Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 1, 1991

УДК 539.3

В. Я. Терещенко

ДВОЙСТВЕННЫЕ ФОРМУЛИРОВКИ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ. ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧАМ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ

Рассматриваются альтернативные вариационные формулировки метода граничных элементов (МГЭ), использующие постановку задач минимизации граничных функционалов и обобщенных функционалов Трефтца линейной теории упругости [1]. Вариационные решения аппроксимируются при помощи граничных потенциалов с искомой плотностью: формулировка в перемещениях (прямая) вместо рассмотренной ранее [1] интерполяции плотности потенциала двойного слоя (ПДС) использует интерполяцию на граничном элементе (ГЭ) плотности потенциала простого слоя (ППС) по узловым значениям перемещений; двойственная формулировка — интерполяцию на ГЭ плотности ППС по узловым значениям напряжений.

Формулировки целесообразно использовать при решении задач теории упругости со смешанными граничными условиями, контактных задач, в частности, двойственная формулировка оказывается эффективной при решении задач для упругих сред с разрывными коэффициентами упругости (кусочно-однородных); в соответствующей вариационной задаче требуется реализовать условие сопряжения как для вектора перемещений, так и для вектора напряжений на поверхности разрыва коэффициентов. Проводится сопоставление результатов, полученных в [1] и данной работе, с результатами, вытекающими из других формулировок МГЭ.

1. В линейной теории упругости известна двойственность кинематически допустимых перемещений и статически допустимых напряжений, вытекающая их принципа Лагранжа — Кастильяно [2, 3]. Соответствующее утверждение для поверхностных перемещений и напряжений следует из двойственных вариационных принципов для граничных функционалов в задачах с двусторонними и односторонними ограничениями на границе [4, 5]. При этом связанность двойственных постановок вариационных задач (имеется в виду явная связь между переменными задач через определяющие соотношения на границе) приводит к тождественным системам граничных уравнений процесса Ритца.

Согласно [1] приведем краткое изложение прямой формулировки МГЭ на основе задачи для граничного функционала

$$\min_{\varphi\in D} E(\varphi),\quad F(\varphi)=\int_S \varphi \mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi)\,ds-2\int_S \varphi \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)\,ds \tag{1.1}$$

$$D(\varphi)=\left\{\varphi \mid \mathbf{A}\varphi(x)=0,\quad x\in G,\quad \int_G \varphi\,dG=\int_G \mathbf{rot}\,\varphi\,dG=0\right\}$$

Здесь φ — вектор перемещений, $\mathbf{A}$ — векторный оператор изотропной однородной теории упругости, $G\subset E_m$ $(m=2,\ 3)$ — ограниченная область с достаточно гладкой границей S с внешней нормалью, ν, $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)$ — вектор заданных напряжений в точках S.

Реализация решения задачи (1.1) связана [1] с аппроксимацией множества допустимых функций D вектор-потенциалами (ПДС или ППС) с искомой плотностью в виде полного интерполяционного полинома. Коэффициенты полинома определяются через значения вектора перемещений в узлах ГЭ, на которые разбита граница S. Искомые узловые значения являются параметрами ГЭ-приближений «по Ритцу» [1]:

$$\varphi_N = \sum_{i=1}^{m} \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{K} \Phi_{nk}^{(i)} \beta_{nk}(x), \quad x \in G_\Delta \subset G \tag{1.2}$$

$$\int_{G_\Delta} \varphi_N \, dG_\Delta = \int_{G_\Delta} \mathbf{rot}\, \varphi_N \, dG_\Delta = 0$$

где $\Phi_{nk}{}^{(i)}$ (всюду далее $i = 1, \ldots, m$) — компоненты искомых узловых перемещений ГЭ

$$\Delta s_n \subset S_\Delta = \bigcup_{n=1}^{N} \Delta s_n, \quad \operatorname{diam} \Delta s_n \to 0 \Rightarrow G_\Delta \to G$$

а β_{nk} — скалярные «функции влияния» k-го узла, n-го ГЭ, построенные по ПДС [1]. Условие разрешимости ГЭ-аппроксимации вариационной задачи (1.1) приведено в [1]. В результате процесса Ритца для решения задачи (1.1) на приближениях (1.2) система уравнений МГЭ имеет вид [1]

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{k,\, p=1}^{K} \Phi_{nk}^{(i)} 2\mu \int_{\Delta s_n(\eta)} \partial_{\nu_n} \psi_k \psi_p \, |J| \, ds_n(\eta) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{p=1}^{K} \int_{\Delta s_n(\eta)} t_i^{(\nu_n)}(\mathbf{u}_n{}^*) \, \psi_p \, |J| \, ds_n(\eta) \tag{1.3}$$

где $\psi_k(\eta)$, $\eta \in \Delta s_n$ — базисные функции МГЭ, отвечающие выбранному интерполяционному полиному [6], $|J|$ — определитель матрицы Якоби $[J]$, преобразующей элемент поверхности $ds_n(\eta)$ в локальной системе координат в элемент поверхности $ds_n(y)$ в глобальной (декартовой) системе координат [6].

Система (1.3) записана для частного случая, когда вектор-оператор граничных напряжений $\mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi) = 2\mu\partial_\nu\varphi$ (например, в задачах о кручении упругого изотропного однородного стержня [7]) и ГЭ-аппроксимация его на приближениях (1.2) имеет вид [1]

$$\mathbf{t}^{(\nu_n)}\Big(\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{K} \Phi_{nk}^{(i)} \beta_{nk}\Big) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{K} 2\mu \Phi_{nk}^{(i)} \partial_{\nu_n} \beta_{nk} \tag{1.4}$$

Было показано [1], что ГЭ-приближения (1.2) образуют минимизирующую последовательность для $F(\varphi)$ и сходятся при $N \to \infty$ к обобщенному решению граничной задачи с заданными на S напряжениями $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)$, эквивалентной задаче (1.1).

Альтернативной формулировкой по отношению к изложенной может быть формулировка, использующая для ГЭ-аппроксимации решения задачи (1.1) ППС с плотностью интерполирующей в точках ГЭ поле напряжений по узловым значениям перемещений $\Phi_{nk}{}^{(i)}$ из (1.2). Естественно ожидать, что такая формулировка приводит к тождественной (1.3) системе уравнений МГЭ.

Действительно, поле перемещений в точках $\eta \in \Delta s_n$ интерполируется по узловым значениям $\Phi_{nk}^{(i)}$ линейной комбинацией [I]

$$\varphi_n^{(i)}(\eta) = \sum_{k=1}^{K} \Phi_{nk}^{(i)} \psi_k(\eta)$$

а ГЭ-приближения решения «по Ритцу» задачи (1.1) примем в виде

$$\varphi_N = \sum_{i=1}^{m} \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{K} \Phi_{nk}^{(i)} \gamma_{nk}(x), \quad x \in G_\Delta$$

$$\int_{G_\Delta} \varphi_N dG_\Delta = \int_{G_\Delta} \mathbf{rot}\, \varphi_N \, dG_\Delta = 0$$

Здесь γ_{nk} — «функции влияния» k-го узла, n-го ГЭ строятся по ППС, которые описывают поле перемещений в точках $x \in G_\Delta$

$$\gamma_n(x) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Delta s_n(y)} \mathbf{\Gamma}^{(2)}(x, y)\, \mathbf{t}^{(\nu_n)} \Big(\sum_{i=1}^{m} \varphi_n^{(i)}(y) \Big)\, ds_n(y) \tag{1.5}$$

где $\mathbf{\Gamma}^{(2)}(x, y)$ — тензор Грина второй задачи статики [8].

Линейная комбинация вектор-потенциалов (1.5) является решением второй задачи статики (в области G_Δ с границей S_Δ)

$$\mathbf{A}\Big(\sum_{n=1}^{N} \gamma_n(x)\Big) = 0, \quad x \in G_\Delta \tag{1.6}$$

$$\mathbf{t}^{(\nu_\Delta)}\Big(\sum_{n=1}^{N} \gamma_n\Big)\Big|_{S_\Delta} = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{t}^{(\nu_n)} \Big(\sum_{i=1}^{m} \varphi_n^{(i)}(y)\Big), \quad y \in \Delta s_n$$

при этом ГЭ-аппроксимация вектора граничных напряжений в точках $\eta \in \Delta s_n$ имеет вид (1.4) (с заменой β_{nk} на γ_{nk}); тогда «функции влияния» γ_{nk} будут определяться по формуле]

$$\gamma_{nk}(x) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Delta s_n(\zeta)} \mathbf{\Gamma}^{(2)}(x, y(\eta))\, 2\mu \partial_{\nu_n} \psi_k(\eta)\, |J|\, ds_n(\eta) \tag{1.7}$$

и представляют собой ППС со скалярной плотностью. Граничные значения этих потенциалов следующие:

$$\partial_{\nu_n} \gamma_{nk}\big|_{\Delta s_n} = \partial_{\nu_n} \psi_k(\eta) \Rightarrow \gamma_{nk}\big|_{\Delta s_n} = \psi_k(\eta), \quad \forall k = 1, \ldots, K; \quad \eta \in \Delta s_n \tag{1.8}$$

(последнее равенство имеет место с точностью до некоторой постоянной, в итоге не влияющей на вывод системы уравнений МГЭ).]

При учете этих граничных значений система Ритца [I], в которой «функции влияния» β_{nk} заменяются на γ_{nk}, приводится к системе уравнений МГ тождественной системе (1.3).

2. Двойственная формулировка МГЭ для решения задачи (1.1) использует ГЭ-приближения «по Ритцу» вида

$$\varphi_N = \sum_{i=1}^{m} \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{K} c^{-1}(\lambda, \mu)\, T_{nk}^{(i)} \gamma_{nk}(x), \quad x \in G_\Delta \tag{2.1}$$

$$\int\limits_{G_\Delta} \varphi_N\, dG_\Delta = \int\limits_{G_\Delta} \mathbf{rot}\, \varphi_N\, dG_\Delta = 0$$

где $T_{nk}^{(i)}$ — компоненты искомых узловых напряжений, ГЭ $\Delta s_n \subset S_\Delta$, связанные с компонентами узловых перемещений $\Phi_{nk}^{(i)}$ физическими соотношениями (для случая ГЭ-аппроксимации (1.4))

$$T_{nk}^{(i)} = c(\lambda, \mu)\, \Phi_{nk}^{(i)}, \; c = 2\mu, \; \forall k = 1, \ldots, K \tag{2.2}$$

а γ_{nk} — скалярные «функции влияния» вида (1.7), построенные по ППС

$$\gamma_n(x) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Delta s_n(y)} \mathbf{\Gamma}^{(2)}(x, y)\, \mathbf{t}^{(\nu_n)}(y)\, ds_n(y) \tag{2.3}$$

с векторной плотностью

$$\mathbf{t}^{(\nu_n)}(y(\eta)) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{K} T_{nk}^{(i)} \partial_{\nu_n} \psi_k(\eta), \quad \eta \in \Delta s_n \tag{2.4}$$

Линейная комбинация вектор-потенциалов γ_n является (подобно (1.6)) решением второй задачи статики (в области G_Δ с границей S_Δ). Таким образом, приближения

$$\varphi_N \equiv \sum_{n=1}^{N} \gamma_n(x), \quad x \in G_\Delta$$

образуют множество $\{\varphi_N\}$, аппроксимирующее множество допустимых вектор-функций D вариационной задачи (1.1). При переходе от системы Ритца [1] к системе уравнений МГЭ используются граничные значения (1.8) потенциалов γ_{nk}. Для случая ГЭ-аппроксимации вектора $\mathbf{t}^{(\nu)}(\boldsymbol{\varphi})$ вида (1.4) система имеет вид

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{k,\,p=1}^{K} T_{nk}^{(i)} \int\limits_{\Delta s_n(\eta)} \partial_{\nu_n}\psi_k\psi_p\,|J|\,ds_n(\eta) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{K} \int\limits_{\Delta s_n(\eta)} t_i^{(\nu_n)}(\mathbf{u}_n^*)\,\psi_p\,|J|\,ds_n(\eta) \tag{2.5}$$

тождественный, при учете (2.2), системе (1.3), что подтверждает вывод см. выше) о тождественности систем процесса Ритца при реализации решений связанных двойственных вариационных задач для граничных функционалов; в рассматриваемой формулировке МГЭ указанная связанность отражается определяющими (физическими) соотношениями (2.2) между компонентами напряжений и перемещений в узлах.

По найденным узловым значениям $T_{nk}^{(i)}$ поле нормальных напряжений в точках $\eta \in \Delta s_h \subset S_\Delta$ определяется (интерполируется) согласно (2.4); поле перемещений в точках $x \in G_\Delta$ определяется согласно (2.3). Таким образом, рассмотренная двойственная формулировка МГЭ в итоге приводит к вариационному решению в перемещениях исходной граничной задачи, поэтому обоснование ее аналогично обоснованию прямой формулировки [1].

3. Здесь используем формулировку МГЭ на основе вариационной задачи для обобщенного функционала Трефтца [1]. Двойственная формулировка МГЭ, позволяющая непосредственно аппроксимировать поле нормальных напряжений в точках ГЭ, имеет эффективное применение для реализации решения ГЭ-аппроксимации вариационной задачи для обобщенного функционала Трефтца, соответствующего задаче теории упругости для кусочно-однородной среды [8].

В теории кревых задач для эллиптических уравнений (и систем) с разрывными коэффициентами дифференциального оператора установлена [9] разрешимость таких задач в эквивалентной вариационной постановке в соболевском классе функций $W_2^1(G)$ (для уравнений второго порядка). Для задач теории упругости с разрывными коэффициентами упругости построен [10] обобщенный функционал Трефтца (на примере первой задачи), имеющий вид

$$\Phi(\mathbf{u}) = 2\int\limits_G W_q(\mathbf{u})\,dG_q + \frac{1}{\alpha}\int\limits_{S_2}([\mathbf{t}^{(\nu_2)}(\mathbf{u})]_{S_2} - \alpha\mathbf{u})^2\,ds -$$
$$-\alpha\int\limits_{S_2}\mathbf{u}^2\,ds + \theta\int\limits_{S_1}\mathbf{u}^2\,ds, \quad G = G_1 \cup G_2; \quad \alpha, \theta = \text{const} > 0 \tag{3.1}$$

(здесь, в отличие от [10], для упрощения использованы нормы в L_2 граничных значений $\mathbf{u}|_{S_1}$, $\mathbf{u}\,|_{S_2}$, $\mathbf{t}^{(\nu_2)}(\mathbf{u})\,|_{S_2}$).

Минимизация функционала $\Phi(u)$ на допустимых вектор-функциях перемещений $\mathbf{u}$, удовлетворяющих уравнению $\mathbf{A}_q\mathbf{u}(x) = \mathbf{K}$, $x \in G$ ($\mathbf{A}_q$ — векторный оператор изотропной теории упругости с коэффициентами $\mu_q = (\mu_1, \mu_2)$, $\lambda_q = (\lambda_1, \lambda_2)$) приводит [10] к обобщенному решению $\mathbf{u}_0 \in W_2^{01}((G)$ ($W_2^{01}(G)$ — подпространство из $W_2^1(G)$ вектор-функций равных нулю на S_1) следующей граничной задачи:

$$\mathbf{A}_q\mathbf{u}_0(x) = \mathbf{K}, \ x \in G$$
$$[\mathbf{u}_0]_{S_2} = 0, \quad [\mathbf{t}^{(\nu_2)}(\mathbf{u}_0)]_{S_2} = 0; \quad |\mathbf{u}_0|_{S_1} = 0 \tag{3.2}$$

Решение $\mathbf{u}_0$ понимается в смысле удовлетворения интегральному тождеству

$$2\int\limits_G W_q(\mathbf{u}_0, \mathbf{v})\, dG_q - \int\limits_{S_2} [\mathbf{t}^{(\mathbf{v}_2)}(\mathbf{u}_0)]_{S_2} \mathbf{v}\, ds - \int\limits_{S_1} \mathbf{t}^{(\mathbf{v}_1)}(\mathbf{u}_0)\, \mathbf{v}\, ds = \int\limits_G \mathbf{K}\mathbf{v}\, dG_q,$$
$$\forall \mathbf{v} \in W_2{}^1(G) \tag{3.3}$$

В (3.1)—(3.3) приняты следующие обозначения: G — область, занимаемая составной упругой средой; S_2 — поверхность разрыва постоянных Ламе μ_q, λ_q; S_1 — граница области $G_1 \supset G_2$, $S_1 \cap S_2 = \Phi$; $[\mathbf{u}]_{S_2} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, u_1, u_2 — предельные значения вектора $\mathbf{u}(x)$ при $x \to y \in S_2$ со стороны областей G_1 и G_2; $[\mathbf{t}^{(\mathbf{v}_2)}(\mathbf{u})]_{S_2} = \mathbf{t}_1{}^{(\mathbf{v}_2)}(\mathbf{u}_1) - \mathbf{t}_2{}^{(\mathbf{v}_2)}(\mathbf{u}_2)$; предполагается, что поверхности S_1 и S_2 — кусочно-непрерывны; $2W_q(u)$ (всюду далее $q = 1, 2$) — квадратичная форма оператора A_q.

Так как вектор-функция $\mathbf{u}_0 \in W_2{}^{01}(G) \cap W_2{}^2(G_q)$ непрерывна в точках области G [9], то условие сопряжения для вектора перемещений $[\mathbf{u}_0]_{S_2} = 0$ выполняется; условие же сопряжения для вектора напряжений $[\mathbf{t}^{(\mathbf{v}_2)}(\mathbf{u}_0)]_{S_2} = 0$ выполняется при минимизации функционала $\Phi(\mathbf{u})$ [10]. Интегральное тождество (3.3), полученное [10] при помощи формулы Бетти, по сути, распадается на два тождества, которые выполняются $\forall \mathbf{v} \in W_2{}^1(G)$:

$$2\int\limits_{G_1} W_1(\mathbf{u}_{01}, \mathbf{v})\, dG_1 + \int\limits_{S_2} \mathbf{t}_1^{(\mathbf{v}_2)}(\mathbf{u}_{01})\, \mathbf{v}\, ds - \int\limits_{S_1} \mathbf{t}^{(\mathbf{v}_1)}(\mathbf{u}_{01})\, \mathbf{v}\, ds = \int\limits_{G_1} \mathbf{K}\mathbf{v}\, dG_1 \tag{3.4}$$

$$2\int\limits_{G_2} W_2(\mathbf{u}_{02}, \mathbf{v})\, dG_2 - \int\limits_{S_2} \mathbf{t}_2^{(\mathbf{v}_2)}(\mathbf{u}_{02})\, \mathbf{v}\, ds = \int\limits_{G_2} \mathbf{K}\mathbf{v}\, dG_2 \tag{3.5}$$

$$\mathbf{u}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{u}_{01}(x), & x \in G_1 \\ \mathbf{u}_{02}(x), & x \in G_2 \end{cases} \tag{3.6}$$

Соотношения (3.4)—(3.6) определяют множество допустимых вектор-функций задачи нахождения $\min \Phi(\mathbf{u})$. ГЭ-приближения решения этой задачи принимаем в виде суперпозиции потенциалов [1]: объемного и линейной комбинации ППС (см. (2.1))

$$\mathbf{u}_{1N}(x) = \boldsymbol{\delta}_1(x) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{n_1=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{K} c_1^{-1} T^{(i)}_{n_1 k} \gamma_{n_1 k}(x) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} \sum_{n_2=1}^{N_2} \sum_{k=1}^{K} c_1^{-1} T^{(i)}_{1 n_2 k} \gamma_{1 n_2 k}(x), \quad x \in G_{1\Delta} \tag{3.7}$$
$$\mathbf{u}_{2N}(x) = \boldsymbol{\delta}_2(x) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{n_2=1}^{N_2} \sum_{k=1}^{K} c_2^{-1} T^{(i)}_{2 n_2 k} \gamma_{2 n_2 k}(x), \quad x \in G_{2\Delta}$$
$$c_q = c(\mu_q, \lambda_q), \quad \boldsymbol{\delta}_q(x) = \int\limits_{G_{q\Delta}} \boldsymbol{\Gamma}_q(x, y)\, \mathbf{K}(y)\, dG_{q\Delta}(y)$$
$$S_{q\Delta} = \bigcup_{n_q=1}^{N_q} \Delta s_{n_q}$$

Здесь $S_{q\Delta}$ — ГЭ-аппроксимации границ S_q, $T^{(i)}_{n_1 k}$, $T^{(i)}_{q n_2 k}$ — компоненты искомых узловых напряжений, функции влияния $\gamma_{n_1 k}$, $\gamma_{q n_2 k}$ определяются по формулам (1.7) (с заменой 2μ на соответствующие постоянные c_1 и c_q); матрицы фундаментальных решений $\boldsymbol{\Gamma}_q(x, y)$ и тензоры Грина второй задачи статики $\boldsymbol{\Gamma}_q{}^{(2)}(x, y)$ зависят от μ_q, λ_q [8].

Допустимость приложений (3.7) для решения задачи $\min \Phi(\mathbf{u})$ устанавливается подобно [1] при учете условия сопряжения в виде

$$U^{(i)}_{1 n_2 k} = U^{(k)}_{2 n_2 k}, \ \forall k = 1, \ldots, K, \ A n_2 = 1, \ldots, N_2$$

где $U^{(i)}_{qn_2k}$ — компоненты узловых перемещений, соответствующие компонентам узловых напряжений $T^{(i)}_{qn_2k}$. Таким образом, в точках поверхности разрыва постоянных Ламе вектор-функции перемещений непрерывны. Из допустимости приближений (3.7) следует выполнение соотношений (3.4), (3.5) (с интегрированием по $G_{q\Delta}$ и $S_{q\Delta}$).

Процесс Ритца для решения задачи $\min \Phi(\mathbf{u})$ на ГЭ-приближениях (3.7) приводит [1] к системе Ритца. Процедура исключения из системы объемных интегралов подробно описана в [1, с. 622]. Здесь объемные интегралы вида $2\int W_q(\mathbf{u}_{qN}, \mathbf{v})\, dG_{q\Delta}$ исключаются при помощи соотношений, полученных из интегральных тождеств (3.4), (3.5) (с интегрированием по $G_{q\Delta}$ и $S_{q\Delta}$).

При переходе к системе уравнений МГЭ используются граничные значения (1.8) ППС (вида (1.7)) γ_{n_1k}, γ_{qn_2k}. В итоге система уравнений МГЭ для нахождения компонент узловых напряжений имеет вид

$$\sum_{n_2=1}^{N_2}\sum_{k,p=1}^{K}\Big[\alpha^{-1}(T^{(i)}_{1n_2k}-T^{(i)}_{2n_2k})\int\partial_{\nu_{n_2}}\psi_k\partial_{\nu_{n_2}}\psi_p\,|J|\,ds-$$
$$-(c_1^{-1}T^{(i)}_{1n_2k}-c_2^{-1}T^{(i)}_{2n_2k})\int\psi_k\partial_{\nu_{n_2}}\psi_p\,|J|\,ds\Big]+$$
$$+\sum_{n_1=1}^{N_1}\sum_{k,p=1}^{K}c_1^{-1}T^{(i)}_{n_1k}\Big[\int\partial_{\nu_{n_1}}\psi_k\psi_p\,|J|\,ds+\theta c_1^{-1}\int\psi_k\psi_p\,|J|\,ds\Big]=$$
$$=\sum_{n_2=1}^{N_2}\sum_{p=1}^{K}\Big[-\alpha^{-1}\int(t_i^{(\nu_{n_2})}(\delta_1)-t_i^{(\nu_{n_2})}(\delta_2))\,\partial_{\nu_{n_2}}\psi_p\,|J|\,ds+$$
$$+\int(\delta_{1i}-\delta_{2i})\,\partial_{\nu_{n_2}}\psi_p\,|J|\,ds\Big]-$$
$$-\sum_{n_1=1}^{N_1}\sum_{p=1}^{K}c_1^{-1}\Big[\int t_i^{(\nu_{n_1})}(\delta_1)\,\psi_p\,|J|\,ds+\theta\int\delta_{1i}\psi_p\,|J|\,ds\Big]-$$
$$-\int_{G_{1\Delta}}K_i\gamma_{N_1K}\,dG_{1\Delta}-\int_{G_{2\Delta}}K_i\gamma_{2N_2K}\,dG_{2\Delta} \qquad (3.8)$$
$$\gamma_{N_1K}=\sum_{n_1=1}^{N_1}\sum_{p=1}^{K}\gamma_{n_1p},\qquad \gamma_{2N_2K}=\sum_{n_2=1}^{N_1}\sum_{p=1}^{K}\gamma_{2n_2p}$$

Под знаком сумм по n_q интегралы вычисляются по ГЭ $\Delta s_{n_q}(\eta)$.

Решение системы (3.8) реализуется при условии

$$c_1^{-1}T^{(i)}_{1n_2k}=c_2^{-1}T^{(i)}_{2n_2k}\qquad \forall k=1,\ldots,K$$

и система однозначно разрешима [1].

4. Рассмотрим некоторые вопросы численной реализации и практического использования изложенных вариационных формулировок МГЭ (см. также [I]). В качестве примера рассматривалась задача Сен-Венана для стержня с эллиптическим поперечным сечением, которая может быть поставлена [7] относительно скалярной функции депланации сечения как неоднородная задача Неймана для уравнения Лапласа в области поперечного сечения. Эта задача эквивалентна задаче минимизации граничного функционала (вида (1.1)) на множестве гармонических функций, или задаче минимизации обобщенного функционала Трефтца (вида (1.4), см. [1]) также на указанном множестве.

ГЭ-аппроксимация решения этих вариационных задач при помощи гармонических потенциалов двойного слоя с искомой плотностью в узлах ГЭ приводит к системам ГЭ-уравнений (методика записи которых приведена в [I]) с симметричными матрицами коэффициентов ленточной структуры; ширина ленты зависит от типа используемых граничных элементов. Наиболее просто вычисляются коэффициенты матрицы систем (вида (1.3), (2.5), (3.8)) при аппроксимации границы изопараметрическими ГЭ второго порядка [I]. Для такой аппроксимации сравнительный анализ численных результатов реализации вариационных формулировок МГЭ, указанной выше задачи кручения, показывает, что для достижения точности одинакового порядка ГЭ-приближениям «по Трефтцу» требуется число ГЭ, в три раза большее по сравнению с ГЭ-приближениями «по Ритцу»; это подтверждает известные результаты [II] о более медленной сходимости метода Трефтца по сравнению с методом Ритца. Также подтверждается, что ГЭ-приближения «по Ритцу» — приближения «с избытком», а «по Трефтцу» — «с недостатком» по сравнению с точным решением задачи — это следует из сравнения соответствующих узловых значений функции депланации.

В отношении практического применения предложенных формулировок МГЭ следует отметить, что формулировку на основе минимизации граничного функционала целесообразно применять при решении односторонних граничных задач. ГЭ-приближения «по Ритцу» для решения плоской задачи теории упругости с односторонними ограничениями (типа обобщенной задачи Синьорини) использовались [12] при реализации алгоритма двойственности. Формулировку на основе минимизации обобщенного функционала Трефтца удобно применять при решении смешанных задач и задач для кусочно-однородных упругих тел, так как особенности этих задач, связанные с различными граничными условиями и условиями сопряжения для искомой функции, учитываются в соответствующих обобщенных функционалах Трефтца [10].

Подробно анализировались [I] преимущества и недостатки предложенных вариационных формулировок МГЭ в сравнении с существующими на основе граничных интегральных уравнений [13, 6] (которые чаще применяются в приложениях), поэтому, не повторяясь, подчеркнем лишь, что в [I] начата и продолжена в данной работе разработка граничного ((m — 1)-мерного) варианта МКЭ в формулировке «по Ритцу» со всеми вытекающими отсюда особенностями численной реализации алгоритмов, присущими вариационной формулировке МКЭ. Если же проводить сравнение с формулировками МГЭ на основе метода взвешенных остатков (невязок) [14], то следует отметить, что предложенные формулировки на основе вариационных задач для граничных функционалов и обобщенных функционалов Трефтца могут рассматриваться как вариант реализации указанного метода, который допускает и вариационные формулировки. Сопоставление же отдельных деталей указывает, безусловно, на общие черты, присущие различным формулировкам МГЭ: интегральные представления на основе теории потенциала и интерполяция на граничном элементе решения задачи в постановке, использующей граничные интегральные уравнения или вариационный подход.

Отметим, что предложенные вариационные формулировки МГЭ для решения граничных задач линейной теории упругости могут трактоваться в виде полуаналитического МГЭ для решения эллиптических краевых задач. Обоснованием такой терминологии является то, что ГЭ-приближения «по Ритцу» решения вариационных задач для граничных функционалов (или обобщенных функционалов Трефтца) с ограничением — удовлетворение дифференциальному уравнению краевой задачи — тождественно равны граничным потенциалам (или суперпозиции объемного и граничных потенциалов). Таким образом, ограничение вариационных задач удовлетворяется в точности; плотность же граничных потенциалов определяется так, чтобы удовлетворялись граничные условия краевой задачи в результате решения вариационной задачи для граничного функционала (или обобщенного функционала Трефтца).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Терещенко В. Я.* О некоторых формулировках метода граничных элементов // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 616—627.
2. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука. 1979. 744 с.
3. *Жермен П.* Курс механики сплошных сред. М.: Высш. шк., 1983. 399 с.
4. *Терещенко В. Я.* Двойственные вариационные задачи для граничных функционалов линейной теории упругости // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 6. С. 1053—1059.
5. *Терещенко В. Я.* Об одном подходе к исследованию задачи Синьорини, использующем идеи двойственности // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. I. С. 116—123.
6. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
7. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1975. 575 с.
8. *Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В.* Трехмерные задачи математической теории упругости. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1968. 627 с.

9. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964. 538 с.
10. *Терещенко В. Я.* Обобщение метода Трефтца для пространственных задач теории упругости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1976. Т. 16. № 4. С. 996—1005.
11. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
12. *Терещенко В. Я.* Об алгоритме решения задачи Синьорини // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 6. С. 1020—1029.
13. Метод граничных интегральных уравнений / Ред. Круз Т., Риццо Ф. М.: Мир, 1978. 210 с.
14. *Бреббия К., Уокер С.* Применение метода граничных элементов в технике. М.: Мир, 1982. 248 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
12.IX.1989