данной работе, из-за тонкости перемычки приращение свободной поверхности незначительно даже в том случае, когда разрушение произошло вблизи большого участка контура Г. Квазистатическое разрушение перемычки реализуется, конечно же, не часто и наиболее вероятны ситуации, когда пренебрежение инерционными членами влечет серьезные погрешности. Именно с этими обстоятельствами следует связывать возникающие неединственность решения и неопределенность разрушения на участке $\Upsilon^\circ \subseteq \Gamma$.

Рассмотрим, наконец, конкретную задачу. Пусть два полупространства соединены вдоль полосы $\Gamma_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^2\colon |y_2| < \varepsilon\}$ и нагружены парами расклинивающих нормальных сосредоточенных сил интенсивности q°, приложенными в точках $y = (0, \pm 1)$. Предельным контуром Г является прямая $\{y\colon y_2 = 0\}$; функция g задается равенством $g(s) = q^\circ(\pi\mu)^{-1}(\nu - 1)(s^2 + 1)^{-1/2}$, где $s = y_1$; решение предельной задачи определено формулой (1.2), но ввиду расходимости интеграла по Г на бесконечности второе слагаемое в (1.2) требует новой регуляризации.

Допустим, что разрушение происходило симметрично относительно оси y_2 и обозначим через a полудлину разрушившейся части перемычки. Поскольку $\gamma(s) = 0$ при $|s| < a$ и $\gamma(s) = \gamma(-s)$ при $|s| > a$, имеем

$$\int_\Gamma \gamma(\tau)[(s-\tau)^2 + y_2^2]^{-1/2}d\tau = \int_a^\infty \gamma(\tau)\{[(s-\tau)^2 + y_2^2]^{-1/2} + [(s+\tau)^2 + y_2^2]^{-1/2}\}d\tau =$$

$$= \gamma(s)\int_a^{s+a}[(s-\tau)^2 + y_2^2]^{-1/2}d\tau + 2\pi(L\gamma)(s) + O(|y_2|) =$$

$$= \gamma(s)[\ln(a - s + [(s-a)^2 + y_2^2]^{1/2}) - \ln 2a] + 2\pi(L\gamma)(s) + O(|y_2|)$$

$$(L\gamma)(s) = \int_a^\infty \frac{\gamma(\tau)}{|s+\tau|}d\tau + \int_{s+a}^\infty \frac{\gamma(\tau)}{|s-\tau|}d\tau + \int_a^{s+a}\frac{\gamma(\tau) - \gamma(s)}{|s-\tau|}d\tau$$

Согласно изложенному в разд. 2, 4, должны выполняться соотношения

$$\gamma(s)[\ln(\varepsilon/4) - {}^1/_2\ln(a(s-a))] + \pi(L\gamma)(s) - \pi g(s) = 0, \quad s > a \tag{4.5}$$

$$\gamma(s) \leqslant \varkappa^{-1/2}, \quad s > a \tag{4.6}$$

$$(L\gamma)(s) - g(s) \geqslant 0, \quad s < a \tag{4.7}$$

Как и в (1.13), главным членом асимптотики (по обратным степеням $|\ln\varepsilon|$) служит функция $\gamma_0(s) = -\pi|\ln(\varepsilon/4)|^{-1}g$. Заметим, что $\gamma_0(s) > 0$ при $s \geqslant a$. Условие (4.6) выполняется лишь в том случае, если

$$a \geqslant [2(\pi\varepsilon)^{-1}|\ln(\varepsilon/4)|^{-2}(q^\circ K_c^{-1})^2 - 1]^{1/2} \equiv a^\circ(q^\circ) \tag{4.8}$$

Поскольку функция γ_0 мала, а величина g отрицательна на $[-a, a]$, то условие (4.7) соблюдается.

Анализ уравнения (4.5) показывает, что обладающая минимальной гладкостью на $[a, \infty)$ функция γ должна обращаться в нуль при $s = a$ (благодаря присутствию растущег слагаемого $-{}^1/_2\gamma(s)\ln(s-a)$ и ограниченности остальных слагаемых в (4.5)). Функция γ_0 этим свойством не обладает, т. е. вблизи точки $s = a$ возникает дополнительный пограничный слой, ширина которого составляет $O(\varepsilon^2)$ (квадратная скобка из (4.5) равна нулю при $s = a + (16a)^{-1}\varepsilon^2$). Поскольку с самого начала отыскивается асимптотика с точностью лишь $O(\varepsilon)$, этим явлением пренебрегаем.

Ограничиваясь первым приближением γ_0 к плотности γ, рассмотрим неравенство (4.8), необходимое для выполнения (4.6). В случае $q^\circ < q_c \equiv (\pi\varepsilon/2)^{1/2}K_c\,|\ln(\varepsilon/4)|$ правая часть (4.8) не определена и перемычка не подвержена разрушению. Если же нагрузка больше критической q_c, то величина a обязана быть положительной (часть перемычки разрушилась), но остается произвол в выборе a. Промежуток $[a^\circ(q^\circ), +\infty)$ возможных значений a сужается с ростом нагрузки q°. Возникшую неединственность можно устранить введением дополнительного условия, например, заданием раскрытия вновь образованной трещины в точке $y = 0$.

Пусть разрушение перемычки происходило квазистатически. Рост трещины прекращается, как только КИН перестает принимать закритические значения. Поэтому критерием отбора «квазистатических» решений вариационного неравенства (4.1) может служить непустота множества $\Upsilon_c = \{s \in \Gamma\colon \gamma(s) = \varkappa^{-1/2}H(s)^{1/2}\}$. В рассмотренном примере это условие может быть выполнено лишь в случае $a = a^0(q^0)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
2. *Федорюк М. В.* Асимптотика решения задачи Дирихле для уравнений Лапласа и Гельмгольца во внешности тонкого цилиндра // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1981. Т. 45. № 1. С. 167—186.
3. *Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярных возмущениях области. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1980. 206 с.
4. *Зорин И. С., Назаров С. А.* О напряженно-деформированном состоянии упругого пространства с тонким тороидальным включением // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 3. С. 79—86.
5. *Назаров С. А., Паукшто М. В.* Дискретные модели и осреднение в задачах теории упругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. 93 с.
6. *Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Об особенностях решений задачи Дирихле во внешности тонкого конуса // Мат. сб. 1983. Т. 122. № 4. С. 435—457.
7. *Вержбинский Г. М., Мазья В. Г.* Асимптотическое поведение решений эллиптических уравнений второго порядка вблизи границы 1—2. // Сиб. мат. ж. 1971. Т. 12. № 6. С. 1217—1249; 1972. Т. 13. № 6. С. 1239—1271.
8. *Арутюнян Н. Х., Мовчан А. Б., Назаров С. А.* Поведение решений задач теории упругости в неограниченных областях с параболоидальными и цилиндрическими включениями или полостями // Успехи механики. 1987. Т. 10. № 4. С. 3—91.
9. *Мовчан А. Б., Назаров С. А.* Напряженно-деформированное состояние вблизи вершины трехмерного абсолютно жесткого пика, внедренного в упругое тело // Прикл. механика. 1989. Т. 25. № 12. С. 10—19.
10. *Kassir M. K., Sih G. C.* External elliptical crack in elastic solid // Intern. J. Fract. Mech. 1968. V. 4. № 4. P. 347—356.
11. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с.
12. *Нагель Ю.* Об эквивалентных нормировках в функциональных пространствах H^μ // Вестн. ЛГУ, 1974. № 7. С. 41—47.
13. *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.: Мир, 1965. 379 с.
14. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958. 271 с.
15. *Назаров С. А.* Вывод вариационного неравенства для формы малого приращения трещины отрыва // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 2. С. 152—160.

Ленинград

Поступила в редакцию
12.IV.1990