

УДК 539.375

© 1991 г.

Р. В. Гольдштейн, Ю. В. Житников

**СМЕШАННЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ
УПРУГОСТИ С КРУГОВОЙ ЛИНИЕЙ РАЗДЕЛА
ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ**

Рассматриваются смешанные задачи для уравнения Лапласа в полупространстве, возникающие в теории контактного взаимодействия и теории трещин. Линии раздела типа краевого условия считаются круговыми, однако задача может быть неосесимметричной. Установлены специальные интегральные соотношения между компонентами преобразования Фурье гармонической функции и ее производных в указанных задачах. В качестве примера строится решение задачи о кольцевой трещине отрыва в безграничной среде при неосесимметричных нагрузках. Другие примеры содержатся в [1—7] и в препринте¹, где рассмотрена контактная задача.

Применяемый в данной работе способ построения основных соотношений наиболее близок к предложенному в [3]. Различные подходы к построению решения смешанных задач для гармонической функции в полупространстве с круговой линией раздела в неосесимметричной постановке рассмотрены в [1—4].

1. Основные представления для гармонической функции. Пусть $f(r, \beta, x_3)$ — гармоническая функция в полупространстве $x_3 > 0$ ((r, β, x_3) — цилиндрические координаты). Ее можно представить в виде ряда

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \exp(in\beta)$$

$$f_n = \int_0^{\infty} A_n(q) J_n(qr) \exp(-qx_3) q dq \quad (1.1)$$

$$A_n(q) = \int_0^{\infty} f_n(r, 0) J_n(q, r) r dr$$

Рассмотрим сначала случай $n \geq 0$. Для преобразования выражения (1.1) воспользуемся известными представлениями [7]

$$J_\nu \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} = \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-1/2} \cos zt dt, \quad \operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2} \quad (1.2)$$

$$J_\nu \Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right) \left(\frac{z}{2}\right)^\nu = 2 \int_1^{\infty} (t^2 - 1)^{-\nu-1/2} \sin zt dt, \quad 0 < \operatorname{Re} \nu < \frac{1}{2} \quad (1.3)$$

Эти представления можно рассматривать как преобразование Фурье над симметричной и антисимметричной относительно точки $t = 0$ функциями $(1 - t^2)^{\nu-1/2}$, $(t^2 - 1)^{-\nu-1/2}$.

Продолжим аналитически левые части выражений (1.2) и (1.3) соответственно в область $\operatorname{Re} \nu < -1/2$, $\operatorname{Re} \nu > 1/2$. При этом правые части будем рассматривать как косинус- и синус-преобразования Фурье над обобщенными функциями $(1 - t^2)_+^{\nu-1/2}$, $(t^2 - 1)_+^{-\nu-1/2}$.

¹ Гольдштейн Р. В., Житников Ю. В. Смешанные задачи теории упругости с круговой линией раздела. Трещины отрыва. Контактные задачи с трением при сложном нагружении. Препринт ИПМ АН СССР, № 365, 1988, 41 с.

Положим в (1.2) $\nu = -n$, а в (1.3) $\nu = n$ и примем $z = rq$. Тогда:

$$\frac{J_n \pi r^{-n}}{2(2n-1)!!} q^n = \int_0^\infty (r^2 - x^2)_+^{-n-1/2} \cos qx dx$$

$$\frac{J_n \pi r^{-n} (-1)^n}{2(2n-1)!!} q^n = \int_0^\infty (x^2 - r^2)_+^{-n-1/2} \sin qx dx$$

Подставляя эти выражения в (1.1) и изменяя порядок интегрирования, получим

$$f_n = r^n (2n-1)!! \int_0^\infty (r^2 - x^2)_+^{-n-1/2} \psi_n^{(1)}(x, x_3) dx \quad (1.4)$$

$$\psi_n^{(1)}(x, x_3) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty A_n(q) \exp(-qx_3) q^{-n+1} \cos qx dq \quad (1.5)$$

$$f_n = r^n (2n-1)!! (-1)^n \int_0^\infty (x^2 - r^2)_+^{-n-1/2} \psi_n^{(2)}(x, x_3) dx \quad (1.6)$$

$$\psi_n^{(2)}(x, x_3) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty A_n(q) \exp(-qx_3) q^{-n+1} \sin qx dq \quad (1.7)$$

Из выражения (1.1) для $A_n(q)$ имеем $J_n(qr) \sim (qr)^n$ при $q \rightarrow 0$. Следовательно, функция в подынтегральном выражении (1.5), (1.7) интегрируема и затухает при $x_3 \rightarrow \infty$. Будем полагать пока, что $n \geq 0$. Тогда f_n в (1.4), (1.6) затухает при $r \rightarrow \infty$, $x_3 \rightarrow \infty$. При этом функции $\psi_n^{(1)}(x, x_3)$, $\psi_n^{(2)}(x, x_3)$ удовлетворяют двумерному уравнению Лапласа и являются аналитическими.

Рассмотрим теперь следующие выражения для $f_n(r, x_3)$ и $\partial f_n(r, x_3)/\partial x_3$, необходимые для построения интегральных соотношений. В (1.4) возьмем производную по x_3 .

Тогда с учетом интеграла $\psi_n^{(1)}$ в пределах от 0 до x получим, используя соотношение (1.7)

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_3}(r, x_3) = r^n (2n+1)!! \int_0^\infty (r^2 - x^2)_+^{-n-3/2} \psi_n^{(2)}(x, x_3) x dx \quad (1.8)$$

Для установления связи между (1.8) и (1.6) воспользуемся соотношениями [3]

$$\left(\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x}\right)^n (x^2 - r^2)_+^{-1/2} = (-1)^n (2n-1)!! (x^2 - r^2)_+^{-n-1/2} \quad (1.9)$$

$$\left(\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x}\right)^n \left[\frac{x^{2n+1}}{r^{2n}} (r^2 - x^2)_+^{-3/2} \right] = (2n+1)!! (r^2 - x^2)_+^{-n-3/2} x$$

Первое соотношение (1.9) очевидно, второе доказывается методом математической индукции.

Введем функцию

$$\Phi^{(2)}(x, x_3) = x \left(\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x}\right)^n \left[\frac{\psi^{(2)}(x, x_3)}{x} \right]$$

Тогда, используя соотношение (1.9), получим что соотношения (1.8) и (1.6) после интегрирования по частям примут вид [3]

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_3} = r^{-n} \int_0^\infty (r^2 - x^2)_+^{-3/2} x^{2n+1} \Phi_n^{(2)}(x, x_3) dx \quad (1.10)$$

$$f_n(r, x_3) = r^n \int_0^\infty (x^2 - r^2)_+^{-1/2} \Phi_n(x, x_3) dx \quad (1.11)$$

Теперь воспользуемся соотношениями [3]

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} (x_1^2 - r^2)_+^{-1/2} (r^2 - x^2)_+^{-1/2} r dr = H(x_1 - x) \quad (1.12)$$

Беря в (1.10) интеграл по частям, а затем полученное соотношение домножим на $r^n (x_1^2 - r^2)_+^{-1/2} r dr$, а (1.11) на $r^{-n} (r^2 - x_1^2)_+^{-1/2} r dr$ с учетом 1.12 получим после интегрирования от 0 до ∞ , и дифференцирования второго соотношения по x_1 два представления для функции $\Phi_n^{(2)}(x, x_3)$, сравнивая которые получим первое интегральное соотношение

$$x_1^{2n+1} \int_{x_1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial r} (r^{-n} f_n) W(r, x_1) dr = \int_0^{x_1} \frac{\partial f_n}{\partial x_3} W(x_1, r) r^{n+1} dr \quad (1.13)$$

Здесь введено следующее обозначение $W(r, x_1) \equiv (r^2 - x_1^2)^{-1/2}$, $W(x_1, r) \equiv (x_1^2 - r^2)^{-1/2}$, которое в дальнейшем будет использовано.

Для получения второго интегрального соотношения в (1.6) возьмем производную по x_3 и с учетом (1.5) и (1.7) получим

$$f_n = r^n (2n - 1)!! \int_0^{\infty} (r^2 - x^2)_+^{-n-1/2} \psi_n^{(1)}(x, x_3) dx \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_3} = r^n (2n - 1)!! \int_0^{\infty} (x^2 - r^2)_+^{-n-1/2} \frac{\partial \psi_n^{(1)}}{\partial x} dx \quad (1.15)$$

Для установления связи между (1.14) и (1.15) воспользуемся соотношением (1.9) и соотношением

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \right)^{n-1} [x^{2n-1} (r^2 - x^2)_+^{-1/2}] = (2n - 1)!! (r^2 - x^2)_+^{-n-1/2} r^{2n}$$

Доказательство этих соотношений, аналогично доказательству соотношений (1.9). Тогда, беря в (1.14) и (1.15) интегралы по частям, с учетом последних соотношений, получим, вводя функцию

$$\Phi_n^{(1)}(x, x_3) = \partial [(x^{-1} \partial / \partial x)^n \psi_n^{(1)}(x, x_3)] / \partial x$$

$$f_n = r^{-n} \int_0^{\infty} (r^2 - x^2)_+^{-1/2} x^{2n-1} \Phi_n^{(1)} dx \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_3} = r^n \int_0^{\infty} (x^2 - r^2)_+^{-1/2} \frac{\partial (\Phi_n^{(1)} x^{-1})}{\partial x} dx \quad (1.17)$$

Домножим (1.16) и (1.17) на $r^n (x_1^2 - r^2)_+^{-1/2} r dr$ и на $r^{-n} (r^2 - x_1^2)_+^{1/2} r dr$ соответственно и проинтегрируем с учетом (1.12) от 0 до ∞ . Затем первое из полученных соотношений продифференцируем по x_1 после чего приходим к двум представлениям функции $\Phi_n^{(1)}(x_1, x_3)$, сравнивая которые получим второе интегральное соотношение

$$D_n + x_1 \int_0^{x_1} \frac{\partial}{\partial r} (f_n r^n) W(x_1, r) dr = -x_1^{2n} \int_{x_1}^{\infty} \frac{\partial f_n}{\partial x_3} r^{-n+1} W(r, x_1) dr$$

$$D_n = \lim_{r \rightarrow 0} (f_n r^n)$$

Последнее интегральное соотношение и соотношение (1.13) были получены для случая $n \geq 0$. Эти же соотношения сохраняются и для случая $n < 0$ с заменой в них n на $|n|$ [3] и будут иметь вид

$$x_1^{2m+1} \int_{x_1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial r} (r^{-m} f_n) W(r, x_1) dr = \int_0^{x_1} \frac{\partial f_n}{\partial x_3} r^{m+1} W(x_1, r) dr \quad (1.18)$$

$$D_n + x_1 \int_0^{x_1} \frac{\partial}{\partial r} (r^m f_n) W(x_1, r) dr = -x_1^{2m} \int_{x_1}^{\infty} \frac{\partial f_n}{\partial x_3} r^{1-m} W(r, x_1) dr \quad (1.19)$$

$$D_n = \lim_{r \rightarrow 0} (f_n r^m), \quad m = |n|$$

Таким образом, полученные соотношения связывают значение f_n и $\partial f_n / \partial x_3$. В частности, при построении решения смешанной задачи теории упругости в полупространстве $x_3 \geq 0$, когда при $r > R$ известно $\partial f_n / \partial x_3$, $x_3 = 0$, а при $r < R$, $f_n(r, 0)$, то удобно пользоваться (1.19). Если же при $x_3 = 0$ и $r > R$ известно f_n , а при $r < R$, $x_3 = 0$, $\partial f_n / \partial x_3$, то (1.18).

Рассмотрим теперь более общий случай смешанной задачи с двумя линиями раздела краевых условий. Пусть задано краевое условие при $x_3 = 0$

$$f = \varphi_1(r, \beta), \quad 0 \leq r \leq \beta, \quad f = \varphi_2(r, \beta), \quad r \geq a$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = \chi(r, \beta), \quad R \leq r \leq a \quad (1.20)$$

Введем обозначения $\partial f / \partial x_3 = \chi_1(r, \beta)$, $0 \leq r \leq \beta$; $\partial f / \partial x_3 = \chi_2(r, \beta)$, $r \geq a$. Тогда из (1.18) и (1.19) имеем систему уравнений при $x_3 = 0$

$$\int_y^R \chi_{1n} r^{1-m} W(r, y) dr + \int_a^{\infty} \chi_{2n} r^{1-m} W(r, y) dr = F_1(y) \quad 0 \leq y \leq R$$

$$\int_0^R \chi_{1n} r^{1+m} W(y, r) dr + \int_a^y \chi_{2n} r^{1+m} W(y, r) dr = F_2(y) \quad y \geq a \quad (1.21)$$

$$F_1(y) = - \int_R^a \chi_n r^{1-m} W(r, y) dr - y^{-2m} \left[D_n + y \int_0^y \frac{\partial}{\partial r} (\varphi_{1n} r^m) W(y, r) dr \right]$$

$$F_2(y) = - \int_R^a \chi_n r^{m+1} W(y, r) dr + y^{2m+1} \int_y^{\infty} \frac{\partial}{\partial r} (\varphi_{2n} r^{-m}) W(r, y) dr$$

Для получения решения системы (1.21) регуляризуем ее. Домножим первое уравнение на $(y^2 - x^2)^{-1/2} y dy$ и проинтегрируем его от x до R , а затем продифференцируем по x . Второе уравнение домножим на $y dy (x^2 - y^2)^{-1/2}$ и проинтегрируем от a до x , а затем возьмем производную по x . В итоге получим

$$\frac{\pi}{2} \chi_{1n} + x^m W(R, x) \int_a^{\infty} \frac{\chi_{2n} W^{-1}(r, R) r^{-m+1}}{r^2 - x^2} dr = \psi_1(x) \quad 0 \leq x \leq R \quad (1.22)$$

$$\frac{\pi}{2} \chi_{2n} + x^{-m} W(x, a) \int_0^R \frac{\chi_{1n} W^{-1}(a, r) r^{m+1}}{x^2 - r^2} dr = \psi_2(x) \quad x \geq a$$

$$\psi_1(x) = x^m \frac{d}{dx} \int_x^R F_1 y W(y, x) dy = x^m \left(F_1(R) W(R, x) - \int_x^R F_1' W(y, x) dy \right)$$

$$\psi_2(x) = x^{-m} \frac{d}{dx} \int_a^x F_2 y W(x, y) dy = x^{-m} \left(F_2(a) W(x, a) + \int_a^x F_2' W(x, y) dy \right)$$

Заметим, что в частном случае $\varphi_1(r, \beta) \equiv 0$, $0 \leq r \leq R$, $\varphi_2(r, \beta) \equiv 0$, $r \geq a$ выражение для функций $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ в (1.22) упрощается

$$\psi_1(x) = x^m W(R, x) \int_R^a \frac{\chi_n r^{-m} W^{-1}(r, R)}{r^2 - x^2} r dr \quad 0 \leq x \leq R$$

$$\psi_2(x) = x^{-m} W(x, a) \int_R^a \frac{\chi_n W^{-1}(a, r) r^{m+1}}{x^2 - r^2} dr \quad x \geq a$$

Система (1.22) уже не содержит особенности в подынтегральном выражении при $r = x$. Рассмотрим теперь вопрос о методе решения этой системы. Для этого в подынтегральных выражениях (1.22) $(r^2 - x^2)^{-1}$ и $(x^2 - r^2)^{-1}$, соответственно по степеням $r^{-2}x^2$ и r^2x^{-2} и подставим в (1.22). В итоге получим

$$\chi_{1n} = \frac{2}{\pi} \left[\psi_1(x) - \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{2k+m} W(R, x) \right], \quad 0 \leq x \leq R \quad (1.23)$$

$$\chi_{2n} = \frac{2}{\pi} \left[\psi_2(x) - \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{-2(k+1)-m} W(x, a) \right], \quad x \geq a$$

$$A_k = \int_a^{\infty} \chi_{2n} (W^{-1}(r, R) r^{-2k-1+m} dr$$

$$C_k = \int_0^R \chi_{1n} W^{-1}(a, r) r^{2k+m+1} dr$$

Домножим первое уравнение системы (1.23) на $x^{2l+m} (a^2 - x^2)^{1/2} dx$, а второе — на $x^{-2(l+1)-m} (x^2 - R^2)^{1/2} dx$ и проинтегрируем соответственно от 0 до R , и от a до ∞ , получим систему алгебраических уравнений:

$$\frac{\pi}{2} L_l \left(\frac{a}{R} \right)^{2l+m+3} + \sum_{k=0}^{\infty} M_k F_{k+l} = \psi_{1,l}^{(0)} \quad (1.24)$$

$$\frac{\pi}{2} M_l \left(\frac{a}{R} \right)^{2l+m} + \sum_{k=0}^{\infty} L_k F_{k+l} = \psi_{2,l}^{(0)}$$

$$F_{k+l} = \int_0^1 (\varepsilon^2 + \eta^2)^{1/2} (1 - \eta^2)^{k+l+m} d\eta, \quad \varepsilon = (a^2/R^2 - 1)^{1/2}$$

$$F_{k+l}^{(1)} = F_{k+l} R^{2(k+l+m+1)}, \quad A_l = M_l R^{-(2l+m-1)}$$

$$F_{k+l}^{(2)} = F_{k+l} a^{-2(k+l+m)-3} R, \quad C_l = L_l a^{2l+m+3}$$

$$\psi_{1,l}^{(0)} = \int_0^1 \Phi_1^{(0)}(\xi_1) (1 - \eta^2)^{l+m/2} (\varepsilon^2 + \eta^2)^{1/2} d\eta$$

$$\psi_{2,l}^{(0)} = \int_0^1 \Phi_2^{(0)}(\xi_2) (1 - \eta^2)^{l+m/2-1} (\varepsilon^2 + \eta^2)^{1/2} d\eta$$

$$\Phi_1(x) = R \Phi_1^{(0)}(\xi_1), \quad \Phi_2(x) = a \Phi_2^{(0)}(\xi_2)$$

$$\psi_1(x) = \Phi_1(x) (R^2 - x^2)^{-1/2}, \quad \psi_2(x) = \Phi_2(x) (x^2 - a^2)^{-1/2}$$

$$\xi_1 = (1 - \eta^2)^{1/2} R, \quad \xi_2 = a (1 - \eta^2)^{-1/2}$$

Теория бесконечных систем изложена, например, в [9]. Ниже на примере смешанных задач теории упругости будет рассмотрено решение полученной бесконечной системы алгебраических уравнений (1.2) методом редукции [9].

2. Основные представления теории упругости для нормальной задачи. Примеры расчета. Пусть в системе координат $X_1 X_2 X_3$ в плоскости $x_3 = 0$ расположена дисковая или кольцевая трещина Ω при заданных на ее поверхностях нормальных нагрузках. Нормальное смещение $u_3 = u$ и напряжение σ_{33} в плоскости $x_3 = 0$ будут описываться через гармони-

ческую функцию f

$$\begin{aligned}\sigma_{33} &= 2\mu \left(1 - x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \frac{\partial f}{\partial x_3} \\ u &= \left(2 - 2\nu - x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right) f\end{aligned}\quad (2.1)$$

Выражение для остальных компонент смещения и напряжения в [3].
Краевая задача для полупространства $x_3 < 0$ имеет вид

$$\begin{aligned}\partial f / \partial x_3 &= \sigma(r, \beta), \quad (x_1, x_2) \in \Omega \\ f &= u(r, \beta) / [2(1 - \nu)]\end{aligned}\quad (2.2)$$

В качестве примера рассмотрим случай дисковой трещины радиуса a .
Воспользуемся соотношениями (1.18) и с учетом (2.2) получим

$$\int_x^a \frac{\partial}{\partial y} (y^{-|n|} u_n) W(y, x) dy = \frac{(1 - \nu)}{\mu} x^{2|n|-1} \int_0^x \sigma y^{|n|+1} W(x, y) dy, \quad 0 \leq x \leq a \quad (2.3)$$

Домножая (2.3) на $x dx (x^2 - y^2)^{1/2}$ и интегрируя от r до a , получим

$$\begin{aligned}u_n(r, 0) &= -\frac{2(1 - \nu)}{\pi\mu} r^{|n|} \int_r^a x^{-2|n|} W(x, r) dx \int_0^x \sigma_n y^{|n|+1} W(x, y) dy \\ 0 &\leq r \leq a\end{aligned}\quad (2.4)$$

Этот результат совпадает с полученным в [3].

Рассмотрим теперь случай внешней трещины радиуса a , $\Omega = (a, \infty)$.
Воспользуемся соотношением (1.19) и с учетом (2.2) имеем

$$\int_a^x \frac{\partial}{\partial y} (y^{|n|} u_n) W(x, y) dy = \frac{(1 - \nu)}{\mu} x^{2|n|-1} \int_x^\infty \sigma_n y^{-|n|+1} W(y, x) dy$$

$$x \geq a$$

Домножая это соотношение на $x dx (r^2 - x^2)^{-1/2}$ и интегрируя от a до r , получим

$$u_n = -\frac{2(1 - \nu)}{\pi\mu} r^{-|n|} \int_a^r x^{2|n|} W(r, x) dx \int_x^\infty \sigma_n y^{-|n|+1} W(y, x) dy \quad r \geq a \quad (2.5)$$

Выражения (2.4), (2.5) определяют Фурье-компоненты разложения смещения через Фурье-компонент напряжения. Домножая эти выражения на $e^{in\varphi}$ и суммируя с учетом

$$\begin{aligned}u &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n e^{in\varphi} \\ \sigma_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma(r, \beta) e^{-in\beta} d\beta\end{aligned}$$

получим

$$u(r, \varphi) = -\frac{(1 - \nu)}{\pi^2\mu} \int_0^{2\pi} \int_r^a \int_0^x \sigma(y, \beta) ZW(x, r) W(x, y) y dy dx d\beta \quad (2.6)$$

$$u(r, \varphi) = \frac{(1 - \nu)}{\pi^2\mu} \int_0^{2\pi} \int_a^r \int_x^\infty \sigma(y, \beta) ZW(r, x) W(y, x) y dy dx d\beta$$

$$Z = (x^4 - y^2 r^2) / (r^2 y^2 - 2r y x^2 \cos(\beta - \varphi) + x^4)$$

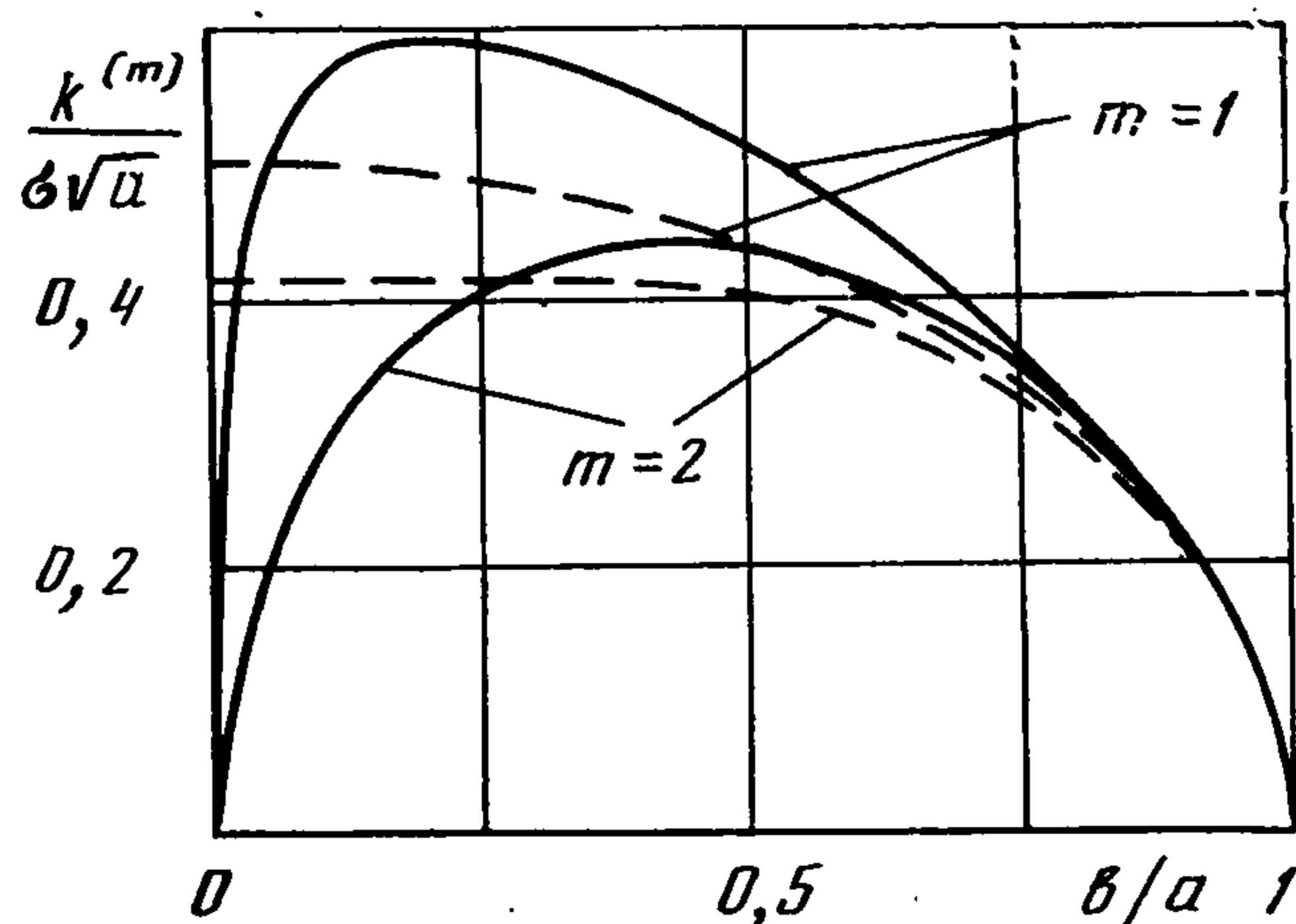
Первое соотношение (2.6) совпадает с полученным в [3].

Рассмотрим теперь случай кольцевой трещины $b \leq r \leq a$ и нагрузки $\sigma(r, \beta, 0) = \sigma_0(r) + \sigma_m e^{im\beta}$

Смещение в этом случае будет иметь вид

$$u(r, \beta) = u_0(r) + u_m e^{im\beta}$$

Соответственно, коэффициенты интенсивности $K = K^{(0)} + K^{(m)} e^{im\beta}$



Зависимости K_m от b/a при $\sigma_m = \sigma_0 = \sigma = \text{const}$ и $m = 1, 2$ изображены на фигуре для границы трещины при $r = b$ (сплошные линии) и $r = a$ (штриховые линии).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
2. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
3. Слепян Л. И. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981. 295 с.
4. Андрейкив А. Е. Пространственные задачи теории трещин. Киев: Наук. думка, 1982. 347 с.
5. Гольдштейн Р. В., Житников Ю. В. Численно-аналитический метод решения пространственных смешанных задач теории упругости с неизвестной границей для полостей и трещин. Ч. I // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 4. С. 75—85.
6. Гольдштейн Р. В., Житников Ю. В. Численно-аналитический метод решения пространственных смешанных задач теории упругости с неизвестной границей для полостей и трещин. Ч. II (Сдвиговая задача) // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 5. С. 65—78.
7. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1968. 344 с.
8. Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959. 470 с.
9. Канторович В. Л., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.: Физматгиз, 1950. 696 с.

Москва

Поступила в редакцию
16.V.1989