

УДК 539.3

© 1991 г.

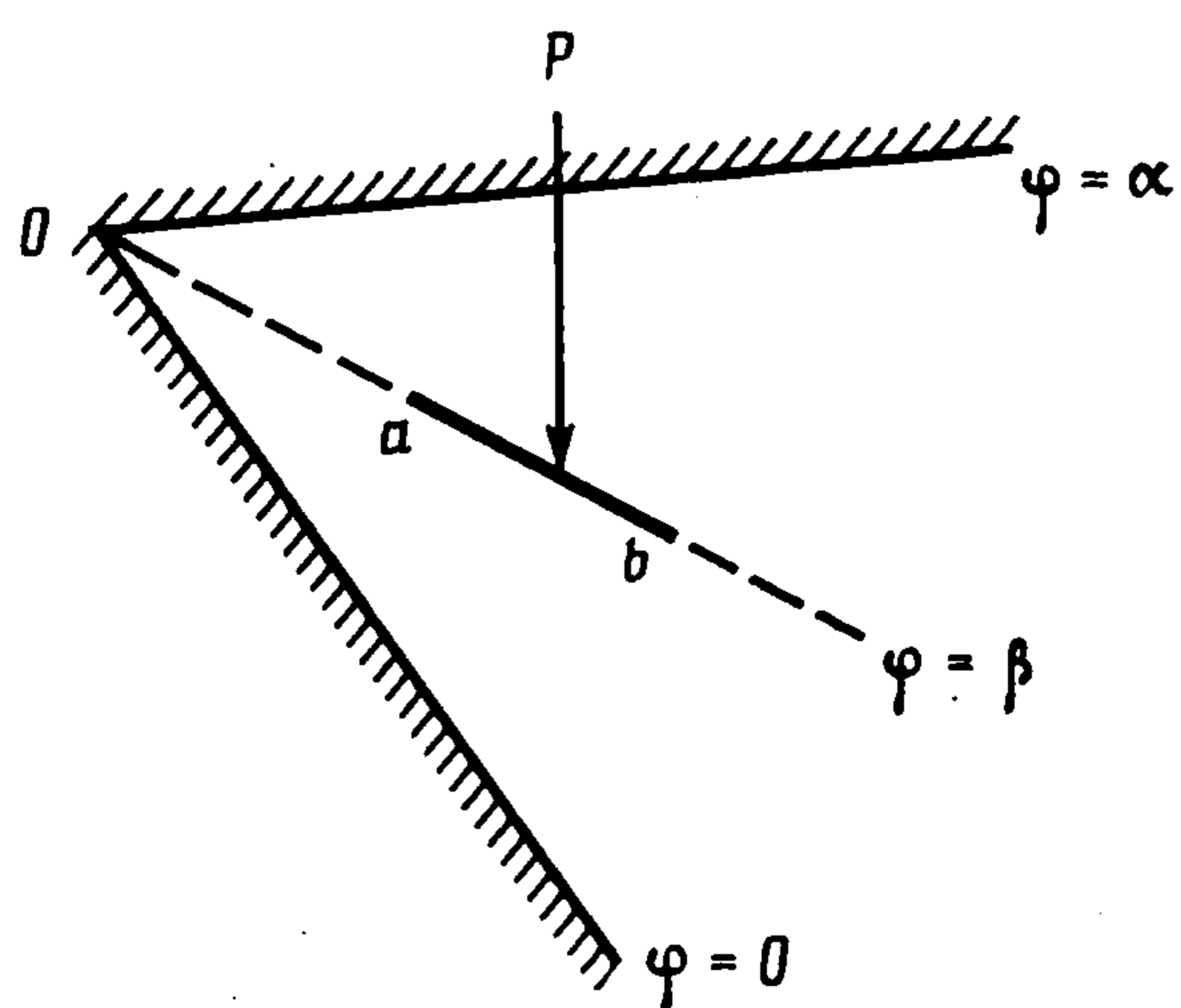
В. М. Александров, Д. А. Пожарский

## О КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ КЛИНОВИДНЫХ ПЛАСТИН

Изучаются задачи о вдавливании тонкого линейного включения в виде ребра жесткости в пластину, имеющую клиновидную в плане форму. Края пластины жестко заземлены либо свободно оперты. Интегральные уравнения (ИУ) этих задач имеют символ ядра типа  $th$  или  $cth$ , причем их решения разыскиваются в классе функций с неинтегрируемыми особенностями [1].

Предлагаются новые простые специальные аппроксимации символов ядер, которые позволяют свести ИУ задач к ИУ на двух участках, решаемым в замкнутом виде. Аналогичные аппроксимации  $th$  или  $cth$  символов ядер ИУ, решения которых имеют интегрируемые особенности, рассматривались, например, в [2]. При этом также возникали ИУ на двух участках. Поскольку аппроксимации  $th$  или  $cth$  не всегда позволяют получить решение с удовлетворительной точностью, вводится усложненная аппроксимация символа ядра с любой заданной погрешностью. При такой аппроксимации решение ИУ также строится в замкнутом виде. Приводятся примеры, когда удается получить точное решение задачи. Результаты могут оказаться полезными при расчетах конструктивных элементов в строительстве.

1. Пусть в клиновидную в плане пластину Кирхгофа — Лява угла раствора  $\alpha$  по отрезку  $a \leq r \leq b$  луча  $\varphi = \beta$  вдавливается силой  $P$  тонкое жесткое включение, проседающее на величину  $f(r)$  (фигура). Предполагается, что края пластины а) жестко заземлены, б) свободно оперты, в) край  $\varphi = 0$  свободно оперт, край  $\varphi = \alpha$  жестко заземлен. Требуется определить контактные усилия  $\varphi(r)$ ,  $a \leq r \leq b$ , равные скачку обобщенных поперечных сил на включении, а также при заданной  $f(r)$  найти величину усилия  $P$  и момента  $M$ , приложенного к включению. В [3] указан метод получения функций Грина для клиновидных пластин с рассматриваемыми здесь граничными условиями, основанный на применении интегрального преобразования Меллина. После нахождения функций Грина трех краевых задач и введения безразмерных величин по формулам



усилия  $\varphi(r)$ ,  $a \leq r \leq b$ , равные скачку обобщенных поперечных сил на включении, а также при заданной  $f(r)$  найти величину усилия  $P$  и момента  $M$ , приложенного к включению. В [3] указан метод получения функций Грина для клиновидных пластин с рассматриваемыми здесь граничными условиями, основанный на применении интегрального преобразования Меллина. После нахождения функций Грина трех краевых задач и введения безразмерных величин по формулам

усилия  $\varphi(r)$ ,  $a \leq r \leq b$ , равные скачку обобщенных поперечных сил на включении, а также при заданной  $f(r)$  найти величину усилия  $P$  и момента  $M$ , приложенного к включению. В [3] указан метод получения функций Грина для клиновидных пластин с рассматриваемыми здесь граничными условиями, основанный на применении интегрального преобразования Меллина. После нахождения функций Грина трех краевых задач и введения безразмерных величин по формулам

$$\begin{aligned} (r/b)^R &= r^*, \quad (\rho/b)^R = \rho^*, \quad k = (a/b)^R \\ \varphi(r) r^2 &= R D r^{*2} \varphi^*(r^*), \quad 4f(r) r^{-1} = R^{-2} f^*(r^*) r^{*-1} \end{aligned} \quad (1.1)$$

( $D$  — жесткость пластины,  $R$  — положительная постоянная) ИУ можно записать в виде (звездочки в дальнейшем опускаем,  $\gamma = \alpha - \beta$ ,  $\delta = \alpha + \beta$ ):

$$R^2 \int_k^1 \rho \varphi(\rho) K\left(\ln\left(\frac{\rho}{r}\right) R^{-1}\right) d\rho = \frac{\pi f(r)}{r}, \quad k \leq r \leq 1 \quad (1.2)$$

$$K(t) = \int_0^\infty L(u) \frac{\cos ut du}{(1+u^2)u} + \frac{\pi}{2} Bt$$

а)  $B = 0$ ,  $L(u) = 2 \{ [u \operatorname{ch} \gamma u \sin \gamma - \operatorname{sh} \gamma u \cos \gamma] [u^2 \operatorname{ch} \gamma u \times \sin \alpha \sin \beta + + u (\operatorname{sh} \gamma u \sin \delta - \operatorname{sh} \delta u \sin \gamma)/2 - \operatorname{sh} \alpha u \operatorname{sh} \beta u \cos \gamma] - (1 + u^2) \times \times \operatorname{sh} \gamma u \sin \gamma [u \operatorname{sh} \gamma u \sin \alpha \sin \beta - \operatorname{sh} \alpha u \operatorname{sh} \beta u \sin \gamma] \} \times (\operatorname{sh}^2 \alpha u - u^2 \sin^2 \alpha)^{-1}$

б)  $B = \lim uL(u)$ ,  $u \rightarrow 0$  при  $\alpha = \pi$ ;  $\alpha = 2\pi$  и  $\beta \neq \pi$ ; в остальных случаях  $B = 0$ ;

$L(u) = 2 \{ u (\operatorname{ch} \alpha u \operatorname{sh} \beta u \operatorname{sh} \gamma u \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma - \operatorname{ch} \alpha u \operatorname{ch} \beta u \operatorname{ch} \gamma u \sin \alpha \cdot \cdot \sin \beta \sin \gamma - \operatorname{sh} \alpha u \operatorname{ch} \beta u \operatorname{sh} \gamma u \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma - \operatorname{sh} \alpha u \operatorname{sh} \beta u \operatorname{ch} \gamma u \cos \alpha \cdot \cdot \cos \beta \sin \gamma) + \operatorname{sh} \alpha u \operatorname{sh} \beta u \operatorname{sh} \gamma u \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \operatorname{sh} \alpha u \operatorname{ch} \beta u \operatorname{ch} \gamma u \cos \alpha \cdot \cdot \sin \beta \sin \gamma + \operatorname{ch} \alpha u \operatorname{ch} \beta u \operatorname{sh} \gamma u \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \operatorname{ch} \alpha u \operatorname{sh} \beta u \operatorname{ch} \gamma u \sin \alpha \cdot \cdot \cos \beta \sin \gamma \} (\operatorname{ch}^2 \alpha u - \cos^2 \alpha)^{-1}$

в)  $B = 0$ ,  $L(u) = 2 \{ \operatorname{sh} \gamma u (\operatorname{sh} \delta u \sin \gamma - \operatorname{sh} \gamma u \sin \delta) (\operatorname{ch} 2\alpha u \sin \gamma + + \sin \delta) + \operatorname{sh} 2\alpha u \operatorname{sh} \gamma u \cos \gamma (\operatorname{ch} \delta u \cos \gamma - \operatorname{ch} \gamma u \cos \delta) + u [(\operatorname{sh} \delta u \sin \gamma - - \operatorname{sh} \gamma u \sin \delta) (\operatorname{sh} 2\alpha u \operatorname{sh} \gamma u \cos \gamma - \operatorname{ch} \gamma u \sin 2\alpha \sin \gamma) - (\operatorname{ch} \delta u \cos \gamma - - \operatorname{ch} \gamma u \cos \delta) (\operatorname{sh} 2\alpha u \operatorname{ch} \gamma u \sin \gamma + \operatorname{sh} \gamma u \sin 2\alpha \cos \gamma)] + u^2 [(\operatorname{ch} \delta u \cos \gamma - - \operatorname{ch} \gamma u \cos \delta) \operatorname{ch} \gamma u \sin 2\alpha \sin \gamma - (\operatorname{sh} \delta u \sin \gamma - \operatorname{sh} \gamma u \sin \delta) (\operatorname{sh} \gamma u \cos 2\alpha + + \operatorname{sh} \delta u) \sin \gamma] \} \times [(\operatorname{ch} 2\alpha u - \cos 2\alpha) (\operatorname{sh} 2\alpha u - u \sin 2\alpha)]^{-1}$

Заметим, что по своим асимптотическим свойствам при  $u \rightarrow 0$ ,  $u \rightarrow \infty$  функция  $L(u)$  является функцией типа  $\operatorname{th} u$  при  $B = 0$  или  $\operatorname{cth} u$ , когда  $B \neq 0$ , и служит вычетом функции  $L(u)$  в нуле. Для  $L(u)$  типа  $\operatorname{cth} u$  интеграл в ядре  $K(t)$  понимается в смысле теории обобщенных функций, так же, как, например, интеграл в ядре ИУ плоской контактной задачи для упругого клина с шарнирно опертой нижней гранью [2]. Из асимптотического поведения  $L(u)$  при  $u \rightarrow \infty$  следует [1], что решение ИУ (1.2) нужно разыскивать в классе функций с неинтегрируемыми особенностями порядка  $-3/2$  в точках  $\rho = k, 1$ .

2. Введем следующие аппроксимации для  $L(u)$ ,  $0 < u < \infty$  соответственно типа  $\operatorname{th} u$  и  $\operatorname{cth} u$  ( $R = \pi/(2A)$ ):

$$\frac{L(u)}{1+u^2} \approx \frac{\operatorname{th} Au}{u^2 + R^2}, \quad \frac{A}{R^2} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{L(u)}{u} \quad (2.1)$$

$$\frac{L(u)}{1+u^2} \approx \frac{\operatorname{cth} Au}{u^2 + R^2}, \quad \frac{1}{AR^2} = B$$

Используя известные интегралы [4], можно получить, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{th} Au \cos ut}{u(u^2 + R^2)} du = \frac{1}{R^2} \left\{ \ln \operatorname{cth} \frac{Rt}{2} + \operatorname{ch} Rt \ln (2 \operatorname{sh} Rt) - Rt \operatorname{sh} Rt \right\} \quad (2.2)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{cth} Au \cos ut}{u(u^2 + R^2)} du = -\frac{1}{R^2} \left\{ \operatorname{ch} Rt \ln \operatorname{cth} \frac{Rt}{2} + \ln (2 \operatorname{sh} Rt) \right\}$$

Внося (2.1), (2.2) в ИУ (1.2) будем иметь два ИУ для случаев символа ядра типа  $\operatorname{th}$  и  $\operatorname{cth}$  ( $k \leq r \leq 1$ )

$$\int_k^1 \varphi(\rho) \left\{ \frac{(\rho - r)^2}{2} \ln |\rho - r| + \frac{(\rho + r)^2}{2} \ln (\rho + r) - r^2 \ln r - \rho^2 \ln \rho \right\} d\rho = \pi f(r) \quad (2.3)$$

$$\int_k^1 \varphi(\rho) \left\{ \frac{(\rho - r)^2}{2} \ln |\rho - r| - \frac{(\rho + r)^2}{2} \ln (\rho + r) + 2r\rho \ln \rho \right\} d\rho = \pi f(r) \quad (2.4)$$

Очевидно, решение ИУ (2.3) следует искать как четное решение соответствующего ИУ на двух участках, а решение ИУ (2.4) — как нечетное. Проведем в (2.3), (2.4) регуляризирующие замены искоемых функций соответственно по формулам ( $g(r) = \sqrt{(1 - r^2)(r^2 - k^2)}$ ):

$$\varphi(\rho) = \varphi_+(\rho) + (\alpha_+\rho + \beta_+\rho^3) g^{-3}(\rho) \quad (2.5)$$

$$\varphi(\rho) = \varphi_-(\rho) + (\alpha_- + \beta_-\rho^2) g^{-3}(\rho) \quad (2.6)$$

где  $\alpha_{\pm}$  и  $\beta_{\pm}$  выбираются таким образом, что  $\varphi_{\pm}(\rho)$  имеют интегрируемые особенности в точках  $\rho = k, 1$ . Подставим (2.5) в (2.3), продифференцируем полученное уравнение 3 раза по  $r$  в предположении, что  $f(r) \in H_3^{\sigma}(k, 1)$ ,  $0 < \sigma \leq 1$  и, поделив на  $r$ , получим известное сингулярное ИУ

$$\int_k^1 \varphi_+(\rho) \frac{2d\rho}{\rho^2 - r^2} = -\pi \frac{f'''(r)}{r} - \frac{2P_+}{r^2} \quad (k \leq r \leq 1), \quad P_+ = \int_k^1 \varphi_+(\rho) d\rho \quad (2.7)$$

на двух участках. Его решение имеет вид

$$\varphi_+(\rho) = \frac{2\rho}{\pi g(\rho)} \left\{ P_+ \frac{k}{\rho^2} + \int_k^1 \frac{g(r) f'''(r)}{r^2 - \rho^2} dr \right\} \quad (2.8)$$

В (2.8) учтено, что [4]

$$\int_k^1 \frac{g(r) dr}{r(r^2 - \rho^2)} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{k}{\rho^2} - 1 \right) \quad (k \leq \rho \leq 1)$$

Аналогично, подставляя (2.6) в (2.4) и троекратно дифференцируя по  $r$ , найдем

$$\varphi_-(\rho) = \frac{2}{\pi g(\rho)} \left\{ M_- + \int_k^1 \frac{g(r) f'''(r) r}{r^2 - \rho^2} dr \right\}, \quad M_- = \int_k^1 \rho \varphi_-(\rho) d\rho \quad (2.9)$$

В выражениях (2.5), (2.8) и (2.6), (2.9) присутствуют по три неизвестных постоянных  $\alpha_{\pm}$ ,  $\beta_{\pm}$ ,  $P_+$ ,  $M_-$ . Для получения системы трех линейных алгебраических уравнений относительно  $\alpha_+$ ,  $\beta_+$ ,  $P_+$  воздействуем на ИУ (2.3) в котором функция  $\varphi(\rho)$  заменена выражениями (2.5), (2.8), операторами

$$\frac{rdr}{g(r)} \int_k^1, \quad \frac{rdr}{g^3(r)} \int_k^1, \quad \frac{r^3dr}{g^3(r)} \int_k^1$$

После взятия квадратур будем иметь систему уравнений

$$\begin{aligned} & \int_k^1 \frac{rf(r) dr}{g(r)} + \left( \frac{1}{4} \ln \frac{1-k^2}{4} + 1 \right) \int_k^1 g(r) f'''(r) dr + \int_k^1 \frac{\rho^2(\rho \ln \rho - 2d_0)}{\pi g(\rho)} d\rho \times \\ & \times \int_k^1 \frac{g(r) f'''(r)}{r^2 - \rho^2} dr = \alpha_+ \left( d_0 b_1 - \frac{c_1}{2} \right) + \beta_+ \left( d_0 b_2 - \frac{\pi}{8} \ln \frac{1-k^2}{4} - \right. \\ & \left. - \frac{\pi}{2} - \frac{c_2}{2} \right) + P_+ \left( \frac{d_0}{\pi} 2kK' + \frac{1+6k+k^2}{8} + \frac{(1+k)^2}{8} \ln \frac{1-k}{1+k} \right) \\ & \int_k^1 \frac{rf(r)}{g^3(r)} dr - \frac{1}{(1-k^2)^2} \int_k^1 g(r) f'''(r) dr + \int_k^1 \frac{2a_1 \rho^2 d\rho}{\pi g(\rho)} \int_k^1 \frac{g(r) f'''(r)}{r^2 - \rho^2} dr = \\ & = -\alpha_+ a_1 b_1 + \beta_+ \left( \frac{\pi}{2(1-k^2)^2} - a_1 b_2 \right) + P_+ \left( \frac{k^4 - 2k - 1}{2(1-k^2)^2} - \frac{2ka_1}{\pi} K' - \frac{c_1}{\pi} \right) \\ & \int_k^1 \frac{r^3 f(r) dr}{g^3(r)} - d_1 \int_k^1 g(r) f'''(r) dr + \int_k^1 \frac{2a_2 \rho^2 d\rho}{\pi g(\rho)} \int_k^1 \frac{g(r) f'''(r)}{r^2 - \rho^2} dr = \\ & = -\alpha_+ a_2 b_1 + \beta_+ \left( \frac{\pi}{2} d_1 - a_2 b_2 \right) - P_+ \left( kd_1 + \frac{2ka_2}{\pi} K' - d_2 + \frac{c_2}{\pi} \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

где введены следующие обозначения:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_k^1 t^{2n} \ln \left| \frac{t-\xi}{t+\xi} \right| \frac{dt}{g^3(t)} \quad (k \leq \xi \leq 1) \quad (2.11)$$

$$b_n = \int_k^1 \frac{t^{2n}}{g^3(t)} dt, \quad c_n = \int_k^1 \frac{t^{2n+1} \ln t}{g^3(t)} dt, \quad n = 0, 1, 2$$

$$d_0 = K - E - \frac{1}{4}, \quad d_1 = \frac{1+k^2}{2(1-k^2)^2}, \quad d_2 = \frac{1}{4} \ln \frac{4}{1-k^2} - \frac{1+k^4}{2(1-k^2)^2}$$

$K = K(k)$ ,  $K' = K'(k)$ ,  $E = E(k)$ ,  $E' = E'(k)$  — полные эллиптические интегралы. Интегралы с неинтегрируемыми особенностями порядка  $-3/2$ , входящие в (2.10), (2.11), понимаются в смысле конечной части [5]. Значения интегралов  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$  ( $n = 0, 1, 2$ ) можно вычислить с использованием ЭВМ в зависимости от  $k$ .

Аналогично после воздействия на ИУ (2.4) при учете (2.6), (2.9) операторами

$$\frac{dr}{g(r)} \int_k^1, \quad \frac{dr}{g^3(r)} \int_k^1, \quad \frac{r^2 dr}{g^3(r)} \int_k^1$$

получим систему трех линейных уравнений относительно  $\alpha_-$ ,  $\beta_-$ ,  $M_-$

$$\begin{aligned} & \int_k^1 \frac{f(r) dr}{g(r)} + \int_k^1 \frac{(K - E - 2\rho \ln \rho + K\rho^2)}{\pi g(\rho)} d\rho \int_k^1 \frac{g(r) f'''(r) r}{r^2 - \rho^2} dr = \\ & = \alpha_- \left( \frac{E - K}{2} b_0 - \frac{K}{2} b_1 + c_0 \right) + \beta_- \left( \frac{E - K}{2} b_1 - \frac{K}{2} b_2 + c_1 \right) + \\ & + M_- \left( \frac{E - K}{\pi} K' - \frac{K}{\pi} E' + \frac{1}{2} \left( \ln \frac{4}{1 - k^2} - 1 \right) + \ln \frac{1 + k}{2} \right) \quad (2.12) \\ & \int_k^1 \frac{f(r) dr}{g^3(r)} - \int_k^1 \frac{(a_1 + a_0 \rho^2) d\rho}{\pi g(\rho)} \int_k^1 \frac{g(r) f'''(r) r}{r^2 - \rho^2} dr = \\ & = \alpha_- \left( \frac{a_1 b_0}{2} + \frac{a_0 b_1}{2} \right) + \beta_- \left( \frac{a_1 b_1}{2} + \frac{a_0 b_2}{2} \right) + M_- \left( \frac{a_1}{\pi} K' + \frac{a_0}{\pi} E' + \frac{2}{(1 - k^2)^2} \right) \\ & \int_k^1 \frac{r^2 f(r) dr}{g^3(r)} - \int_k^1 \frac{(a_2 + a_1 \rho^2) d\rho}{\pi g(\rho)} \int_k^1 \frac{g(r) f'''(r) r}{r^2 - \rho^2} dr = \\ & = \alpha_- \left( \frac{a_2 b_0}{2} + \frac{a_1 b_1}{2} \right) + \beta_- \left( \frac{a_2 b_1}{2} + \frac{a_1 b_2}{2} \right) + M_- \left( \frac{a_2}{\pi} K' + \frac{a_1}{\pi} E' + 2d_1 \right) \end{aligned}$$

После определения  $\alpha_{\pm}$ ,  $\beta_{\pm}$ ,  $P_+$ ,  $M_-$  из (2.10), (2.12) замкнутые решения ИУ (2.3), (2.4) находятся по формулам (2.5), (2.8) и (2.6), (2.9).

Приведем примеры конкретных аппроксимаций вида (2.1). В случае задачи а) при  $\alpha = 2\beta = \pi$ ,  $A = 1,321$  погрешность аппроксимации  $\kappa = 10\%$ , а в случае задачи б) при  $\alpha = 2\beta = \pi/2$ ,  $A = 1,121$  погрешность  $\kappa = 5\%$ . Для случая б) при  $\alpha = 2\beta = \pi$   $L(u) = \operatorname{cth} \pi u/2$ ,  $A = \pi/2$  и задача имеет точное решение, которое остается справедливым с некоторой погрешностью и в малой окрестности значения угла  $\beta = \pi/2$ .

3. Аппроксимации вида (2.1) имеют удовлетворительные погрешности не для всех значений углов  $\alpha$ ,  $\beta$  ( $0 < \alpha \leq 2\pi$ ,  $0 < \beta < \alpha$ ). Была предложена<sup>1</sup> более сложная аппроксимация вида

$$\frac{L(u)}{1+u^2} \approx \frac{\operatorname{th} Au}{u^2 + \gamma_0^2} \prod_{n=1}^N \frac{u^2 + \delta_n^2}{u^2 + \gamma_n^2} \quad (3.1)$$

для случая символа ядра ИУ типа  $\operatorname{th}$ . Постоянные  $\gamma_0$ ,  $\delta_n$ ,  $\gamma_n$  ( $n = 1, \dots, N$ ) подбираются из условия наилучшей аппроксимации вида (3.1)

<sup>1</sup> Зеленцов В. Б. Асимптотические методы решения смешанных задач теории изгиба тонких пластин: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ростов н/Д, Рост. ун-т, 1984. 264 с.

вдоль действительной оси. Увеличивая  $N$ , можно достичь любой точности аппроксимации.

В случае аппроксимации (3.1) вместо (1.1) введем безразмерные величины по формулам

$$x = \lambda \ln (r/a) - 1, \quad \xi = \lambda \ln (\rho/a) - 1, \quad \lambda = 2 [\ln (b/a)]^{-1} \quad (3.2)$$

$$4\lambda^3 f(r)/r = G(x), \quad \varphi(r) r^2 D^{-1} = \psi(x)$$

Тогда ИУ задачи примет вид

$$\lambda^2 \int_{-1}^1 \psi(\xi) K\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi = \pi G(x), \quad |x| \leq 1 \quad (3.3)$$

В интеграле, входящем в выражение (1.2) для  $K(t)$ , произведем замену переменных  $u = \lambda u'$  и введем обозначения  $\delta_n = \lambda \delta_n'$ ,  $\gamma_n = \lambda \gamma_n'$ ,  $\gamma_0 = \lambda \gamma_0'$ . После этого ИУ (3.3) при учете (3.1) можно переписать так (штрихи опущены):

$$\int_{-1}^1 \psi(\xi) K(\xi - x) d\xi = 2\pi G(x), \quad |x| \leq 1 \quad (3.4)$$

$$K(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{th}(A\lambda u)}{u(u^2 + \gamma_0^2)} \prod_{n=1}^N \frac{u^2 + \delta_n^2}{u^2 + \gamma_n^2} e^{-iut} du \quad (3.5)$$

Для решения ИУ (3.4) с ядром (3.5) применим методику, развитую в [6]. Для простоты предположим, что  $G(x)$  — четная функция и  $G(x) = \text{ch } \varepsilon x$ ,  $\varepsilon$  — комплексная постоянная. Представим ИУ (3.4), (3.5) в виде обыкновенного дифференциального уравнения

$$P_1(L) \Omega(x) = 2\pi P_2(-\varepsilon^2) \text{ch } \varepsilon x, \quad |x| \leq 1 \quad (3.6)$$

$$\Omega(x) = \int_{-1}^1 \psi(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{th}(A\lambda u)}{u} \cos u(x - \xi) du \quad (3.7)$$

$$L = -\frac{d^2}{dx^2}, \quad P_1(u^2) = \prod_{n=1}^N (u^2 + \delta_n^2), \quad P_2(u^2) = (u^2 + \gamma_0^2) \prod_{n=1}^N (u^2 + \gamma_n^2)$$

Обращая (3.6) и учитывая (3.7), для определения  $\psi(x)$  получим уравнение

$$\int_{-1}^1 \psi(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{th}(A\lambda u)}{u} \cos u(x - \xi) du =$$

$$= 2\pi \frac{P_2(-\varepsilon^2)}{P_1(-\varepsilon^2)} \text{ch } \varepsilon x + 2\pi \sum_{n=1}^N C_n \text{ch } \delta_n x, \quad |x| \leq 1 \quad (3.8)$$

Здесь  $C_n$  — неизвестные постоянные.

Поскольку решение ИУ (3.4) разыскивается в классе функций с неинтегрируемыми особенностями порядка  $-3/2$ , произведем регуляризацию внешнего интеграла в (3.8), введя функцию

$$\psi^*(x) = \psi(x) - C (\text{ch } \theta - \text{ch } \theta x)^{-3/2}, \quad \theta = \pi/A\lambda \quad (3.9)$$

причем  $\psi^*(x)$  принадлежит к классу функций с интегрируемыми особенностями порядка  $-1/2$  в точках  $|x| = 1$ . Учитывая результаты работы [6], для преобразования Фурье  $\Psi(\beta)$  функции  $\psi(x)$  (понимая соответствующий интеграл в смысле конечной части) получим

$$\Psi(\beta) = 2\pi C \frac{\sqrt{2}}{\theta \text{sh } \theta} \frac{\lambda^2}{Q_{-1/2}} R(i\beta, 0) + \Phi_+(\beta) \quad (3.10)$$

$$\Psi(\beta) = \int_{-1}^1 \psi(\xi) \cos \beta \xi d\xi, \quad Q_{\nu}^{\mu} = Q_{\nu}^{\mu}(\text{ch } \theta)$$

Функции  $\Phi_+(\beta)$ ,  $R(u, v)$  даются формулами (2.6) из [6]. Само решение имеет вид

$$\psi(x) = \frac{\theta}{2\pi} C_0 \frac{\operatorname{sh} \theta Q_{-1/2} + 2(\operatorname{ch} \theta - \operatorname{ch} \theta x) Q_{-1/2}^1}{\theta_{-1/2} \sqrt{2} (\operatorname{ch} \theta - \operatorname{ch} \theta x)^3} + \varphi_+(x), \quad C_0 = \frac{2\pi C \sqrt{2}}{\theta \operatorname{sh} \theta} \quad (3.11)$$

где  $\varphi_+(x)$  дается формулой (2.9) работы [6]. Постоянные  $C_0, C_1, \dots, C_N$ , входящие в (3.11), находятся из линейной алгебраической системы

$$\sum_{n=0}^N x_n = f_m + \sum_{n=0}^N a_{mn} x_n, \quad m = 0, 1, \dots, N \quad (3.12)$$

$$\left( x_0 = -C_0 Q_{-1/2}^1, \quad a_{m0} = -\frac{Q_{-1/2} Q_{-1/2+\gamma_m/\theta}^1}{Q_{-1/2}^1 Q_{-1/2+\gamma_m/\theta}} \right)$$

причем величины  $x_n, a_{mn}, f_m$  ( $n \geq 1$ ) те же, что и в формулах (2.8) из [6]. После определения  $C_0, C_1, \dots, C_N$  из (3.12) решение ИУ (3.4) в четном случае дается выражением (3.11). Аналогично можно построить решение ИУ (3.4) в нечетном случае, когда  $G(x) = \operatorname{sh} \varepsilon x$ . Комбинируя четные и нечетные решения, можно выписать решение ИУ (3.4) в случае, когда функция  $G(x)$  представима рядом Фурье.

При помощи изложенной выше методики для задач *a, б, в* при  $\alpha = 2\beta = 2\pi$ ,  $L(u) = \operatorname{th} \pi u$  можно найти точное решение.

4. Приведем численный пример решения контактной задачи. Рассмотрим пластину в виде полуплоскости, свободно опертой по границе:  $\alpha = 2\beta = \pi$ ,  $L(u) = \operatorname{cth} \pi u/2$ ,  $B = 2/\pi$  (задача б).

Как уже отмечалось, в этом случае задача решается в замкнутом виде.

Пусть в соответствии с (1.1) безразмерная функция  $f(r) \equiv 1$ ;  $k = 0,1$ . Тогда  $a_0 = -2,402$ ;  $a_1 = -0,9227$ ;  $a_2 = 0,6671$ ;  $b_0 = -97,15$ ;  $b_1 = 1,734$ ;  $b_2 = -0,9762$ ;  $c_0 = 12,98$ ;  $c_1 = -1,298$ ;  $c_2 = -1,172$ . Решив для данного случая систему линейных уравнений (2.12), найдем, что  $\alpha_- = -1,586$ ,  $\beta_- = -93,01$ ,  $M_- = 29,50$ . При помощи формул (2.6), (2.9) выпишем функцию распределения искомых контактных усилий в виде

$$\varphi(\rho) = -(1,692 + 74,04\rho^2 + 18,78\rho^4) g^{-3}(\rho) \quad (4.1)$$

Из выражения (4.1) следует, что на интервале  $0,1 < \rho < 1$  функция  $\varphi(\rho)$  сохраняет знак, что свидетельствует о невозможности отрыва включения от пластины. Интегрируя выражение (4.1) по  $\rho$  от 0,1 до 1, вычислим безразмерное усилие  $P^* = Pb/D$ . В рассматриваемом здесь случае  $P^* = 62,24$ . Величина  $M_- = M/D$  имеет смысл безразмерного момента, приложенного к включению.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Зеленцов В. Б. О решении некоторых интегральных уравнений смешанных задач теории изгиба пластин // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 6. С. 983—991.
2. Александров В. М., Ромалис Б. Л. Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение, 1986. 174 с.
3. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1963. 367 с.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
5. Функциональный анализ. Справочная математическая библиотека. М.: Наука, 1972. 544 с.
6. Зеленцов В. Б. О решении одного класса интегральных уравнений // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 5. С. 815—820.

Москва

Поступила в редакцию  
20.XI.1989