Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 1, 1991

УДК 539.3

Ф. М. Бородич

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕШЕНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ О ДИНАМИЧЕСКОМ ВДАВЛИВАНИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ В СПЛОШНЫЕ СРЕДЫ

В геометрически линейной постановке рассматриваются пространственные задачи о вдавливании произвольных затупленных тел в полупространство, занятое сплошной средой. Показано, что если определяющие соотношения линейны, а среда однородна или неоднородна только по глубине, то на начальном этапе взаимодействия задача об определении интегральных характеристик решений (интегральных перемещений и результирующих усилий) эквивалентна задаче о распространении в этой же среде плоских волн. Получены выражения для силы взаимодействия между телом и средой (результирующие усилия) в ряде конкретных случаев: нелинейная упругая среда с начальными напряжениями, вязкоупругие среды, изотропная упругая среда, плавно неоднородная по глубине. Показано, что все результаты имеют силу как при вертикальном вдавливании, так и при вдавливании с поворотом.

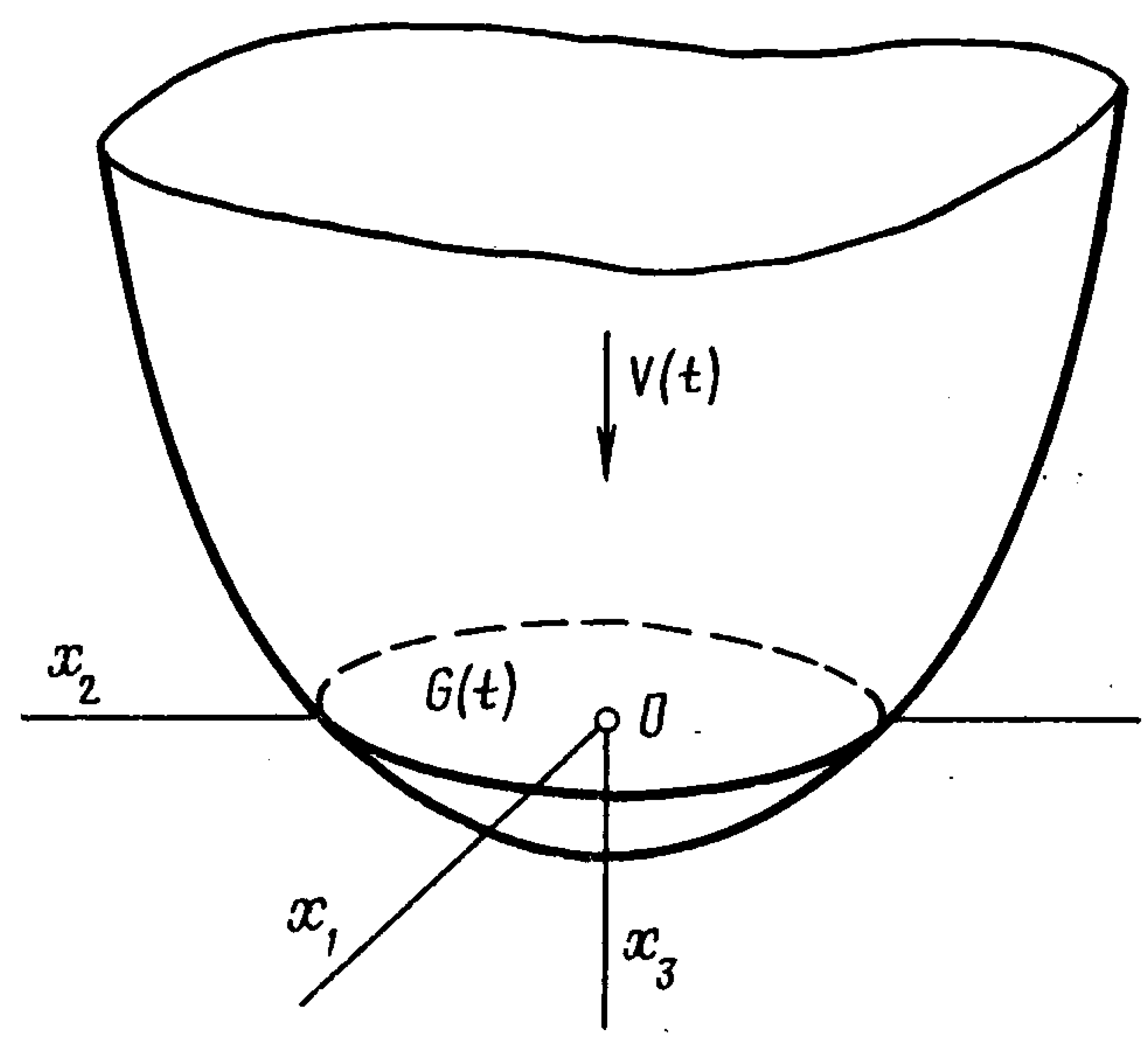
Ранее выражения для результирующих усилий были получены другими методами в следующих задачах: о вертикальном вдавливании для акустической [1] и изотропной упругой сред [2, 3], о вдавливании с поворотом для изотропной упругой среды [4], о вертикальном вдавливании в анизотропную упругую среду [5].

1. Постановка задачи. Рассмотрим сплошную среду, в которой связь между тензорами напряжений σ и малых деформаций ε задана в виде

$$\sigma = F(\varepsilon),\ \varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \tag{1.1}$$

где F — некий оператор, а u_i — компонента вектора перемещений. Будем предполагать, что скорость распространения возмущений в этой среде конечна, а сама среда занимает положительное полупространство $\mathbf{R}_+^3$.

Пусть гладкое затупленное тело, форма которого определяется графиком неотрицательной функции $f(x_1, x_2)$, вдавливается в первоначально покоящееся полупространство $\mathbf{R}_+^3$. Выберем начало декартовой системы координат в точке первоначального контакта тела со средой. Направим ось x_3 в глубь полупространства, а оси x_1 и x_2 по его границе. Рассмотрим сначала вертикальное вдавливание с положительной скоростью $V(t)$ (фиг. 1). Тогда глубина вдавливания вершины тела H определяется по формуле



Фиг. 1

$$H(t) = \int_0^t V(\lambda)\, d\lambda \tag{1.2}$$

Возьмем сечение поверхности тела на высоте $H(t)$ и спроектируем его на плоскость $x_3 = 0$. Скорость распространения границы этой проекции в точке x_1, x_2 равна $V(t)\,|\operatorname{grad} f(x_1, x_2)|^{-1}$. У затупленного тела $|\operatorname{grad} f(0, 0)| = 0$. Поэтому для любой конечной скорости распространения возмущения в среде существует интервал времени, на котором скорость распространения границы проекции сечения тела превышает максимальную скорость распространения возмущений в среде a.

Пусть G — область контакта тела со средой, ∂G — ее граница, а $\gamma(x_1^*, x_2^*, t)$, $(x_1^*, x_2^*) \in \partial G$ — скорость движения ∂G. Будем рассматривать задачу на интервале времени $[0, T]$, на котором справедливо равенство

$$\gamma(x_1, x_2, t) = V(t)\,|\operatorname{grad} f(x_1, x_2)|^{-1} \tag{1.3}$$

Если начальная скорость $V(0)$ ненулевая, то величина T отлична от нуля. Говорят, что на интервале $[0, T]$ процесс вдавливания носит сверхсейсмический характер. Равенство (1.3) заведомо выполняется, если скорость $\gamma(x_1, x_2, t)$ больше величины a (и может выполняться еще некоторое время потому, что скорость распространения возмущения в направлении, лежащем в горизонтальной плоскости и ортогональном поверхности тела, может быть меньше максимальной).

Пример. Пусть параболоид вращения вдавливается в среду с постоянной скоростью V_0, т. е.

$$f(x_1, x_2) = Ar^2, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad A > 0, \quad V(t) \equiv V_0$$

Тогда из условия

$$T \geqslant t_1, \ \gamma(x_1^*, x_2^*, t_1) = a$$

получаем следующую оценку $T \geqslant V_0/(4a^2A)$.

Очевидно, что при $t \in [0, T]$ в точках $\partial G(t)$ компонента u_3 вектора перемещений будет испытывать излом, т. е. u_3 негладка. Поэтому будем рассматривать слабые решения задачи.

Считаем, что $\mathbf{u}$ и σ удовлетворяют условиям

$$\int_0^T \int_{\mathbf{R}_+^3} (\rho\varphi_\alpha{}^{\cdot}\partial^{\cdot}u_\alpha - \varphi_{\alpha,j}\sigma_{\alpha j} + \varphi_\alpha X_\alpha)\,d\mathbf{v}\,dt = 0 \tag{1.4}$$

$$\forall\varphi \in C_0{}^1(\mathbf{R}_+{}^3\times[0, T]), \quad \mathbf{u} \in W_2{}^1(\mathbf{R}_+{}^3\times[0, T])$$

Здесь и далее запятая перед индексом означает производную по соответствующей координате; ∂_i и $\partial^{\cdot}$ обобщенные (в смысле Соболева) производные по координатам и времени соответственно; по повторяющимся латинским индексам предполагается суммирование от 1 до 3, по повторяющимся греческим индексам нет суммирования; $W_2{}^1$ — пространство Соболева; $C_0{}^1$ — множество непрерывно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль на границе области определения и имеющие компактный носитель; ρ — плотность среды; X_α — компонента поля объемных сил.

Поставим начально-краевую задачу о динамическом вдавливании. Ищем $\mathbf{u}$ и σ, связанные условиями (1.1) (в которых производные заменены на обобщенные) и удовлетворяющие условиям (1.4). Считаем, что функция $\mathbf{u}$ непрерывна и удовлетворяет обобщенным начальным и граничным условиям

$$\int_0^T \int_{\mathbf{R}_+^3} (\rho\varphi_\alpha{}^{\cdot}\partial^{\cdot}u_\alpha - \varphi_{\alpha,j}\sigma_{\alpha j} + \varphi_\alpha X_\alpha)\,d\mathbf{v}\,dt + \int_{\mathbf{R}_+^3} \rho(\mathbf{x})\,\varphi_\alpha(\mathbf{x}, 0)\,v_\alpha{}^0(\mathbf{x})\,d\mathbf{v} +$$

$$+ \int_0^T \int_{\mathbf{R}^2} \varphi_\alpha T_\alpha\,dx_1\,dx_2\,dt = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}), \ u_3(x_1, x_2, 0, t) = g(x_1, x_2, t), \quad (x_1, x_2) \in G(t)$$

Здесь $\mathbf{u}^0$ и $\mathbf{v}^0$ — начальные перемещения и скорости точек среды соответственно, T_1 и T_2 — заданные на всей граничной плоскости касательные усилия, T_3 — заданные вне области контакта нормальные усилия, g — функция, известная в области $G(t)$, интегральное тождество выполнено для любых функций φ, таких, что

$$\varphi \in C^1(\mathbf{R}_+^3 \times [0, T]),\ \varphi(\mathbf{x}, T) = 0,\ \varphi_3(x_1, x_2, 0, t) = 0,\ (x_1, x_2) \in G(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T$$

В рассматриваемой задаче $\mathbf{u}^0 \equiv \mathbf{v}^0 \equiv T_1 \equiv T_2 \equiv 0$, $T_3(x_1, x_2, t) = 0$, $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \setminus G(t)$, а на сверхсейсмическом этапе функция $g(x_1, x_2, t)$ известна на всей граничной плоскости полупространства. Поэтому начальные и граничные условия можно записать в следующем виде:

$$\begin{gathered}\int_0^T \int_{\mathbf{R}_+^3} (\rho\varphi_\alpha^{\boldsymbol{\cdot}} \partial^{\boldsymbol{\cdot}} u_\alpha - \varphi_{\alpha,j}\sigma_{\alpha j} + \varphi_\alpha X_\alpha)\, d\mathbf{v}dt = 0 \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = 0,\ u_3(x_1, x_2, 0, t) = g(x_1, x_2, t)\end{gathered} \qquad (1.5)$$

Интегральное тождество выполнено для всех функций φ, таких, что

$$\varphi \in C^1(\mathbf{R}_+^3 \times [0, T]),\quad \varphi(\mathbf{x}, T) = 0,\quad \varphi_3 \in C_0^1(R_+^3),\quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

Будем считать, что для рассматриваемой среды условия теоремы единственности выполнены (теоремы единственности слабых решений для акустических, упругих и вязкоупругих сред рассмотрены в ряде работ [6—8]).

2. Интегральные характеристики решений динамических задач. Введем следующие интегральные характеристики:

$$\begin{gathered}\mathbf{w}(x_3, t) = \iint \mathbf{u}dx_1dx_2,\quad \mathbf{g}_i(x_3, t) = \iint \partial_i \mathbf{u} dx_1dx_2 \\ \mathbf{g}_4(x_3, t) = \iint \partial^{\boldsymbol{\cdot}} \mathbf{u} dx_1 dx_2,\quad \Sigma_{ij}(x_3, t) = \iint \sigma_{ij} dx_1 dx_2\end{gathered} \qquad (2.1)$$

где интегрирование в плоскости x_1x_2 всюду ведется по области $\mathbf{R}^2$.

Пусть $\mathbf{u}$ и σ удовлетворяют условиям (1.4) и носитель этих функций ограничен при $0 \leqslant t \leqslant T$. Тогда справедливо следующее утверждение (см. [9]).

Лемма. Интегральные характеристики, введенные в (2.1), обладают следующими свойствами:

1) $\mathbf{w}$, $\mathbf{g}_i$, $\mathbf{g}_4$ определены почти всюду в $R_+ \times [0, T]$ и суммируемы;

2) $\mathbf{g}_3$ и $\mathbf{g}_4$ — обобщенные производные функции $\mathbf{w}(x_3, t)$ по x_3 и t соответственно;

3) $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$ равны нулю почти для всех x_3 и t;

4) $\mathbf{w}(x_3, t) \in W_2^1(R_+ \times [0, T])$;

5) $\mathbf{g}_3$ и $\mathbf{g}_4$ — функции из $L_2(\mathbf{R}_+ \times [0, T])$.

Пусть $\mathbf{u}$ и σ — слабое решение задачи (1.1), (1.4) и (1.5). Тогда в силу конечности скорости распространения возмущений в среде и ограниченности носителей функции $\mathbf{u}$ и σ в начальный момент носители функций $\mathbf{u}$ и σ ограничены при любом конечном t. Итак, условия леммы выполнены.

Пусть $\mathbf{X}$ и ρ не зависят от x_1 и x_2.

Утверждение 1. Вектор $\mathbf{w}$ и тензор Σ_{ij}, введенные в (2.1), удовлетворяют следующей начально-краевой задаче:

$$\mathbf{w} \in W_2^1(R_+ \times [0, T]);\quad \mathbf{w} \in C(R_+ \times [0, T]) \qquad (2.2)$$

$$\mathbf{w}(x_3, 0) = 0;\ w_3(0, t) = Y(t),\ Y(t) = \iint g(x_1, x_2, t)dx_1, dx_2$$

$$\int_0^T \int_{R_+} (\rho\psi_\alpha{}^{\cdot}\partial^{\cdot} w_\alpha - \psi_{\alpha, 3}\Sigma_{\alpha 3} + \psi_\alpha X_\alpha)\, dx_3 dt = 0$$

Последнее тождество выполнено для любых функций ψ, таких, что

$$\psi(x_3, t) \in C^1(R_+ \times [0, T]), \quad \psi(x_3, T) = 0, \quad \psi_3 \in C_0{}^1(R_+), \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

Доказательство. Возьмем $\mathbf{u}$ и σ — решение задачи (1.1), (1.4), (1.5) и построим для него интегральные характеристики. Применив лемму, убедимся в справедливости утверждения.

Заметим, что в общем случае, если оператор F, стоящий в (1.1), нелинеен, то нельзя установить связь между компонентами тензора Σ_{ij} и вектора $\mathbf{w}$; если же оператор F линеен, то компоненты Σ_{ij} однозначно определяются по $\mathbf{w}$.

Теорема. Если сплошная среда однородна по координатам x_1, x_2 и соотношения (1.1) линейны, а также если функции $\mathbf{X}$ и ρ не зависят от координат x_1 и x_2, то нахождение интегральных характеристик решений динамической проблемы (1.1), (1.4) и (1.5) о вдавливании затупленного тела в полупространство $\mathbf{R}_+{}^3$, заполненное этой средой, эквивалентно начально-краевой задаче (2.2) о распространении в этой среде плоских волн.

Доказательство. Возьмем решение рассматриваемой проблемы, с помощью (2.1) введем вектор $\mathbf{u}$ и тензор σ и непосредственной проверкой убедимся в справедливости теоремы.

Замечание. Пусть $\mathbf{v}$ — вектор внешней нормали к поверхности $x_3 = 0$. Тогда можно ввести вектор интегрального усилия $\mathbf{N}$: $N_i = \Sigma_{ij}\nu_j$, а сила взаимодействия между телом и средой равна

$$P = -\langle \mathbf{N}(0, t), \mathbf{v}\rangle \equiv -\Sigma_{33}(0, t) \tag{2.3}$$

Ниже рассмотрим случаи вдавливания в конкретные среды при $X_\alpha \equiv 0$.

3. Среда с начальными напряжениями. Пусть нелинейно-упругая среда предварительно напряжена однородными усилиями на бесконечности. Считаем, что напряжения, вызванные контактом тела со средой, малы по сравнению с начальными. Если ввести декартовы координаты x_1, x_2, x_3 начально деформированного состояния [10], то уравнения движения и линеаризованные определяющие соотношения будут иметь вид

$$Q_{ij,\,i} - \rho u_j{}^{\cdot\cdot} = 0, \quad Q_{ij} = \omega_{ijkl} u_{k,\,l} \tag{3.1}$$

где Q_{ij} — компоненты несимметричного тензора «истинных» напряжений, а ω_{ijkl} — компоненты постоянного (в силу однородности) тензора четвертого ранга. Компоненты ω_{ijkl} обладают следующими свойствами симметрии [10]:

$$\omega_{ijkl} = \omega_{lkji} \tag{3.2}$$

Введем симметричную в силу (3.2) матрицу $\Lambda_{ij} = \omega_{3ij3}/\rho$. Из теоремы Адамара [10] следует, что собственным векторам $\mathbf{e}_i$ этой матрицы соответствуют положительные собственные числа c_i^2.

Утверждение 2. Обобщенное решение $\mathbf{w}$ и $\mathbf{N}$ задачи (2.2), (3.1) определяется формулами

$$\mathbf{w}(x_3, t) = \alpha_i c_i^{-1} q Y(t - x_3/c_i)\mathbf{e}_i, \quad q \equiv c_i/\alpha_i^2 \tag{3.3}$$

$$\mathbf{N}(x_3, t) = -\rho\alpha_i q Y'(t - x_3/c_i)\mathbf{e}_i$$

где α_i — коэффициенты в разложении вектора $\mathbf{v}$ по базису $\mathbf{e}_i$, а штрих означает производную.

Доказательство совершенно аналогично доказательству соответствующего утверждения для анизотропной линейно упругой среды [5, 9].

Следствие. Сила взаимодействия тела со средой определяется по формуле

$$P = -\rho q V(t) S(t) \tag{3.4}$$

где $S(t)$ — площадь области $G(t)$.

Действительно, в задаче о вертикальном вдавливании функция $Y(t)$ представляет собой объем тела под срезом на высоте $H(t)$. Тогда при учете (1.2) получим

$$Y'(t) = V(t)\, S(t) \tag{3.5}$$

Из (2.3), (3.3) и (3.5) получаем (3.4).

Заметим, что динамические контактные задачи для тел с начальными напряжениями рассматривались пока только в плоском случае [11].

Если рассмотреть задачу о вертикальном ударе тела массой m по поверхности полупространства с начальными напряжениями, то скорость тела после соударения определяется так же, как и в задаче о соударении с акустической средой [12]. В частности, если тело — эллиптический параболоид, т. е. $f(x_1, x_2) = Ax_1^2 + Bx_2^2$, $B > A > 0$, то скорость тела после соударения определяется по формуле

$$V(t) = 4V_0 \frac{e^{\beta t}}{(e^{\beta t}+1)^2}, \quad \beta = \left(\frac{2\pi\rho q V_0}{m\sqrt{AB}}\right)^{1/2} \tag{3.6}$$

где V_0 — начальная скорость тела. Эта формула (3.6) является точной до тех пор, пока выполняется равенство (1.3).

4. Вдавливание в вязкоупругие среды. Пусть среда, заполняющая полупространство $\mathbf{R}_+^3$, линейно-вязкоупругая. Запишем выражения для интегральных характеристик решения в этом случае.

Здесь и ниже будем искать обобщенное решение среди кусочно-гладких функций [13]. Можно показать, что обобщенные кусочно-гладкие решения динамических задач лежат среди слабых решений.

Среда Максвелла. Определяющие соотношения для этой среды имеют вид

$$\sigma(t) = 3K\varepsilon(t) - \frac{3K}{t_v}\int_0^t \varepsilon(\lambda)\exp\left(\frac{\lambda - t}{t_v}\right)d\lambda \tag{4.1}$$

$$\sigma_{ij}^D(t) = 2\mu\varepsilon_{ij}^D(t) - \frac{2\mu}{t_s}\int_0^t \varepsilon_{ij}^D(\lambda)\exp\left(\frac{\lambda - t}{t_s}\right)d\lambda$$

$$\sigma \equiv \sigma_{kk}/3, \quad \varepsilon \equiv \varepsilon_{kk}/3, \quad \sigma_{ij}^D \equiv \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma$$

$$\varepsilon_{ij}^D \equiv \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon$$

где K и μ — объемный и сдвиговый упругие модули соответственно, а t_v и t_s — объемное и сдвиговое время релаксации соответственно. Подставив эти выражения в (2.1) и уравнения движения, получим уравнения для w_1 и w_2

$$w_i^{\cdot\cdot} + w_i^{\cdot}/t_s - (\mu/\rho)\, w_{i,33} = 0, \quad i = 1, 2$$

решением которых с учетом граничных условий и в силу единственности является $w_1(x_3, t) = w_2(x_3, t) = 0$.

В случае $t_s = t_v$ интегральное перемещение w_3 удовлетворяет уравнению

$$w_3^{\cdot\cdot} + w_3^{\cdot}/t_s - c_0^2 = 0, \quad c_0^2 \equiv (4\mu/3 + K)/\rho$$

решение которого при учете граничных условий имеет вид [14]

$$w_3(x_3, t) = h(t-\tau)\left\{Y(t-\tau)\exp\left(-\frac{\tau}{2t_s}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\tau}{2t_s}\int\limits_{\tau}^{t}\frac{Y(t-\lambda)}{\sqrt{\lambda^2-\tau^2}}\exp\left(-\frac{\lambda}{2t_s}\right)I_1\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-\tau^2}}{2t_s}\right)d\lambda\right\}, \quad \tau=\frac{x_3}{c_0}$$

где h и I_1 — функция Хевисайда и Бесселя соответственно, а τ — время, за которое возмущение доходит до точки с координатой x_3.

Отсюда и из (4.1) получаем выражения

$$\partial w_3(0, t)/\partial x_3 = c_0^{-1}h(t)\left[-Y'(t) - Y(t)/(2t_s) + Q(t)\right]$$
$$P(t) = -\rho c_0\left[Y'(t) + Y(t)/(2t_s) - Q(t)\right]$$
$$\Sigma_{33}(x_3, t) = \rho c_0^2\left[\frac{\partial w_3}{\partial x_3} - \frac{1}{t_s}\int\limits_0^t\frac{\partial w}{\partial x_3}(x_3, \lambda)\exp\frac{\lambda-t}{t_s}d\lambda\right]$$
$$Q(t) = \frac{1}{2t_s}\int\limits_0^t\frac{Y(t-\lambda)}{\lambda}I_1\left(\frac{\lambda}{2t_s}\right)\exp\left(-\frac{\lambda}{2t_s}\right)d\lambda$$

Среда Фойгхта. Связь напряжений с деформациями в этом случае можно записать в виде

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}\varepsilon_{kk}(K - 2\mu/3) + 2\mu t_s\dot{\varepsilon}_{ij} + (Kt_v - 2\mu t_s/3)\dot{\varepsilon}_{kk}\delta_{ij} \quad (4.2)$$

где t_s и t_v — время запаздывания при сдвиге и объемном сжатии соответственно. Уравнение распространения плоской волны в этой среде имеет вид

$$(K + 4\mu/3)w_{3,33} + \nu\dot{w}_{3,33} - \rho\ddot{w}_3 = 0, \quad \nu = Kt_v + 4\mu t_s/3$$

и его решение при учете начальных и граничных условий (2.2) записывается следующим образом [15]:

$$w_3(x_3, t) = \int\limits_0^t Y'(\lambda)\psi(x_3, t-\lambda)d\lambda$$
$$\psi(x_3, t) = \int\limits_{\xi}^{\infty} I_0\left[2\sqrt{\xi(\lambda-\xi)}\right]\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}}\exp\left(-\frac{\lambda^2}{4\alpha}-\alpha\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\left[e^{-\lambda}\operatorname{erfc}\left(\frac{\lambda}{2\sqrt{\alpha}}-\sqrt{\alpha}\right) - e^{\lambda}\operatorname{erfc}\left(\frac{\lambda}{2\sqrt{\alpha}}+\sqrt{\alpha}\right)\right]\right\}d\lambda$$
$$\alpha \equiv \frac{\rho c_0^2 t}{\nu}, \quad \xi = \frac{\rho c_0 x_3}{\nu}$$

Выражение для силы контактного взаимодействия при учете соотношений (2.3) и (4.2) имеет вид

$$P(t) = -\rho\left[c_0^2 w_{3,3}(0, t) + \nu\dot{w}_{3,3}(0, t)/\rho\right]$$

Ортотропная линейная наследственно-упругая среда. Будем считать, что оси ортотропии совпадают с осями координат.

В динамической задаче (2.2) тип граничных условий не меняется на всем протяжении процесса, поэтому для рассматриваемой задачи справедлив принцип соответствия Вольтерры [16]. Исходя из этого принципа возьмем выражение для силы взаимодействия тела с ортотропной упругой средой [9] и заменим функцию от упругих постоянных (скорость волн a вдоль оси x_3) соответствующим оператором ($\{a + A^*\}$, где A^* — оператор Вольтерры с ядром $A(t)$). Тогда для силы контактного взаимодействия получим

$$P(t) = -\rho\left[aY'(t) + Y(t)A(0) + \int\limits_0^t Y(t-\lambda)A'(\lambda)d\lambda\right]$$

Определяющие соотношения для рассматриваемой среды можно записать в виде [16]

$$\sigma_{ij} = \left[E_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\mathrm{x}, t) - \int_0^t \Gamma_{ijkl}(t-\lambda)\,\varepsilon_{kl}(\mathrm{x}, \lambda)\,d\lambda\right]$$

где E_{ijkl} — тензор мгновенных модулей упругости, Γ_{ijkl} — ядро оператора Вольтерры. Тогда для ортотропной среды $a = \sqrt{E_{3333}/\rho}$.

Приведенные выше рассуждения повторяют ход рассуждений, применявшихся ранее при исследовании распространения волн в изотропных вязкоупругих стержнях [17].

5. **Неоднородная по глубине изотропная упругая среда.** Определяющие соотношения для этой среды имеют вид

$$\sigma_{ij} = K(x_3)\,\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu(x_3)\,\varepsilon_{ij}$$

Если при помощи выражений (2.1) ввести интегральные характеристики решений задачи о вдавливании в рассматриваемую среду, то получим, что $w_1 \equiv w_2 \equiv 0$, а w_3 удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left[E(x_3)\frac{\partial}{\partial x_3}w_3\right] - \rho(x_3)\,w_3^{\cdot\cdot} = 0, \quad E(x_3) \equiv \left[K(x_3) + \frac{4}{3}\mu(x_3)\right] \tag{5.1}$$

В полученной начально-краевой задаче для плоской волны возмущенная область отделена от покоящейся поверхностью волнового фронта, который от точки 0 до точки x_3 проходит за время $\tau(x_3)$. Как известно, функция $\tau(x_3)$ удовлетворяет уравнению эйконала [18], из которого находим

$$\tau(x_3) = \int_0^{x_3}\sqrt{\frac{\rho(\lambda)}{E(\lambda)}}\,d\lambda \tag{5.2}$$

Следуя лучевому методу [18], будем искать решение уравнения (5.1) в виде

$$w_3 = \sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(x_3)\frac{[t-\tau(x_3)]^n}{n!} \tag{5.3}$$

Сумма начинается с $n = 1$, так как считаем, что функция w_3 непрерывна, а ее первые производные могут терпеть разрыв на фронте.

Заметим, что из соотношения (5.3) следует

$$w_{3,3} = -\tau' w_3^{\cdot} + \sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n'(x_3)\frac{[t-\tau(x_3)]^n}{n!} \tag{5.4}$$

Отсюда при учете выражения (5.2) для силы взаимодействия тела со средой получаем

$$P(t) = -E(0)\,w_{3,3}(0) = \rho(0)\sqrt{\frac{E(0)}{\rho(0)}}\,Y'(t) - H(t),$$

$$H(t) = E(0)\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n'(0)\frac{t^n}{n!}$$

Пусть k — номер первой не обращающейся в нуль при $t = 0$ производной функции Y. Тогда член $\tau' w_3^{\cdot}(0)$, стоящий в правой части равенства (5.4), имеет порядок t^{k-1}, а член $H(t)$ имеет порядок t^k. Отсюда заключаем, что при малых t первый из этих членов на порядок больше второго.

Итак, с точностью до членов меньшего порядка малости по t выражение для силы взаимодействия естественно совпадает с выражением для этой же силы в однородной среде с плотностью ρ (0) и модулем E (0).

Покажем, как вычислить поправочные члены $\Phi_n'(0)\, t^n/n!$. Для этого подставим ряд (5.3) в уравнение (5.1) и приравняем нулю коэффициенты при $(t-\tau)^n$. Учитывая, что функция τ удовлетворяет уравнению эйконала, получим относительно функций Φ_n систему уравнений

$$\Phi_1' + \Phi_1 (E'/E + \rho'/\rho) / 4 = 0$$
$$\Phi_{n+1}' + \Phi_{n+1} (E'/E + \rho'/\rho) / 4 = \Phi_n'' E/[2(\rho E)^{1/2}] + \Phi_n' E' \qquad (5.5)$$
$$\Phi_n(0) = Y^{(n)}(0)$$

Последнее равенство вытекает из условия $w_3(0, t) = Y(t)$ и соотношения (5.3).

В рассматриваемой задаче $Y(0) = Y'(0) = 0$. Пусть $Y^{(k)}(0) \neq 0$, $Y^{(k-1)}(0) = \ldots = Y'(0) = 0$. Тогда из системы (5.5) получаем

$$\Phi_1(x_3) \equiv \Phi_2(x_3) \equiv \ldots \equiv \Phi_{k-1}(x_3) \equiv 0$$
$$\Phi_k'(0) = -Y^{(k)}(0)(E'/E + \rho'/\rho) / 4$$

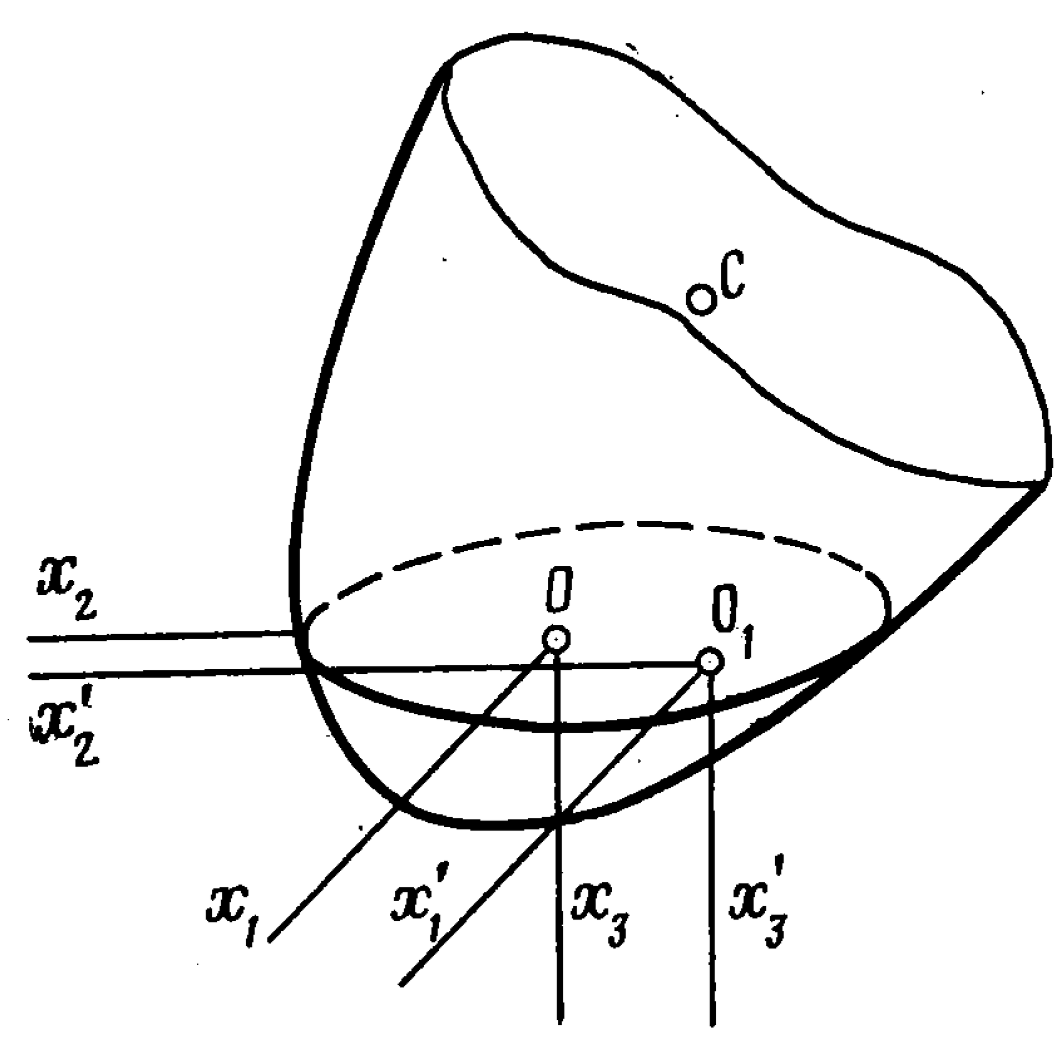
Отсюда следует, что первый поправочный член в выражении для силы взаимодействия имеет вид

$$\Phi_k'(0)\, t^k/k! = -Y^{(k)}(0)\, t^k (E'/E + \rho'/\rho) / (4k!)$$

Последовательно дифференцируя уравнение для Φ_k, вычисляем значения всех производных функции Φ_k в точке 0. Подставляя найденные производные в следующее уравнение, найдем Φ_{k+1}' **(0)**. Последовательно повторяя описанную процедуру находим все $\Phi_n'(0)$.

Замечание. Разные методы исследования распространения плоских волн в неоднородных упругих и вязкоупругих средах изложены в ряде работ (например, [17—20]). Из доказанной выше теоремы вытекает, что эти методы применимы при исследовании интегральных характеристик решений пространственных задач о динамическом вдавливании твердых тел в неоднородные по глубине среды с линейным определяющими соотношениями.

6. Вдавливание с поворотом тела. Выша рассматривались случаи вертикального вдавливания затупленного тела в различные сплошные среды. Следуя [4], распространим все вышеприведенные результаты об интегральных характеристиках решений на случай, когда вдавливание тела в полупространство происходит с поворотом (фиг. 2).



Фиг. 2

Пусть C — центр масс тела и известна угловая скорость тела ω и вектор скорости центра масс $\mathbf{v}^C$.

Интеграл вертикальных перемещений точек граничной плоскости $Y(t)$ на сверхсейсмической стадии процесса вдавливания, как и в случае вертикального вдавливания, будет равен объему внедрившейся части тела. При вдавливании с поворотом скорости точек области $G(t)$ будут различными и изменение объема $Y(t)$ за промежуток времени Δt будет определяться по формуле

$$\Delta Y(t) = \iint\limits_{G(t)} v_3(x_1, x_2, 0, t)\, \Delta t\, dx_1 dx_2 \qquad (6.1)$$

Введем систему координат $O_1x_1'x_2'x_3'$ (фиг. 2), которая получается параллельным переносом системы $Ox_1x_2x_3$ в плоскости $x_3 = 0$ в точку O_1, где O_1 — проекция точки C на граничную плоскость. Тогда по теореме Эйлера получаем

$$v_3(x_1',\ x_2',\ 0,\ t) = v_3(0,\ 0,\ 0,\ t) + \omega_1 x_2' - \omega_2 x_1' \tag{6.2}$$

а из (6.1) и (6.2) следует

$$Y'(t) = v_3^C S + \omega_1 S_1^* - \omega_2 S_2^*$$

где S_i^* — статический момент области $G(t)$ относительно оси x_i'.

Таким образом, как при вертикальном вдавливании, так и при вдавливании с поворотом нахождение интегральных характеристик решений эквивалентно задаче о распространении плоских волн в рассматриваемой линейной среде.

Автор благодарит А. Г. Хованского за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Skalak R., Feit D.* Impact on the surface of a compressible fluid // Trans. ASME. Ser. B. J. Eng. Industry. 1966. V. 88. № 3. P. 325—331; *Скалак Р., Фейт Д.* Удар о поверхность сжимаемой жидкости // Конструирование и технология машиностроения. 1966. Т. 88. № 3. С. 97—104.
2. *Симонов И. В.* Динамическая задача о вдавливании осесимметричного штампа в упругое полупространство // Инж. журн. МТТ. 1967. № 2. С. 163—165.
3. *Robinson A. R., Thompson J. C.* Transient disturbances in a half-space during the first stage of frictionless identation of a smooth rigid die of arbitrary shape // Quart. Appl. Math. 1975. V. 33. № 3. P. 215—223.
4. *Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В.* Результирующие реакции в пространственной задаче об ударе твердым телом по упругому полупространству // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 95—98.
5. *Бородич Ф. М.* Динамический контакт затупленного тела с анизотропной линейно-упругой средой // Докл. АН СССР. 1990. Т. 310. № 1. С. 38—42.
6. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.
7. *Brockway G. S.* On the uniqueness of singular solutions to boundary-initial value problems in linear elastodynamics // Archive Ration. Mech. and Analysis. 1972. V. 48. № 3. P. 213—244.
8. *Рущицкий Я. Я.* Об одном способе изучения свойств обобщенного решения в теории композитных сред // Прикл. механика. 1973. Т. 9. № 2. С. 60—66.
9. *Бородич Ф. М.* Пространственная задача об ударе затупленным телом по поверхности упругого анизотропного полупространства // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 4. С. 50—58.
10. *Гузь А. Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями. Т. 2. Закономерности распространения. Киев: Наук. думка, 1986. 535 с.
11. *Бабич С. Ю.* К исследованию динамической контактной задачи для полуплоскости с начальными напряжениями // Прикл. механика. 1987. Т. 23. № 4. С. 39—43.
12. *Бородич Ф. М.* О задачах взаимодействия затупленных тел с акустической средой // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 610—616.
13. *Поручиков В. Б.* Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
14. *Doetsch G.* Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation. München: R. Oldenbourg. 1956. 198 p. М.: Физматгиз, 1958. 206 с.
15. *Зверев И. Н.* Распространение возмущений в вязко-упругом и вязко-пластическом стержне // ПММ. 1950. Т. 14. Вып. 3. С. 295—302.
16. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
17. *Филиппов И. Г., Ширинкулов Т. Ш., Мирзакабилов С.* Нестационарные колебания линейных упругих и вязкоупругих сред. Ташкент: Фан, 1979. 236 с.
18. *Whitham G. B.* Linear and nonlinear waves. New York; London: Wiley, 1974. 636 p. М.: Мир, 1977. 624 с.
19. *Победря Б. Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
20. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.

Москва

Поступила в редакцию
13.IX.1989