Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 1, 1991

УДК 539.375

Г. Я. Попов

ОБ ОДНОМ НОВОМ ПОДХОДЕ К ЗАДАЧАМ О КОНЦЕНТРАЦИИ УПРУГИХ НАПРЯЖЕНИЙ ВОЗЛЕ ТРЕЩИН

На примере пространственной задачи теории упругости о концентрации напряжений возле плоских трещин излагается новый подход к решению проблемы. Предлагаемый подход в отличие от традиционного базируется на получении такого же простого представления для поля напряжений, что и для смещений, но через новые гармонические функции, связанные определенным образом с обычно вводимыми гармоническими функциями поля смещений. В случае плоской трещины новое представление для поля напряжений приводит к трем однотипным раздельно решаемым двумерным интегральным уравнениям вместо системы из трех интегродифференциальных уравнений при традиционном подходе. Кроме того, полученные простые интегральные уравнения необходимо решать в более широком, чем обычно, классе функций: в классе функций с неинтегрируемыми особенностями. Все это позволяет существенно упростить формулу для коэффициента интенсивности напряжений.

1. Модификация решения Треффтца уравнений Ламе. Если принять $v = 2Gu$, где $u\,(x,\ y,\ z)$ — вектор смещения с координатами $u_j\,(x,\ y,\ z)$ $(j = 1,\ 2,\ 3)$, а G — модуль сдвига, то представление решения однородных уравнений Ламе можно записать в виде [1]

$$v = \psi + x\,\mathrm{grad}\,\psi_0 \tag{1.1}$$

где ψ — гармонический вектор с координатами ψ_j $(j = 1,\ 2,\ 3)$, а ψ_0 — гармоническая функция. При этом гармонические функции ψ_j $(j = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ связаны уравнением

$$\varkappa\psi_0' = -\mathrm{div}\,\psi,\quad \varkappa = 3 - 4\mu \tag{1.2}$$

Здесь μ — коэффициент Пуассона, штрих означает производную по x.

В соответствии с формулой (1.1) на основании закона Гука устанавливаем следующие формулы для напряжений:

$$\sigma_x = (1-2\mu)\,\psi_0' + \psi_1' + x\psi_0'',\quad 2\tau_{xy} = \psi_1^{\boldsymbol\cdot} + \psi_0^{\boldsymbol\cdot} + \psi_2' + 2x\psi_0'^{\boldsymbol\cdot}$$
$$2\tau_{xz} = \psi_1{}^{,} + \psi_0{}^{,} + \psi_3' + 2x\psi_0'{}^{,} \tag{1.3}$$

Точка означает производную по y, а запятая — по z.

Введем новый гармонический вектор ψ^* с координатами ψ_j^*, $(j = 1, 2, 3)$, определяемыми формулами

$$\psi_1^* = (1-2\mu)\,\psi_0' + \psi_1',\quad 2\psi_2^* = \psi_1^{\boldsymbol\cdot} + \psi_0^{\boldsymbol\cdot} + \psi_2'$$
$$2\psi_3^* = \psi_1{}^{,} + \psi_0{}^{,} + \psi_3' \tag{1.4}$$

Гармоничность функций ψ_j^* $(j = 1,\ 2,\ 3)$ следует из гармоничности ψ_j $(j = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$.

Используя формулы (1.4) при учете уравнения (1.2), устанавливаем, что

$$\mathrm{div}\,\psi^* = -\psi_0'' \tag{1.5}$$

Если будет найден вектор ψ^*, то соотношение (1.5) может служить уравнением для определения ψ_0. Через введенные гармонические функции

ψ_j ($j = 1, 2, 3$) напряжения (1.3) выражаются формулами

$$\sigma_x = \psi_1{}^* + x\psi_0'', \quad \tau_{xy} = \psi_2{}^* + x\psi_0'', \quad \tau_{xz} = \psi_3{}^* + x\psi_0'' \tag{1.6}$$

такими же простыми, как и смещения (1.1).

2. Сведение задачи о трещине в плоскости $x = 0$ к двумерным интегральным уравнениям. Будем считать, что трещина занимает в плоскости $x = 0$ область S, которая может быть и многосвязной, а упругая неограниченная среда с постоянными μ и G произвольно загружена. Полагаем, что напряжения, вызванные указанным загружением в отсутствие трещины, найдены и определяются формулами

$$\sigma_x = q_1(x, y, z), \quad \tau_{xy} = q_2(x, y, z), \quad \tau_{xz} = q_3(x, y, z) \tag{2.1}$$

Распределение напряжений в неограниченной упругой среде, содержащей трещину S, будем разыскивать в виде суммы двух слагаемых

$$\sigma_x = q_1 + \sigma_x{}^*, \quad \tau_{xy} = q_2 + \tau_{xy}{}^*, \quad \tau_{xz} = q_3 + \tau_{xz}{}^* \tag{2.2}$$

Звездочкой помечены разрывные смещения и напряжения [2], вызванные наличием трещины S и которые должны снять напряжения на берегах трещины $x = \pm 0$, возникающие там согласно решению (2.1), т. е. они должны на указанных берегах удовлетворять граничным условиям

$$x = \pm 0, \quad \sigma_x{}^* = -q_1(0, y, z), \quad \tau_{xy}{}^* = -q_2(0, y, z), \quad \tau_{xz}{}^* = -q_3(0, y, z),$$
$$y, z \in S \tag{2.3}$$

Разрывное поле напряжений и смещений будем строить, отправляясь от формул (1.6). Для обеспечения требуемой разрывности необходимо построить разрывную гармоническую функцию $\psi(x, y, z)$ со скачками

$$[\psi(0, y, z)] = \psi(-0, y, z) - \psi(+0, y, z)$$
$$[\psi'(0, y, z)] = \psi'(-0, y, z) - \psi'(+0, y, z) \tag{2.4}$$

на S. Используем известную схему [2], введя предварительно двукратное преобразование Фурье по переменным y и z:

$$\psi_{\beta\lambda}(x) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(x, y, z)\, e^{i\beta y + i\lambda z} dy dz$$

Тогда двукратная трансформанта Фурье искомой разрывной гармонической функции будет определяться формулой

$$\psi_{\beta\lambda}(x) = [\psi_{\beta\lambda}'(0)]\, \Phi_{\beta\lambda}(x) + [\psi_{\beta\lambda}(0)]\, \Phi_{\beta\lambda}'(x) \tag{2.5}$$
$$\Phi_{\beta\lambda}(x) = \left(2\sqrt{\beta^2 + \lambda^2}\right)^{-1} e^{-|x|\sqrt{\beta^2+\lambda^2}}$$

Здесь $[\psi_{\beta\lambda}(0)]$, $[\psi_{\beta\lambda}'(0)]$ — двукратные трансформанты Фурье скачков (2.4). Обратив полученную трансформанту (2.5), найдем требуемую разрывную гармоническую функцию со скачками (2.4)

$$4\pi\psi(x, y, z) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_{\beta\lambda}(x)\, e^{-i\beta y - i\lambda z} d\beta d\lambda =$$
$$= \iint\limits_S \frac{[\psi'(0, \eta, \zeta)]\, d\eta d\zeta}{R_x(y, z, \eta, \zeta)} + \frac{\partial}{\partial x} \iint\limits_S \frac{[\psi(0, \eta, \zeta)]\, d\eta d\zeta}{R_x(y, z, \eta, \zeta)} \tag{2.6}$$
$$R_x(y, z, \eta, \zeta) = \sqrt{x^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$$

Возьмем в качестве функций $\psi_j{}^*(x, y, z)$, содержащихся в (2.2), разрывные гармонические функции, определяемые формулой (2.6), и реализуем условия (2.3). Из этих условий следует, что скачки напряжений при переходе через поверхность S равны нулю, и потому согласно (1.6)

$$[\psi_j{}^*(0, y, z)] = 0, \quad j = 1, 2, 3 \tag{2.7}$$

Следовательно, на основании (2.6) гармонические функции $\psi_j{}^*$ будут определяться формулами

$$\psi_j{}^*(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \frac{[\psi_j{}^{*\prime}(0, \eta, \zeta)]}{R_x(y, z, \eta, \zeta)}\, d\eta d\zeta, \quad j = 1, 2, 3 \tag{2.8}$$

и потому граничные условия на основании (1.6) приводят к следующим интегральным уравнениям для определения неизвестных скачков $[\psi_j{}'(0, \eta, \zeta)]$:

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \frac{[\psi_j^{*\prime}(0, \eta, \zeta)]\, d\eta d\zeta}{R_0(y, z, \eta, \zeta)} = -q_j(0, y, z), \quad j = 1, 2, 3, \quad y, z \in S \tag{2.9}$$

Найдя эти скачки, определим по формулам (2.8) функции $\psi_j(x, y, z)$ $(j = 1, 2, 3)$.

Чтобы определить напряжения в любой точке рассматриваемой неограниченной упругой среды необходимо еще согласно (1.6) найти гармоническую функцию $\psi_0(x, y, z)$. Для этого используем следующую схему. Двукратную трансформанту Фурье $\psi_0(x, y, z)$ можно получить по формуле (2.5), т.е.

$$\psi_{0\beta\lambda}(x) = [\psi_{0\beta\lambda}'(0)]\, \Phi_{\beta\lambda}(x) + [\psi_{0\beta\lambda}(0)]\, \Phi_{\beta\lambda}'(x) \tag{2.10}$$

но при этом необходимо найти скачки $[\psi_{0\beta\lambda}'(0)]$, $[\psi_{0\beta\lambda}(0)]$, увязав их со скачками $[\psi_{j\beta\lambda}'(0)]$, $[\psi_{j\beta\lambda}(0)]$.

На основании (2.7) имеем

$$[\psi_{j\beta\lambda}^*(0)] = 0, \quad j = 1, 2, 3 \tag{2.11}$$

Учитывая гармоничность функции ψ_0, формулу (1.5) можно записать так:

$$\psi_1{}^{*\prime} + \psi_2{}^{*\bullet} + \psi_3{}^{*\prime} = \psi_0{}^{\bullet\bullet} + \psi_0{}''$$

или после применения двукратного преобразования Фурье по y и z:

$$\psi_{1\beta\lambda}^{*\prime} - i\beta\psi_{2\beta\lambda}^* - i\lambda\psi_{3\beta\lambda}^* = -(\lambda^2 + \beta^2)\,\psi_{0\beta\lambda} \tag{2.12}$$

Переходя к скачкам, устанавливаем соотношение

$$[\psi_{0\beta\lambda}(0)] = (\lambda^2 + \beta^2)^{-1}\,\{i\beta\,[\psi_{2\beta\lambda}^*(0)] + i\lambda\,[\psi_{3\beta\lambda}^*(0)] - [\psi_{1\beta\lambda}^{*\prime}(0)]\}$$

Продифференцируем равенство (2.12) по x и учтем, что на основании гармоничности $\psi_{1\beta\lambda}^{*\prime\prime} = (\lambda^2 + \beta^2)\,\psi_{1\beta\lambda}^*$. Тогда

$$[\psi_{0\beta\lambda}'(0)] = (\lambda^2 + \beta^2)^{-1}\,\{i\beta\,[\psi_{2\beta\lambda}^{*\prime}(0) + i\lambda\,[\psi_{3\beta\lambda}^{*\prime}(0)] - [\psi_{1\beta\lambda}^*(0)]\}$$

Если теперь принять во внимание формулу (2.11), то для скачков получим

$$[\psi_{0\beta\lambda}(0)] = -\frac{[\psi_{1\beta\lambda}^{*\prime}(0)]}{\beta^2 + \lambda^2}, \quad [\psi_{0\beta\lambda}'(0)] = \frac{i\beta\,[\psi_{2\beta\lambda}^{*\prime}(0)] + i\lambda\,[\psi_{3\beta\lambda}^{*\prime}(0)]}{\beta^2 + \lambda^2} \tag{2.13}$$

Подставим эти выражения в формулу (2.10) для трансформанты $\psi_0(x, y, z)$. После обращения трансформанты по формуле, аналогичной (2.6), приходим к соотношению

$$\begin{aligned} -4\pi\psi_0(x, y, z) = {} & \frac{\partial}{\partial x}\iint\limits_S [\psi_1^{*\prime}(0, \eta, \zeta)]\, L(x, y-\eta, z-\zeta)\, d\eta d\zeta + \\ & + \frac{\partial}{\partial y}\iint\limits_S [\psi_2^{*\prime}(0, \eta, \zeta)]\, L(x, y-\eta, z-\zeta)\, d\eta d\zeta + \\ & + \frac{\partial}{\partial z}\iint\limits_S [\psi_3^{*\prime}(0, \eta, \zeta)]\, L(x, y-\eta, z-\zeta)\, d\eta d\zeta \end{aligned}$$

$$L(x, Y, Z) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[-i\beta Y - i\lambda Z - |x|\sqrt{\beta^2 + \lambda^2}\right]}{(\beta^2 + \lambda^2)^{1/2}}\, d\beta d\lambda \tag{2.14}$$

Итак, если будут решены интегральные уравнения (2.9), то поле напряжений в упругой среде найдется по формулам (1.6), (2.8) и (2.14).

3. О недостаточности решения полученных интегральных уравнений в классе интегрируемых функций. Построим решение интегральных уравнений (2.9) в классе интегрируемых функций для случая, когда S — круг радиуса a, и покажем его недостаточность для полного решения задачи. Перейдем к полярной системе координат

$$y = r\sin\varphi,\ \ z = r\cos\varphi,\ \ \eta = \rho\sin\psi,\ \ \zeta = \rho\cos\psi$$

$$[\psi_j^{*\prime}(0, \rho\sin\psi, \rho\cos\psi)] = \chi_j(\rho, \psi),\ q_j(0, r\sin\varphi, r\cos\varphi) = q_j(r, \varphi) \tag{3.1}$$

Тогда вместо (2.9) будем иметь

$$\frac{-1}{4\pi}\int_0^a\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\chi_j(\rho, \psi)\,\rho d\rho d\psi}{\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\varphi-\psi)}} = g_j(r, \varphi),\quad 0\leqslant r\leqslant a,\quad |\varphi|\leqslant\pi \tag{3.2}$$

Имеется несколько форм решения этого интегрального уравнения в классе интегрируемых функций ([3, 4] и др.). Однако эти решения оказываются непригодными для достижения поставленной цели. Покажем, например, почему не подходит решение уравнения (3.2), предложенное в [2]. Схема его получения состоит в следующем. При помощи формулы 6.511(I) из [5] ядро интегрального уравнения (3.2) представляется через функцию Бесселя нулевого порядка, а для нее используется формула сложения 8.531(I) из [5] с заменой $2\cos n\varphi$ на $e^{ik\varphi}+e^{-ik\varphi}$. Последующее применение конечного преобразования Фурье, определяемого формулами:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\chi_j(r, \varphi)\,e^{-in\varphi}d\varphi = \chi_{jn}(r),\quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{3.3}$$

приводит интегральное уравнение (3.2) к последовательности одномерных интегральных уравнений для трансформант Фурье (после замены $r = ax$, $\rho = a\xi$):

$$\int_0^1 W_n(x, \xi)\,\chi_{jn}(a\xi)\,\xi d\xi = -\frac{4\pi}{a}g_{jn}(ax),\quad 0\leqslant x\leqslant 1 \tag{3.4}$$

$$n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Ядра этих уравнений — разрывные интегралы Вебера — Сонина

$$W_n(x, \xi) = \int_0^\infty J_n(xt)\,J_n(\xi t)\,dt \tag{3.5}$$

для которых имеет место спектральное соотношение A (5.2) из [2]. Используя его и реализуя метод ортогональных многочленов, решение интегральных уравнений получим в виде [2]

$$\chi_{jn}^0(a\xi) = \sum_{k=0}^{\infty}\chi_{jnk}\frac{\xi^n}{\sqrt{1-\xi^2}}P_k^{n,\,-1/2}(1-2\xi^2),\quad j = 1, 2, 3 \tag{3.6}$$

$$\chi_{jnk} = -\frac{16\pi k!^2(n+2k+1/2)}{a\Gamma^2(k+1/2)}\int_0^1\frac{g_{jn}(ax)\,x^{n+1}P_k^{n,\,-1/2}(1-2x^2)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3.7}$$

$$j = 1,\ 2,\ 3;\ n = 0,\ 1,\ \ldots;\ k = 0,\ 1,\ \ldots$$

Здесь принято во внимание, что при любом загружении упругой среды можно установить связь между g_{jn} и $g_{j,\,-n}$ (в частности, для четной функции $g_j(r, \omega)$ по переменной φ имеем $g_{j,\,n} = g_{j,\,-n}$), и потому решать уравнения (3.4) нужно только для $n\geqslant 0$.

Можно показать, используя положительную определенность ядра, что полученное решение (3.6), (3.7) интегральных уравнений (3.4) будет единственным в классе интегрируемых функций. Однако это решение (помеченное нулевым верхним индексом) не позволяет решить поставленную проблему. Чтобы убедиться в этом, вычислим коэффициент интенсивности нормального напряжения (КИНН) $\sigma_x\ (0,\ r,\ \varphi)$, для чего необходимо знать значения этих напряжений на продолжении трещины, т. е. при $r > a$. В соответствии с формулами (1.6), (2.8) и (3.1) для $-\sigma_x\ (0,\ r,\ \varphi)$ имеем выражение, соответствующее левой части равенства (3.2) для $j = 1$.

Подсчитаем трансформанту Фурье напряжения $\sigma_x\ (0,\ r,\ \varphi)$, предварительно совершив те же операции, что и при получении уравнений (3.4). Находим

$$\sigma_{xn}(ax) = \frac{a}{4\pi}\int_0^1 \chi_{1n}(a\xi)\,\xi W_n(x,\xi)\,d\xi, \quad x > 1 \tag{3.8}$$

Искомый КИНН определим формулой

$$N_1(\varphi) = \lim_{x\to 1+0} \sqrt{a(x-1)}\,\sigma_x(0,\ ax,\ \varphi) \tag{3.9}$$

Согласно формуле обращения для конечного преобразования Фурье справедливо равенство:

$$\sigma_x(0, ax, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma_{xn}(ax)\,e^{in\varphi}, \quad x \geqslant 1$$

и потому

$$N_1(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} N_1^{(n)}, \quad N_1^{(n)} = \lim_{x\to 1+0}\sqrt{a(x-1)}\,\sigma_{xn}(ax) \tag{3.10}$$

Чтобы подсчитать содержащийся здесь предел, необходимо использовать выражение (3.9) для $\sigma_{xn}\ (ax)$, предварительно подставив туда полученное решение (3.6) для $j = 1$. В результате, используя формулу (1.7) работы [6], имеем $(x > 1)$:

$$4\pi\sigma_{xn}(ax) = -ax^{-n-1}S_{1n}(x), \quad S_{1n}(x) =$$

$$= \frac{-a}{4\pi x^{n+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\chi_{1nk}\,\frac{\Gamma(n+k+{}^1/_2)\,\Gamma(k+{}^1/_2)\,F(n+k+{}^1/_2,\ k+{}^1/_2;\ n+2k+{}^3/_2;\ x^{-2})}{2k!\,\Gamma(n+2k+{}^3/_2)\,\Gamma(-k+{}^1/_2)\,x^{2k}} \tag{3.11}$$

Продолжив аналитически содержащуюся в (3.11) функцию Гаусса в окрестность $x = 1 + 0$ при помощи формулы 9.131(2) из [5], получим

$$\sigma_{xn}(ax) = \frac{a}{8\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\chi_{1kn}\,\frac{\Gamma(n+k+{}^1/_2)\,\Gamma(k+{}^1/_2)}{\Gamma(-k+{}^1/_2)\,k!\,x^{2k+n+1}}\times$$

$$\times\{[k!\,(n+k)!]^{-1}F(n+k+{}^1/_2, k+{}^1/_2; {}^1/_2; (x^2-1)\,x^{-1}) - \sqrt{x^2-1}\,x^{-1}\}\times$$

$$\times 2\,[\Gamma(n+k+{}^1/_2)\,\Gamma(k+{}^1/_2)]^{-1}F(k+1, n+k+1, n+2k+{}^3/_2; (x^2-1)\,x^{-1}$$

Из этого представления следует, что функция $\sigma_{xn}\ (ax)$ при $x \to 1 + 0$ оказывается ограниченной, и потому $N_1^{(n)} = 0$. Следовательно, КИНН (3.9) при любом загружении упругой среды равен нулю, что нелепо. К этому же результату придем, если вместо решения интегрального уравнения (3.2), предложенного в [2], использовать любое другое решение в классе интегрируемых функций.

4. Построение решения интегрального уравнения (3.4) в классе неинтегрируемых функций. Чтобы получить правильное решение задачи, необходимо расширить класс функций, из которого следует брать решения интегрального уравнения (3.2) или уравнения (3.4). Рассмотрим предварительно такой интеграл:

$$I_n(x, \lambda) = \int_0^1 \frac{\xi^{n+1} W_n(x, \xi)\, d\xi}{(1-\xi^2)^\lambda}, \quad 0 \leqslant x < \infty, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{4.1}$$

где λ — комплексное число. Подставив в (4.1) представление (3.5) для интеграла Вебера — Сонина изменив порядок интегрирования, получим

$$I_n(x, \lambda) = \int_0^\infty J_n(tx)\, dt \int_0^1 \frac{\xi^{1+n}}{(1-\xi^2)^\lambda} J_n(t\xi)\, d\xi =$$

$$= \frac{\Gamma(1-\lambda)}{2^\lambda} \int_0^\infty \frac{J_n(tx) J_{n+1-\lambda}(t)}{t^{1-\lambda}}\, dt, \quad 0 \leqslant x < \infty \tag{4.2}$$

т. е. (4.1) — интеграл Вебера — Сонина с разрывом в точке $x = 1$. Его значение при $x < 1$ и $x > 1$ вычислим при помощи формул 6.574(1) и 6.574(3) из [5].

Аналитически продолжим полученный результат на значение $\lambda = {}^3/_2$. Тогда получим следующие значения интегралов, которые следует понимать в обобщенном смысле [7]:

$$\int_0^1 \frac{\xi^{n+1} W_n(x, \xi)}{(1-\xi^2)^{3/2}}\, d\xi = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1 \\ x^{-n}(x^2-1)^{-1/2}, & x > 1 \end{cases} \tag{4.3}$$

Верхнее соотношение (4.3) позволяет построить решение интегрального уравнения (3.4) в классе неинтегрируемых функций в виде

$$\chi_{jn}(a\xi) = \chi_{jn}{}^0(a\xi) - C_{jn}\xi^n (1-\xi^2)^{-3/2}$$

где C_{jn} — произвольные постоянные. Подставив полученное решение в формулу (3.8) и приняв во внимание верхнее соотношение (4.3) и (3.11), получим

$$\sigma_{xn}(ax) = \frac{a}{4\pi x^{n+1}} \left[C_{1n} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + S_{1n}(x) \right], \quad x > 1 \tag{4.4}$$

Для фиксации произвольных постоянных C_{1n} в (4.4) будем исходить из следующих соображений. Формула (4.4) определяет трансформанту Фурье нормальных напряжений на границе полупространства, которые образовались бы, если неограниченную упругую среду рассечь плоскостью $x = 0$. В случае $n = 0$ (осесимметричный случай) $\sigma_{x0}(r)$ будет представлять нормальное напряжение по указанному сечению и оно обязано уравновешивать заданную нагрузку, приложенную к указанному полупространству, т. е. равнодействующая этих напряжений или интеграл

$$\int_1^\infty \sigma_{x0}(r)\, r dr$$

должны быть конечными, а для этого требуется, чтобы

$$\sigma_{xn} = O(x^{-n-2-\varepsilon}), \quad x \to \infty, \quad \varepsilon > 0 \tag{4.5}$$

Для реализации указанного условия в содержащемся в (4.4) ряду заменим функцию Гаусса ее степенным представлением и полученный двойной ряд преобразуем к виду

$$S_{1n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+{}^1/_2)}{x^{2m}} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\chi_{1nk}\Gamma(m+n+{}^1/_2)}{2k!\,(m-k)!\,\Gamma(-k+{}^1/_2)\,\Gamma(m+n+k+{}^3/_2)} \tag{4.6}$$

Кроме того, примем во внимание, что

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{({}^1/_2)\,m}{m!} \frac{1}{x^{2m}} \tag{4.7}$$

Учитывая равенства (4.6) и (4.7), устанавливаем, что условие (4.5) будет выполнено, если принять

$$C_{1n} = \chi_{1n0}\,(2n+1)^{-1} \tag{4.8}$$

Подсчитаем КИНН (3.9). Чтобы воспользоваться формулой (3.10), необходимо найти $N_1^{(n)}$, для чего подставим выражение (4.4) во второе равенство из (3.10). Выполнив соответствующий предельный переход, получим

$$N_1^{(n)} = -(2\pi)^{-1}\,C_{1n}\,(a/2)^{3/2}$$

или, если учесть формулы (4.18) и (3.7):

$$N_1^{(n)} = \frac{\sqrt{2a}}{\pi} \int_0^1 \frac{g_{1n}(ax)\,x^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \tag{4.9}$$

Формулы (3.10), (4.9) и определяют искомый КИНН.

Полезно сопоставить этот результат с аналогичным результатом, полученным традиционным способом. Например, КИНН N_1 (φ) согласно работе [2] (с. 261) после исправления описки: вместо $e^{-in\varphi}$ должно быть $e^{in\varphi}$, определяется той же формулой (3.10), в отличие от (4.9) имеет существенно более громоздкий вид:

$$N_1^{(n)} = \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\,(2m+n+{}^3/_2)\,m!}{\Gamma(m+{}^3/_2)} J_{mn}^{g} \tag{4.10}$$

$$J_{mn}^{g} = \int_0^1 g_{1n}(ax)\,P_m^{n,\,1/2}(1-2x^2)\,x^{n+1}\sqrt{1-x^2}\,dx \tag{4.11}$$

Здесь учтено, что $q_n^{(3)}(ax) = -g_{1n}(ax)$.

Покажем, как эту громоздкую формулу преобразовать к виду (4.9). Разложим заданную функцию g_{1n} в ряд по многочленам Якоби:

$$g_{1n}(ax) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{1nk}\,x^n P_k^{n,\,-1/2}(1-2x^2) \tag{4.12}$$

Используя ортогональность многочленов Якоби, находим

$$g_{1nk} = Q_{nk} g_{1nk}^{*},\quad \frac{Q_{nk}}{2} = \frac{k!\,\Gamma(n+k+{}^1/_2)\,\Gamma(n+2k+{}^1/_2)}{\Gamma(n+k+1)\,\Gamma(k+{}^1/_2)} \tag{4.13}$$

$$g_{1nk}^{*} = \int_0^1 \frac{x^{n+1} g_{1n}(ax)\,P_k^{n,\,-1/2}(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Подставив теперь (4.12) в (4.11), получим

$$J_{mn}^{g} = \sum_{k=0}^{\infty} Q_{nk} g_{1nk}^{*} I_{mk} \tag{4.14}$$

$$I_{mk} = \int_0^1 P_m^{n,\,1/2}(1-2x^2)\,P_k^{n,\,-1/2}(1-2x^2)\,x^{2n+1}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

Сделав в последнем интеграле замену $1 - 2x^2 = t$, воспользовавшись затем формулой 7.391(9) из [5] и подставив результат в (4.14), приведем ряд (4.14) к конечной сумме. В итоге формула (4.10) примет вид $N_1^{(n)} = \pi^{-1}\sqrt{2a}g_{1n0}^{*}$. Если принять во внимание второе соотношение (4.13), приходим к полному совпадению результатов.

5. Коэффициент интенсивности напряжений в задаче Кельвина при наличии дискообразной трещины. Дадим детализацию полученных результатов применительно к случаю загружения неограниченной среды сосредоточенной силой P (задача Кельвина), параллельной оси x и приложенной в точке с координатами $x = \xi$, $y = 0$, $z = h$. Круговая трещина радиуса a, как и ранее, расположена в плоскости $x = 0$. Распределение напряжений σ_x при $x = 0$ в задаче Кельвина определяется формулой [8]

$$\sigma_x(0, y, z) = \frac{P\xi}{8\pi(1-\mu)[\xi^2 + y^2 + (z-h)^2]^{3/2}} \times$$
$$\times \left[1 - 2\mu + \frac{3\xi^2}{\xi^2 + y^2 + (z-h)^2}\right] = q_1(0, y, z)$$

После замены переменных (3.1) и перехода к безразмерным координатам $r = ax$ $\xi = ab$, $h = ac$, находим

$$g_{1n}(ax) = -\frac{P}{4\pi a^2}\left[I_n'(b, c; x) - \frac{b}{2(1-\mu)} I_n''(b, c; x)\right] \qquad (5.1)$$

$$I_n(b, c; x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-in\varphi}d\varphi}{\sqrt{b^2 + c^2 + x^2 - 2cx\cos\varphi}} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos n\varphi d\varphi}{\sqrt{b^2 + c^2 + x^2 - 2cx\cos\varphi}}$$

(штрих означает производную по переменной b). Последний интеграл можно вычислить следующим образом. Делаем замену $\cos\varphi = t$ и используем представление $T_n(t) = \cos n \arccos t$ для многочленов Чебышева. В результате получаем

$$\pi I_n(b, c; x) = \frac{1}{\sqrt{b^2 + (c+x)^2}} \int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)\, dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1 - y(1+t)}}, \quad y = \frac{2cx}{b^2 + (c+x)^2}$$

Разлагая радикал в подынтегральном выражении в ряд Маклорена по y, вычисляя оставшиеся интегралы по формуле 7.391(3) из [5], находим

$$\sqrt{\pi}\, I_n(b, c; x) = \frac{\Gamma(n + {}^1/_2)(cx)^n}{[b^2 + (c+x)^2]^{n+1/2}} F\left(n + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}; 2n+1; \frac{4cx}{b^2 + (c+x)^2}\right) \qquad (5.2)$$

Для вычисления КИНН примем во внимание, что в разбираемом случае в силу (5.1) $g_{1,n} = g_{1,-n}$, и потому $N_1^{(n)} = N_1^{(-n)}$. Следовательно, формула (3.10) переходит в следующую:

$$N_1(\varphi) = N_1^{(0)} + 2\sum_{n=1}^{\infty} N_1^{(n)} \cos n\varphi \qquad (5.3)$$

Коэффициенты же $N_1^{(n)}$ согласно соотношениям (4.9) и (5.1) можно вычислить по формуле

$$N_1^{(n)} = -\frac{P\pi^{-2}}{(2a)^{3/2}}\left[J_n'(b, c) - \frac{b}{2(1-\mu)} J_n''(b, c)\right] \qquad (5.4)$$

$$J_n(b, c) = \int_0^1 \frac{I_n(b, c; x)\, x^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \qquad (5.5)$$

Разложим интеграл (5.6) в степенной ряд по переменной c при помощи представления

$$\frac{b^{2\lambda}}{[b^2 + (c+x)^2]^{\lambda}} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \left(i\frac{c+x}{b}\right)^n, \quad c_m = \sum_{j=0}^{m} \frac{(\lambda)_j(\lambda)_{m-j}(-1)^j}{j!\,(m-j)!} =$$
$$= (\lambda)_m (m!)^{-1} F(-m, \lambda; 1 - \lambda - m; -1) =$$
$$= (-2)^m (\pi^{3/2} m!)^{-1}\, \Gamma(1-\lambda)\, \Gamma(\lambda + {}^1/_2 m)\, \Gamma({}^1/_2 + {}^1/_2 m) \cos {}^1/_2 m\pi \sin(\lambda + {}^1/_2 m)\pi \qquad (5.6)$$

Здесь использована известная формула ([9], с. 112) для функции Гаусса с аргументом, равным -1.

Из последнего равенства следуют важные соотношения

$$c_{2k} = (\lambda)_k (k!)^{-1}, \quad c_{2k+1} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots \qquad (5.7)$$

Воспользовавшись в (5.6) формулой бинома Ньютона и приняв во внимание равенства (5.7), будем иметь

$$\frac{b^{2\lambda}}{[b^2+(c+x)^2]^\lambda} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c^{2j}}{(2j)!} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{(\lambda)_k}{k!} \frac{(-1)^k}{b^{2k}} (-2k)_{2j}\, x^{2(k-j)} -$$

$$- \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c^{2j+1}}{(2j+1)!} \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{(\lambda)_k}{k!} \frac{(-1)^k}{b^{2k}} (-2k)_{2j+1} x^{2k-2j-1} \tag{5.8}$$

Если теперь подставить выражение (5.2) в (5.5), предварительно заменив там функцию Гаусса ее представлением в виде степенного ряда, и использовать равенство (5.8), то получим требуемое степенное представление

$$J_n(b,c) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(n+{}^1/_2)_j^{\,2}\,(4c)^j}{(2n+1)_j\, j!} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^{2k}}{(2k)!} B_{jk}^{n+}(b) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^{2k+1}}{(2k+1)!} B_{jk}^{n-}(b) \right] \tag{5.9}$$

$$B_{jk}{}^{n+} = (-1)^k 2^{2k} b^{-2n-2k-2j-1} ({}^1/_2)_k\, (n+j+{}^1/_2)_k \Gamma\, (n+{}^1/_2 j+1)\, \Gamma^{-1}(n+{}^1/_2 j +$$
$$+ {}^5/_2)\, {}_3F_2\, (n+k+j+{}^1/_2,\ k+{}^1/_2,\ n+{}^1/_2 j+1;\ {}^1/_2,\ n+{}^1/_2 j+{}^5/_2;\ -b^{-2})$$

$$B_{jk}{}^{n-} = (-1)^k 2^{2k+1} b^{-2n-2k-2j-3} ({}^3/_2)_k\, (n+j+{}^1/_2)_k \Gamma\, (n+{}^1/_2 j+{}^3/_2) \times$$
$$\times \Gamma^{-1}(n+{}^1/_2 j+{}^7/_2)\, {}_3F_2\, (n+k+j+{}^3/_2,\ k+{}^3/_2,\ n+{}^1/_2 j+{}^3/_2;\ {}^3/_2,\ n+{}^1/_2 j +$$
$$+ {}^7/_2;\ -b^{-2})$$

Таким образом, искомый КИНН определяется формулами (5.3), (5.4) и (5.9). Из них можно получить КИНН в случае осевой симметрии. Для этого достаточно в формулах (5.4) и (5.9) положить $c = 0$. В результате найдем

$$N_1^{(0)} = -{}^1/_3 \pi^{-2} (1-\mu)^{-1} P\, (2a)^{-3/2} b^{-2} [(\mu-2)\, F\, (1, {}^1/_2; {}^5/_2; -b^{-2}) +$$
$$+ {}^1/_5 (7-2\mu)\, b^{-2} F\, (2, {}^3/_2; {}^7/_2; -b^{-2}) - {}^{12}/_{35} b^{-4} F\, (3, {}^5/_2; {}^9/_2; -b^{-2})] \tag{5.10}$$

Этой формулой удобно пользоваться при $b \gg 1$. В противном случае необходимо применять формулы 9.131 и 9.132 из [5]. С целью продемонстрировать их использование получим КИНН при $b = 0$, т. е. когда сила P приложена непосредственно к берегу $x = +0$ трещины. В этом случае в (5.10) функции Гаусса следует преобразовать при помощи формулы 9.132(2) из [5], что позволяет после некоторых преобразований осуществить предельный переход $b \to 0$. В результате найдем

$$N_1{}^{(0)} = \pi^{-2} P\, (2a)^{-3/2} (8-3\mu)\, (1-\mu)^{-1}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Треффтц Е.* Математическая теория упругости. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1934. 172 с.
2. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
3. *Леонов М. Я.* Общая задача о давлении кругового штампа на упругое полупространство // ПММ. 1955. Т. 17. Вып. 1. С. 87—98.
4. *Ростовцев Н. А.* О некоторых решениях интегрального уравнения теории линейно-деформируемого основания // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 1. С. 111—127.
5. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
6. *Попов Г. Я.* О применении многочленов Якоби к решению интегральных уравнений // Изв. вузов. Математика. 1966. № 4. С. 77—85.
7. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958. 439 с.
8. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехтеориздат, 1955. 492 с.
9. *Бейтмен Г., Эрдейн А.* Высшие трансцендентные функции: гипергеометрическая функция, функция Лежандра. М.: Наука, 1965. 294 с.

Одесса

Поступила в редакцию
5.VI.1990