

УДК 531.36

© 1991 г.

В. В. Козлов

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ В НЕСТАЦИОНАРНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

Исследуется устойчивость положений равновесия механических систем в силовом поле с потенциалом вида $p(t)V$, где V — функция обобщенных координат. Системы такого вида часто встречаются в приложениях. Показано, что если множитель $p(t)$ монотонно возрастает к $+\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, то условия устойчивости положений равновесия можно сформулировать в виде экстремальных свойств функции V . Результаты общего характера применены к задаче о движении тяжелого твердого тела в безграничном объеме идеальной жидкости.

1. Введение. Пусть x_1, \dots, x_n — обобщенные координаты механической системы с n степенями свободы, T — кинетическая энергия, $-p(t)V(x)$ — силовая функция. Движение описывается уравнениями Лагранжа

$$(\partial T / \partial \dot{x})^* - \partial T / \partial x = -p \partial V / \partial x \quad (1.1)$$

Всюду ниже предполагается, что $p(t) > 0$ для всех значений t .

Уравнения вида (1.1) часто встречаются в приложениях. Приведем пример, представляющий самостоятельный интерес. Для этого рассмотрим задачу о движении тяжелого твердого тела в идеальной жидкости, покоящейся на бесконечности и совершающей безвихревое движение [1]. Предположим для простоты, что твердое тело имеет три взаимно ортогональные плоскости симметрии. В этом случае кинетическая энергия системы «тело плюс жидкость» принимает вид

$$T = (A\omega, \omega)/2 + (Cv, v)/2$$

где ω — угловая скорость твердого тела, v — скорость точки O пересечения плоскостей симметрии, A и C — симметричные положительно определенные матрицы. В силу предположения о симметрии тела равнодействующая силы тяжести и сила Архимеда приложены к точке O . Пусть P — величина суммы этих сил.

Движение твердого тела можно представить в виде системы уравнений Кирхгофа [1]

$$\begin{aligned} (\partial T / \partial v)^* + \omega \times (\partial T / \partial v) &= -P\gamma, & (\partial T / \partial \omega)^* + \omega \times (\partial T / \partial \omega) + v \times \\ & \times (\partial T / \partial v) &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

(γ — единичный вектор вертикали). Уравнения (1.2) следует дополнить геометрическими уравнениями Пуассона

$$\alpha^* + \omega \times \alpha = \beta^* + \omega \times \beta = \gamma^* + \omega \times \gamma = 0 \quad (1.3)$$

где α и β — неподвижные единичные векторы, ортогональные вектору γ .

Уравнения движения допускают три интеграла количества движения:

$$(\partial T / \partial v, \alpha) = c_1 \quad (\partial T / \partial v, \beta) = c_2 \quad (\partial T / \partial v, \gamma) = c_3 - Pt \quad (1.4)$$

Из (1.4) вытекает равенство $Cv = c_1\alpha + c_2\beta + (c_3 - Pt)\gamma$.

С учетом этого соотношения второе уравнение (1.2) можно представить в виде уравнения Эйлера

$$A\dot{\omega} + \omega \times A\omega = \alpha \times \partial W/\partial \alpha + \beta \times \partial W/\partial \beta + \gamma \times \partial W/\partial \gamma \quad (1.5)$$

$$W = (z, C^{-1}z)/2, \quad z = c_1\alpha + c_2\beta + (c_3 - Pt)\gamma$$

Уравнения (1.3) и (1.5) описывают вращение твердого тела вокруг неподвижной точки в нестационарном силовом поле с силовой функцией $-W$. Особенно просто эти уравнения выглядят при $c_1 = c_2 = c_3 = 0$

$$A\dot{\omega} + \omega \times A\omega = P^2 t^2 (\gamma \times \partial V/\partial \gamma), \quad \dot{\gamma} + \omega \times \gamma = 0 \quad (1.6)$$

$$V = (C^{-1}\gamma, \gamma)/2$$

Они совпадают с уравнениями вращения твердого тела в осесимметричном силовом поле с потенциальной энергией $P^2 t^2 V$. В общем случае $W = P^2 t^2 V + tW_1 + W_2$, где W_1, W_2 зависят лишь от положения тела.

Положения равновесия системы (1.1) совпадают с критическими точками функции V . Оказывается, для определенного класса функций p устойчивость равновесия определяется исключительно экстремальными свойствами функции V .

Пусть $dV(0) = 0$ и $V(0) = 0$.

2. Условия устойчивости. Теорема 1. Пусть $x = 0$ — локальный максимум гладкой функции V . Тогда равновесие $x = 0$ неустойчиво.

Теорема 1 обобщает классический результат Ляпунова о неустойчивости равновесия в стационарном поле ($p = \text{const}$), когда $V = V_m + \dots$ и однородная форма V_m достигает в точке $x = 0$ строгого максимума. Доказательство основано на применении результатов [2].

Когда функция V — однородная форма степени $m \geq 2$, теорему 1 можно доказать методом Ляпунова — Четаева.

В качестве иллюстрации рассмотрим случай постоянной матрицы

$$\|\partial^2 T/\partial x_i \partial x_j\| = \|g_{ij}\| = G$$

Для момента инерции $I = (Gx, x)$ справедливо вириальное тождество

$$I' = 4T - 2pmV$$

Так как по предположению $V(x) \leq 0$, то $I' \geq 0$. Если в начальный момент времени $I' = 2(Gx, x') > 0$, то $I(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow +\infty$. Следовательно, равновесие $x = 0$ неустойчиво.

В уравнениях (1.1) выполним замену времени

$$\tau = g(t), \quad g' = p^{1/2}$$

Ясно, что g — монотонная функция t . Обозначая штрихом дифференцирование по τ , получим

$$(\partial T^*/\partial x')' - \partial T^*/\partial x = -\partial V/\partial x - Gx'k(\tau) \quad (2.1)$$

$$T^* = \sum g_{ij}(x) x_i' x_j' / 2, \quad k = p' / (2p^{1/2})$$

Применяя к уравнениям (2.1) теорему об изменении энергии, получим равенство

$$(T^* + V)' = -k(Gx', x') = -2kT^* \quad (2.2)$$

Из (2.2) сразу вытекает

Предложение 1. Пусть $p' \geq 0$ и функция V имеет в точке $x = 0$ строгий локальный минимум. Тогда равновесие $x = 0$ устойчиво по отношению к координатам x_1, \dots, x_n .

Как будет показано ниже, устойчивости по скоростям x' может и не быть.

Теорема 2. Пусть выполнены следующие условия:

$$1) \quad p' \geq 0, \quad 2) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = +\infty, \quad 3) \quad p'' p \leq \frac{3}{2} p'^2 \quad (2.3)$$

и функция V аналитична по x_1, \dots, x_n в окрестности точки $x = 0$. Тогда, если V имеет в точке $x = 0$ строгий локальный минимум, то равновесие $x = 0$ асимптотически устойчиво по отношению к координатам x_1, \dots, x_n ($x_i \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$). Если же функция V не имеет в точке $x = 0$ локального минимума, то равновесие $x = 0$ неустойчиво по отношению к x_1, \dots, x_n .

Условие 3 эквивалентно предположению о монотонном убывании функции $k(\tau)$ при $\tau \rightarrow +\infty$. Оно заведомо выполнено для функций $p(t)$ вида ct^α , $c \exp(\alpha t)$, $c \ln(\alpha t)$ ($c, \alpha > 0$).

Отметим, что теорема 2 несправедлива в случае, когда функция V бесконечно дифференцируема, но не аналитична. Вот простой пример: $V(0) = 0$, $V(x) = \exp(-x^{-2}) \cos x^{-2}$, когда $x \neq 0$. Положение равновесия $x = 0$ не есть локальный минимум функции V . Однако, если выполнены условия (2.3), то это равновесие устойчиво по отношению к координате x .

Для доказательства теоремы 2 введем функцию $H(x', x) = T^* + V$. Так как по предположению $p' \geq 0$, то ввиду тождества (2.2) функция H монотонно убывает. Следовательно, при $\tau \rightarrow \infty$ либо $H(\tau) \rightarrow -\infty$, либо $H(\tau) \rightarrow c$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия (2.3) и траектория движения $x(t)$ ограничена. Тогда c — критическое значение функции H .

Теорема 2 вытекает из теоремы 3 и результата об изолированности критических значений аналитической функции V [3]. Отметим, что критическими точками функции H являются пары $(x = x_0, x' = 0)$, где x_0 — критическая точка функции V . Так что $c = V(x_0)$.

Предположим, что $H(\tau) \rightarrow c$, когда $\tau \rightarrow +\infty$. В силу (2.2)

$$\int_{\tau_0}^{\infty} k(\tau) T^*(\tau) d\tau < \infty \quad (2.4)$$

Покажем, что $c \leq \sup V$. Действительно, пусть $c > \sup V$. Так как $T^* + V \geq c$, то $T^* \geq c - V \geq c_1 > 0$. Но тогда

$$\int_{\tau_0}^{\infty} k T^* d\tau \geq c_1 \int_{\tau_0}^{\infty} k d\tau = c_1 \int_{t_0}^{\infty} \frac{p'}{2p} dt = \frac{c_1}{2} \ln p \Big|_{t_0}^{\infty} = \infty$$

поскольку $p(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$ (условие 2). Получили противоречие. Подчеркнем, что здесь не использовалось условие 3 о монотонности функции $k(\tau)$.

В общем случае, в доказательстве теоремы 3 используется та же идея. Однако если $c < \sup V$, то функция $T^*(\tau)$ может принимать сколь угодно малые положительные значения и даже обращаться в нуль. Предположим, что c не является критическим значением функции H и, следовательно, функций V . Если при достаточно большом значении τ измененная кинетическая энергия $T^*(\tau)$ мала, то значение $V(x(\tau))$ мало отличается от c . Однако вблизи гиперповерхности $\{V(x) = c\}$ нет положений равновесия и поэтому через время $\Delta\tau \leq \varepsilon$ кинетическая энергия $T^* \geq \kappa > 0$ (строгое доказательство проводится методом [4]). Так как по предположению теоремы 3 траектория движения $x(\tau)$ ограничена, то ε и κ — некоторые положительные постоянные, фиксированные для данной траектории. Далее, в течение времени $\Delta\tau \geq \delta = \text{const} > 0$ энергия $T^*(\tau) \geq \kappa$.

Итак, найдется последовательность моментов нового времени $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots$, такая, что $T^*(\tau) \leq \kappa$ при $\tau \in [\tau_{2n}, \tau_{2n+1}]$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) и $T^*(\tau) \geq \kappa$ при $\tau \in [\tau_{2n-1}, \tau_{2n}]$ ($n = 1, 2, \dots$).

Как уже отмечалось, $\tau_{2n+1} - \tau_{2n} \leq \varepsilon$, $\tau_{2n} - \tau_{2n-1} \geq \delta$ при всех значениях n . Если последовательность τ_n ограничена, то $T^*(\tau) \geq \kappa$ для всех $\tau \geq \max \tau_n$ и поэтому интеграл (2.4) расходится.

Наибольший интерес представляет случай бесконечной последовательности τ_n .

Лемма. Предположим, что положительная функция $f(\tau)$ монотонно убывает и

$$\int_{\tau_0}^{\infty} f(\tau) d\tau = \infty$$

Тогда для каждой монотонной последовательности τ_n , такой, что $\tau_{2n+1} - \tau_{2n} \leq \varepsilon$, $\tau_{2n} - \tau_{2n-1} \geq \delta$, справедливо равенство

$$\sum \int_{\tau_{2n-1}}^{\tau_{2n}} f(\tau) d\tau = \infty \quad (2.5)$$

(суммирование ведется по n от 1 до ∞).

Доказательство. Вставляя, если нужно, в последовательность интервалов $[\tau_{2n}, \tau_{2n+1}]$ новые интервалы нулевой длины, можно добиться, чтобы $\tau_k \leq k\mu + \sigma$ при некоторых положительных μ, σ . Ввиду монотонности функции f справедливо неравенство

$$\int_{\tau_{2n-1}}^{\tau_{2n}} f(\tau) d\tau \geq f(\tau_{2n})(\tau_{2n} - \tau_{2n-1}) \geq \delta f(\tau_{2n})$$

Следовательно, сумма (2.5) не меньше $\delta \sum f(\tau_{2n})$. Так как $\tau_{2n} \leq 2\mu n + \sigma$ и f монотонно убывает, то сумма ряда (2.5) не меньше $\delta \sum f(2\mu n + \sigma)$. Однако этот ряд расходится к $+\infty$ по интегральному признаку Коши — Маклорена.

В интервалах $[\tau_{2n-1}, \tau_{2n}]$ справедливо неравенство $T^* \geq \kappa$. Следовательно,

$$\int_{\tau_0}^{\infty} \kappa T^* d\tau \geq \kappa \sum \int_{\tau_{2n-1}}^{\tau_{2n}} \kappa(\tau) d\tau$$

Однако ввиду леммы последняя сумма равна ∞ . Получили противоречие с предположением о сходимости интеграла (2.4). Теорема 3 (а вместе с ней и теорема 2) доказана.

3. Приложение к задаче о падении твердого тела в идеальной жидкости. Уравнения (1.6) имеют интеграл площадей $(A\omega, \gamma) = c$. При фиксированном значении c можно понизить число степеней свободы с трех до двух. Если $c = 0$, то приведенная система будет натуральной. Пространством положений будет сфера Пуассона $S^2 = \{(\gamma, \gamma) = 1\}$, а потенциальная энергия совпадает с ограничением функции $P^2 t^2 (C^{-1}\gamma, \gamma)/2$ на сферу S^2 . Эта функция имеет шесть критических точек — положений равновесия приведенной системы. Они соответствуют единичным собственным векторам симметричного оператора C . Обозначим их $\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3$. Пусть $(C^{-1}e_1, e_1) \geq (C^{-1}e_2, e_2) \geq (C^{-1}e_3, e_3)$, так что в точках $\gamma = \pm e_3$ функция V принимает минимальные значения. Если этот минимум строгий, то положения равновесия асимптотически устойчивы по отношению к координатам на S^2 , а остальные четыре равновесия неустойчивы. Можно доказать, что для почти всех движений $\gamma(t) \rightarrow \pm e_3$ при $t \rightarrow \infty$.

Для того чтобы дать механическую интерпретацию этому результату, рассмотрим поступательное движение твердого тела с единичной скоростью v . Кинетическая энергия такого движения, равная $(Cv, v)/2$, максимальна, если $v = \pm e_3$. Следовательно, если тело движется в направлении, задаваемом вектором $\pm e_3$, то его присоединенная масса принимает максимальное значение. В частности, если твердое тело имеет форму пластинки, то вектор $\pm e_3$ ортогонален ее плоскости. Итак, при сделанных предположениях в свободном падении тяжелого твердого тела в идеальной жидкости тело асимптотически стремится занять такое положение, при котором ось с наибольшей присоединенной массой вертикальна. Если твердое тело плоское, то эта плоскость стремится занять горизонтальное положение.

В общем случае, когда постоянные c_1, c_2 интегралов количества движения (1.4) отличны от нуля, движение описывается уравнениями (1.3) и (1.5). В локальных координатах на группе $SO(3)$ их можно представить в виде уравнений (2.1)

$$\begin{aligned} (\partial T^*/\partial x')' - \partial T^*/\partial x &= -\partial W^*/\partial x - Gx'/(2\tau) \\ (\tau = t^2/2, W^* &= P^2V + W_1/(2\tau)^{1/2} + W_2/(2\tau)) \end{aligned}$$

Введем функцию $H = T^* + W^*$ и изучим ее поведение при $\tau \rightarrow \infty$. Так как $H' = -\partial H/\partial \tau - T^*/\tau$, то

$$H' = W_1/(2\tau)^{3/2} + W_2/(2\tau^2) - T^*/\tau \quad (3.1)$$

Предположим, что траектория движения $x(t)$ ограничена. Это условие заведомо выполняется в задаче о движении твердого тела ввиду компактности группы $SO(3)$. Следовательно, функции $W_1(x(\tau))$ и $W_2(x(\tau))$ ограничены. Поэтому несобственные интегралы

$$\int_{\tau_0}^{\infty} \frac{W_1}{(2\tau)^{3/2}} d\tau, \int_{\tau_0}^{\infty} \frac{W_2}{2\tau^2} d\tau$$

сходятся. Учитывая еще ограниченность функции $H(\tau)$ из (3.1), получаем сходимость интеграла

$$\int_{\tau_0}^{\infty} \frac{T^*}{\tau} d\tau \quad (3.2)$$

Но тогда из (3.1) вытекает, что существует

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} H(\tau) = c$$

Применяя рассуждения из разд. 2 и используя результат о сходимости интеграла (3.2), можно доказать, что постоянная c совпадает с критическим значением функции V . В частности, если точка $x = 0$ — строгий локальный минимум аналитической функции V , то движения $x(t)$ с малыми начальными данными $x(0)$ и $x'(0)$ стремятся к точке $x = 0$ при $t \rightarrow \infty$.

В рассматриваемой задаче функция V не имеет изолированного минимума: она принимает минимальные значения на двух окружностях, задаваемых уравнениями $\gamma = \pm e_3$. Поэтому при $t \rightarrow \infty$ падающее тело в общем случае стремится занять такое положение, при котором его ось с наибольшей присоединенной массой вертикальна. Если c_1, c_2 отличны от нуля, то тело еще может совершать вращение вокруг этой оси.

Обратимся вновь к общей задаче о движении механической системы с потенциальной энергией $W = t^2V + tW_1 + W_2$. Если критические точки функций V, W_1, W_2 не совпадают, то уравнения движения не имеют поло-

жений равновесия. Однако при некоторых общих предположениях найдутся заменяющие их замечательные частные решения уравнений движения.

Предложение 2. Если $x = 0$ — невырожденная критическая точка функции V , то уравнения движения имеют решение $x(t)$, представимое асимптотическим разложением

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{(m)}}{t^m}, \quad x^{(m)} \in R^n \quad (3.3)$$

Последнее означает, что при $t \rightarrow \infty$

$$x(t) - \sum_{m=1}^N \frac{x^{(m)}}{t^m} = O\left(\frac{1}{t^{N+1}}\right)$$

В частности, $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Доказательство. Уравнения движения имеют единственное формальное решение в виде степенного ряда (3.3). Коэффициент $x^{(1)}$ определяется из равенства

$$Cx^{(1)} + a = 0, \quad C = \partial^2 V / \partial x^2(0), \quad a = \partial W_1 / \partial x(0)$$

а остальные коэффициенты находятся по индукции. Радиус сходимости ряда (3.3), как правило, равен нулю. Однако, согласно [5], уравнения движения обязательно имеют решение, для которого ряд (3.3) — его асимптотическое разложение при $t \rightarrow \infty$.

В общей задаче о падении твердого тела все критические точки функции V вырождены. Однако предложение 2 можно применить для частного случая движения твердого тела, когда плоскость симметрии занимает вертикальное положение.

4. Асимптотика малых колебаний. Рассмотрим задачу о движении системы (1.1) в окрестности устойчивого положения равновесия $x = 0$. Будем считать выполненными условия предложения 1. Линеаризованные уравнения движения имеют вид

$$Ax'' + p(t)Cx = 0 \quad (4.1)$$

$$(A = \|g_{ij}(0)\|, \quad C = \partial^2 V / \partial x^2(0))$$

Линейным преобразованием координат x матрицу A можно привести к единичной, а C — к диагональной: $\text{diag}[\omega_1^2, \dots, \omega_n^2]$.

Будем рассматривать типичный случай, когда все $\omega_k > 0$. В новых координатах x_1, \dots, x_n уравнения (3.1) разделяются:

$$x_k'' + p\omega_k^2 x_k = 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (4.2)$$

Изучим поведение решений этого линейного уравнения при $t \rightarrow \infty$ (индекс k опустим).

Заменяя время $t \rightarrow \tau$ по формуле $\tau = p^{1/2}$ и совершая подстановку $x = zp^{-1/4}$, уравнение (4.2) приводим к виду

$$z'' + q(\tau)z = 0, \quad q = \omega^2 - k'/2 - k^2/4 \quad (4.3)$$

Если выполнены условия

$$1) \quad q > 0 \text{ при } \tau > \tau_0, \quad 2) \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} q(\tau) > 0, \quad 3) \quad \int_{\tau_0}^{\infty} |q'(\tau)| d\tau < \infty \quad (4.4)$$

то справедливо следующее представление для решений (4.3):

$$z = c_1 \sin \int_{\tau_0}^{\tau} (q(u))^{1/2} du + c_2 \cos \int_{\tau_0}^{\tau} (q(u))^{1/2} du + \xi(\tau)$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные, $\xi, \xi' \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$ [(6), гл. V). Например, для $p = \alpha^2 t^{2\beta}$ ($\alpha, \beta = \text{const}$) значение $q(\tau)$ равно $\omega^2 + c/\tau^2$ ($c = \text{const}$) и потому все условия (4.4) заведомо выполнены.

Так как $x = zp^{-1/4}$, то координата x совершает колебания, амплитуда которых убывает как $(p(t))^{-1/4}$, а частота неограниченно возрастает со временем. Например, для степенной зависимости p от времени частота представима в виде суммы

$$\omega \int_{t_0}^t (p(u))^{1/2} du + \eta(t)$$

где функция $\eta(t)$ ограничена.

Координаты x_1, \dots, x_n можно назвать нормальными, а движения, описываемые линейными уравнениями (4.2), нормальными колебаниями. Общее решение системы (4.1) есть сумма нормальных колебаний, амплитуда которых неограниченно убывает со временем. Например, в задаче о падении твердого тела в жидкости амплитуда убывает как $t^{-1/2}$, а частота увеличивается как t .

5. Влияние гироскопических сил. Добавим в правую часть уравнения (1.1) слагаемое $\Gamma x'$, где Γ — кососимметрическая матрица. Наличие гироскопических сил, конечно, не меняет положений равновесия и оставляет справедливым тождество (2.2). Поэтому предложение 1 верно и в более общем случае. Однако асимптотика малых колебаний будет уже другой.

В качестве примера рассмотрим линейную систему уравнений

$$x'' + \omega y' = -p(t)x, \quad y'' - \omega x' = -p(t)y, \quad \omega = \text{const} \quad (5.1)$$

Эти уравнения допускают интеграл $x'y - xy' + \omega(x^2 + y^2)/2 = c$, который в полярных координатах r, φ принимает вид $r^2\varphi' = -\omega r^2/2 + c$.

Исследуем частные решения, отвечающие случаю $c = 0$. Так как $\varphi' = -\omega/2 = \text{const}$, то точка движется по прямой, вращающейся с постоянной угловой скоростью вокруг начала координат. Из теоремы об изменении кинетической энергии получаем равенство

$$(r^2 + r^2\varphi'^2)' + p(r^2)' = 0 \quad (5.2)$$

С учетом соотношения $\varphi' = -\omega/2$ из (5.2) выводится уравнение

$$r'' + (p + \omega^2/4)r = 0$$

Если p монотонно возрастает до бесконечности, то, согласно разд. 4, переменная r совершает колебания, амплитуда которых неограниченно убывает как $(p(t) + \omega^2/4)^{-1/4}$. В частности, $x^2 + y^2 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Последнее обстоятельство не случайно. Оказывается, если выполнены условия (2.3) и точка $x = 0$ — строгий локальный минимум аналитической функции V , то при наличии гироскопических сил равновесие $x = 0$ асимптотически устойчиво по отношению к координатам x_1, \dots, x_n .

Гироскопические силы появляются, как известно, при понижении порядка системы с группой симметрии. В качестве примера вновь обратимся к уравнениям (1.6), допускающим нетеров интеграл $(A\omega, \gamma) = c$. При фиксированном значении c вращение твердого тела описывается динамической системой с двумя степенями свободы, находящейся под действием гироскопических сил и дополнительных потенциальных сил с потенциалом $c^2/[2(A\gamma, \gamma)]$. Наличие добавочного потенциала в данном случае не меняет положений равновесия приведенной системы. Эти частные

движения можно трактовать как относительные равновесия: одно из собственных направлений оператора C (определяемых векторами e_1, e_2, e_3 из разд. 3) вертикально и тело вращается вокруг этой оси с постоянной скоростью. Их всего шесть, причем, в общем случае (когда собственные значения оператора C различны), два из них асимптотически устойчивы по отношению к координатам γ , а четыре оставшихся неустойчивы.

В общем случае после понижения порядка приведенный потенциал вида $t^2V(x) + W(x)$ может не иметь критических точек — относительных равновесий. Однако и в этом случае можно установить существование заменяющих их частных решений вида (3.3) при условии, что критические точки функции V невырождены.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // Полное собр. соч. Т. 1. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. С. 133—150.
2. Болотин С. В., Козлов В. В. Об асимптотических решениях уравнений динамики // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика-механика. 1980. № 4. С. 84—89.
3. Souček J., Souček V. Morse — Sard theorem for real — analytic functions // Comment. Math. Univ. Carol. 1973. V. 13. № 1. P. 45—51.
4. Козлов В. В. О падении тяжелого твердого тела в идеальной жидкости // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 5. С. 10—17.
5. Кузнецов А. Н. Дифференцируемые решения вырождающихся систем обыкновенных уравнений // Функциональный анализ и его приложения. 1972. Т. 6. Вып. 2. С. 41—51.
6. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

Москва

Поступила в редакцию
15.I.1990