Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 1, 1991

УДК 539.3

В. И. Кондауров

О РЕОЛОГИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОЙ ПОВРЕЖДАЮЩЕЙСЯ СРЕДЫ

Рассматривается среда, содержащая рассеянные по объему повреждения типа микротрещин, число и размеры которых могут изменяться под действием приложенных напряжений; к таким материалам относятся хрупкие горные породы, некоторые металлические сплавы, стекла и т. п. Для описания поведения подобных сред используется модель континуального разрушения упругих тел [1], основанная на локальном балансе эффективной поверхностной энергии микротрещин и накопленной упругой энергии окружающего микротрещины материала. В изотермическом приближении исследуются ограничения на допустимые значения деформаций, накладываемые условием Адамара [2], представляющим собой необходимое условие корректности любых динамических или квазистатических задач. Эти ограничения играют роль критерия прочности, тесно связанного с внутренней структурой используемых реологических соотношений.

Показано, что нарушение условия Адамара, отождествляемое с реологической неустойчивостью материала, сопровождается образованием стационарных поверхностей разрыва деформаций, причем в отличие от упругопластического дилатирующего материала [3, 4] для используемой модели возможно возникновение реологической неустойчивости как в процессе нагружения, так и при разгрузке материала. Найдена ориентация поверхностей разрыва деформаций по отношению к главным осям тензора деформации.

Рассматривая вслед за [3] стационарные поверхности разрыва деформаций как границы узких зон локализации деформаций, являющихся типичными структурными элементами природных тел и нагруженных лабораторных образцов [5, 6], полученные соотношения можно интерпретировать как условия зарождения и пространственные характеристики макроразрывов в упругой повреждающейся среде.

В математическом моделировании поведения среды, для которой характерны процессы зарождения и эволюции многочисленных рассеянных по объему дефектов, можно выделить два основных подхода. Первый опирается на методы теории пластичности дилатирующих материалов. Характерные особенности механизма деформирования: раскрытие и закрытие микротрещин, их зарождение и рост, сопровождающийся фрикционным скольжением берегов,— учитывается с помощью зависимости предела текучести от гидростатического давления, неассоциированного закона пластического течения, учета неупругой объемной сжимаемости и т. д. Определяющие уравнения таких сред были развиты в [3, 7—9]. Другой подход связан с теорией континуального, рассеянного разрушения твердых тел [10—12], называемой также теорией повреждаемости, континуальной теорией дефектов и т. п. Далее для описания малых изотермических деформаций однородной и начально-изотропной упругой повреждающейся среды будем использовать модель рассеянного разрушения [1], представляющую собой континуальный аналог подхода Гриффитса в механике изолированной макротрещины [13].

1. Основные уравнения повреждающейся среды. Пусть ε — тензор малых деформаций свободной от напряжений отсчетной конфигурации $\varkappa$ в конфигурацию $\chi(t)$ тела в текущий момент времени t, $\varepsilon' = \varepsilon - {}^1/_3\mathbf{I}\,(\mathbf{I} : \varepsilon)$ — девиатор тензора ε, $I_1 = \mathbf{I} : \varepsilon$, $J = (\varepsilon' : \varepsilon')^{1/2}$, где $\mathbf{I}$ — единичный тензор второго ранга, двоеточие означает двойное скалярное произведение. Обозначим $\mathbf{N} = \varepsilon'/J$ — нормированный девиатор тензора деформаций, для которого справедливы соотношения

$$\mathbf{N} : \mathbf{I} = 0, \quad \mathbf{N} : \mathbf{N} = 1 \tag{1.1}$$

Поврежденность материала будем характеризовать скалярной величиной $\omega \leqslant 1$, представляющей собой отношение плотностей массы в отсчетной $\varkappa$ и разгруженной $\varkappa^*$ конфигурации тела. Как и в теории пластичности, разгруженная конфигурация $\varkappa^*$, получаемая из $\chi(t)$ снятием напряжений в каждом элементе тела, не совпадает с $\varkappa$, если разгрузке предшествовали неупругие деформации.

Выберем потенциал среды в простейшем виде

$$\rho u(\varepsilon, \omega) = {}^1/_2 K I_1^2 + \mu J^2 - \alpha_p \omega I_1 - \alpha_s J \omega \tag{1.2}$$
$$(\rho, K, \mu, \alpha_p, \alpha_s = \mathrm{const} > 0)$$

где ρ — текущая плотность массы, K, μ — модули объемного сжатия и сдвига, α_p, α_s — параметры, характеризующие уменьшение плотности упругой энергии с ростом поврежденности ω за счет частичной разгрузки материала в окрестности микротрещин при увеличении их числа или размеров.

Из (1.2) следует выражение для тензора напряжений [1]

$$\mathbf{T} = \rho \frac{\partial u(\varepsilon, \omega)}{\partial \varepsilon} = (K I_1 - \alpha_p \omega)\mathbf{I} + \left(2\mu - \frac{\alpha_s \omega}{J}\right)\varepsilon' \tag{1.3}$$

Плотность эффективной поверхностной энергии $u_f(\omega)$ будем также задавать простейшим выражением

$$\rho u_f(\omega) = \rho u_f^0 + \gamma\omega + {}^1/_2 \beta\omega^2 \tag{1.4}$$
$$(u_f^0, \gamma, \beta = \mathrm{const} > 0)$$

Сопротивление росту трещиноватости в этом случае равно

$$\rho G \equiv \rho \partial u_f(\omega)/\partial\omega = \gamma + \beta\omega \tag{1.5}$$

Отсюда виден феноменологический смысл постоянных γ и β.

В рассматриваемом материале возможны два процесса: пассивный, в котором $\omega^\cdot = 0$, и активный, в котором $\omega^\cdot \neq 0$. Более того, предполагая, что микротрещины не залечиваются на рассматриваемых временных интервалах, а при образовании дефектов затрачивается энергия, будем считать, что в активном процессе $\omega \geqslant 0$, $\omega^\cdot > 0$. Тогда в отсутствие распределенных источников тепла и иных видов энергии условие локального баланса упругой и поверхностной энергий в активном процессе записывается в форме

$$\partial u(\varepsilon, \omega)/\partial\omega + G(\omega) = 0, \quad \omega \geqslant 0, \quad \omega^\cdot > 0$$

Из (1.2) и (1.5) следует связь $\omega(\varepsilon)$ в активном процессе

$$\omega = (\alpha_p I_1 + \alpha_s J - \gamma)/\beta, \quad \omega \geqslant 0, \quad \omega^\cdot > 0 \tag{1.6}$$

Если же $\alpha_p I_1 + \alpha_s J - \gamma < 0$ или скорость изменения деформаций такова, что $\alpha_p I_1^\cdot + \alpha_s J^\cdot < 0$, то реализуется пассивный процесс ($\omega^\cdot = 0$), который представляет собой либо процесс деформирования неповрежденного материала ($\omega \equiv 0$), либо процесс разгрузки, в котором $\omega = \omega_*$, где ω_* — значение поврежденности в момент перехода от активного нагружения к рассматриваемому процессу разгрузки.

Из (1.3) видно, что в отсутствие поврежденности ($\omega \equiv 0$) связь напряжений и деформаций совпадает с законом Гука. В процессе разгрузки ($\omega = \omega_* = \mathrm{const}$) напряжения связаны с деформациями соотношением

$$\mathbf{T} = K I_1 \mathbf{I} + 2\mu\varepsilon' - \mathbf{T}_*, \quad \mathbf{T}_* \equiv \alpha_p \omega_* \mathbf{I} + \alpha_s \omega_* \mathbf{N} \tag{1.7}$$

Обозначая $\mathbf{v}$ — вектор массовой скорости частицы, ∇ — градиент по пространственной переменной $\mathbf{x} \in \chi(t)$, систему дифференциальных уравнений динамики упругой повреждающейся среды относительно переменных (v, ε) запишем в форме

$$\rho \mathbf{v}^{\cdot} - \nabla \cdot \mathbf{T}(\boldsymbol{\varepsilon}, \omega(\boldsymbol{\varepsilon})) = 0, \quad 2\boldsymbol{\varepsilon}^{\cdot} - \nabla \otimes \mathbf{v} - (\nabla \otimes \mathbf{v})^T = 0 \tag{1.8}$$

Здесь учтено, что ω либо постоянная величина, либо связана с деформацией ε соотношением (1.6). Массовыми силами пренебрежем.

Используя (1.3), вариацию тензора напряжений в активном процессе можно представить в виде

$$\delta \mathbf{T} = \rho \mathbf{L}(\boldsymbol{\varepsilon}, \omega) : \delta \boldsymbol{\varepsilon}$$

где

$$\mathbf{L} = \frac{\partial^2 u(\varepsilon, \omega(\varepsilon))}{\partial \varepsilon \otimes \partial \varepsilon} + \frac{\partial^2 u}{\partial \omega \partial \varepsilon} \otimes \frac{\partial \omega}{\partial \varepsilon} \tag{1.9}$$

— тензор четвертого ранга гипоупругих коэффициентов, симметричный по двум первым и последним индексам, т. е. $L_{ijab} = L_{jiab} = L_{ijba}$.

Таким образом, система динамических уравнений в активном процессе может быть записана в виде квазилинейной системы

$$\mathbf{v}^{\cdot} - \mathbf{L}(\boldsymbol{\varepsilon}) \vdots (\nabla \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) = 0, \quad 2\boldsymbol{\varepsilon}^{\cdot} - \nabla \otimes \mathbf{v} - (\nabla \otimes \mathbf{v})^T = 0 \tag{1.10}$$

где символ (⋮) означает тройное скалярное произведение, так что для произвольных тетрады и триады имеет место равенство

$$(\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_3) \vdots (\mathbf{b}_1 \otimes \mathbf{b}_2 \otimes \mathbf{b}_3) = \mathbf{a}_0 \prod_{i=1}^{3} (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_i)$$

В пассивном процессе, когда поврежденность частицы $\omega = \omega_*$ неизменна во времени ($\omega_*^{\cdot} = 0$), но переменна по пространству, система дифференциальных уравнений совпадает с уравнениями линейной теории упругости неоднородного материала

$$\mathbf{v}^{\cdot} - \mathbf{L}_*(\boldsymbol{\varepsilon}) \vdots (\nabla \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) = -\frac{\partial^2 u(\varepsilon, \omega_*)}{\partial \omega \, \partial \varepsilon} \cdot \nabla \omega_*, \quad 2\boldsymbol{\varepsilon}^{\cdot} - \nabla \otimes \mathbf{v} - (\nabla \otimes \mathbf{v})^T = 0 \tag{1.11}$$

$$(\mathbf{L}_*(\boldsymbol{\varepsilon}) = \partial^2 u(\varepsilon, \omega_*)/\partial \varepsilon \otimes \partial \varepsilon)$$

2. Распространение слабых разрывов. Пусть $\psi(\mathbf{x}, t) = 0$ — уравнение сингулярной поверхности слабого разрыва, $c = -\partial\psi/\partial t / |\nabla\psi|$, $\boldsymbol{\nu} = \nabla\psi / |\nabla\psi|$ — скорость распространения и нормаль к этой поверхности [2, 14]. Обозначим **V** и **E** — амплитуды скачков нормальных к поверхности $\psi(\mathbf{x}, t) = 0$ производных вектора скорости $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ и тензора деформации $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$. Воспользуемся геометрическими и кинематическими условиями на поверхности слабого разрыва [2], следующими из условия непрерывности v, ε на рассматриваемой поверхности:

$$[\mathbf{v}^{\cdot}] = -c\mathbf{V}, \quad [\nabla \otimes \mathbf{v}] = \boldsymbol{\nu} \otimes \mathbf{V}$$
$$[\boldsymbol{\varepsilon}^{\cdot}] = -c\mathbf{E}, \quad [\nabla \otimes \boldsymbol{\varepsilon}] = \boldsymbol{\nu} \otimes \mathbf{E}$$

Пусть с обеих сторон этой поверхности материал находится в состоянии активного или пассивного нагружения и, следовательно, компоненты тензора **L** (ε) непрерывны вместе с v, ε. Тогда из системы (1.10) следует

$$c\mathbf{V} + \mathbf{L} \vdots (\boldsymbol{\nu} \otimes \mathbf{E}) = 0, \quad 2c\mathbf{E} + \boldsymbol{\nu} \otimes \mathbf{V} + \mathbf{V} \otimes \boldsymbol{\nu} = 0 \tag{2.1}$$

При заданной поверхности $\psi(\mathbf{x}, t) = 0$ и заданном тензоре **L** (ε) уравнения (2.1) представляют собой систему однородных линейных уравнений относительно величин **V**, **E**. Наряду с решением $\mathbf{V} = 0$, $\mathbf{E} = 0$ нетривиальное решение этой системы существует тогда и только тогда, когда $\psi = 0$ является характеристической поверхностью [14], скорость распространения c которой такова, что детерминант матрицы коэффициентов системы

(2.1) обращается в нуль при любом заданном направлении $\mathbf{v}$ распространения поверхности. В этом случае решение системы (1.10) можно продолжить через поверхность $\psi = 0$ неединственным образом — с разрывом нормальных производных и без него.

Из системы (2.1) видно, что любая стационарная поверхность $\psi(\mathbf{x}) = 0$ со скоростью $c \equiv 0$ является характеристической поверхностью, причем величина $\mathbf{V}$ на ней равна нулю.

Чтобы найти нестационарные характеристические поверхности ($c \not\equiv 0$), умножим первое уравнение (2.1) на $2c$, а второе — тензорно слева на $\mathbf{v}$ и подействуем оператором $\mathbf{L}$: . После вычитания второго уравнения из первого придем при учете указанной выше симметрии $\mathbf{L}$ к однородному линейному уравнению

$$(c^2\mathbf{I} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{L}\cdot\mathbf{v})\cdot\mathbf{V} = 0 \qquad (2.2)$$

Умножая (2.2) слева скалярно на $\mathbf{V}$, находим

$$(\mathbf{v}\otimes\mathbf{V}):\mathbf{L}:(\mathbf{V}\otimes\mathbf{v}) = c^2(\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}) > 0 \qquad (2.3)$$

Таким образом, необходимое условие гиперболичности системы (1.10) — вещественность скоростей распространения характеристических поверхностей — сводится к условию положительной определенности тензора четвертого ранга $\mathbf{L}$ на диадах частного вида, одной из составляющих которых служит произвольный ненулевой вектор $\mathbf{v}$, а второй — правый собственный вектор $\mathbf{V}$ акустического тензора $\mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{v}) \equiv \mathbf{v}\cdot\mathbf{L}(\boldsymbol{\varepsilon})\cdot\mathbf{v}$, соответствующий положительному собственному числу $c^2 > 0$. Поскольку $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{v})$, условие (2.3), вообще говоря, слабее условия

$$(\mathbf{v}\otimes\mathbf{b}):\mathbf{L}:(\mathbf{b}\otimes\mathbf{v}) > 0, \quad \forall\mathbf{b}\neq 0, \ \mathbf{a}\neq 0 \qquad (2.4)$$

выражающего свойство положительной определенности $\mathbf{L}$ на произвольных диадах и называемого часто условием Адамара, условием сильной эллиптичности [15], *SE* — условием [2].

Для частного случая — симметричного акустического тензора $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, который имеет место для рассматриваемой модели, неравенства (2.3) и (2.4) эквивалентны.

Действительно, из симметрии $\mathbf{A}$ следует, что среди правых собственных векторов, являющихся в данном случае и левыми собственными векторами, можно выбрать ортогональный базис $\mathbf{V}_i$, $i = 1, 2, 3$. Любой вектор $\mathbf{b}$ можно представить тогда в виде

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{3} b_i\mathbf{V}_i$$

При учете ортогональности $\mathbf{V}_i$ имеем

$$(\mathbf{v}\otimes\mathbf{b}):\mathbf{L}:(\mathbf{b}\otimes\mathbf{v}) = \Big(\sum_{i=1}^{3} b_i\mathbf{V}_i\Big)\cdot\mathbf{A}\cdot\Big(\sum_{j=1}^{3} b_j\mathbf{V}_j\Big) = \sum_{i=1}^{3} b_i^2\mathbf{V}_i\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{V}_i$$

Отсюда следует эквивалентность условий (2.3) и (2.4).

Будем называть состояние частицы материала, определяемое тензором деформации $\boldsymbol{\varepsilon}^0$, *реологически неустойчивым*, если существует такой вектор $\mathbf{v}_0(\boldsymbol{\varepsilon}^0)$, что скорость распространения нестационарной волны слабого разрыва в направлении $\mathbf{v}_0$ обращается в нуль, т. е. $c(\boldsymbol{\varepsilon}^0, \mathbf{v}_0(\boldsymbol{\varepsilon}^0)) = 0$.

Отсюда непосредственно следует, что $\det\mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon}^0, \mathbf{v}_0(\boldsymbol{\varepsilon}^0)) = 0$; существует нетривиальное решение $\mathbf{V}_0(\boldsymbol{\varepsilon}^0, \mathbf{v}_0)$ однородного уравнения $\mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon}^0, \mathbf{v}_0(\boldsymbol{\varepsilon}^0))\cdot\mathbf{V}_0 = 0$; квадратичная форма (2.3) является вырожденной на диаде $\mathbf{v}_0\otimes\mathbf{V}_0$, т. е.

$$(\mathbf{v}_0\otimes\mathbf{V}_0):\mathbf{L}(\boldsymbol{\varepsilon}^0):(\mathbf{V}_0\otimes\mathbf{v}_0) = 0$$

Обращаясь ко второму из уравнений (2.1), можно видеть, что при $c \to 0$ $\mathbf{V} \to \mathbf{V}_0 \neq 0$, а амплитуда $\mathbf{E}$ скачка нормальной производной тензора деформации неограниченно увеличивается, т. е. слабый разрыв становится сильным, на котором скорость непрерывна, а деформация терпит разрыв.

3. Условия и формы проявления реологической неустойчивости. Рассмотрим условия возникновения и ориентацию поверхностей разрыва деформаций. В активном процессе ($\omega \geqslant 0$, $\omega^{\cdot} > 0$) из соотношений (1.2), (1.6) следует выражение для тензора гипоупругих коэффициентов

$$\rho \mathbf{L}(\boldsymbol{\varepsilon}, \omega(\boldsymbol{\varepsilon})) = (\Lambda - M)\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2M\mathbf{1} - \xi(\mathbf{I} \otimes \mathbf{N} + \mathbf{N} \otimes \mathbf{I}) - \eta \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \qquad (3.1)$$

$$\varphi \equiv \alpha_s\omega/J,\ M \equiv \mu - {}^1/_2\varphi,\ \Lambda \equiv \lambda + \mu - \alpha_p{}^2/\beta - {}^1/_6\varphi,\ \xi \equiv \alpha_p\alpha_s/\beta,\ \eta \equiv \alpha_s{}^2/\beta - \varphi$$

$$K \equiv \lambda + {}^2/_3\mu,\quad \mathbf{1} \equiv {}^1/_2(\delta_a{}^i\delta_b{}^j + \delta_b{}^i\delta_a{}^j)\ \mathbf{э}_i \otimes \mathbf{э}_j \otimes \mathbf{э}^a \otimes \mathbf{э}^b$$

Здесь и далее $\mathbf{1}$ — единичный тензор четвертого ранга, $\delta_a{}^i$ — символ Кронекера, $\mathbf{э}_i$, $\mathbf{э}^a$ — векторы естественного и дуального базисов. Для любых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и тензора второго ранга $\mathbf{B}$ имеют место равенства

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{1}\cdot\mathbf{b} = {}^1/_2(\mathbf{b} \otimes \mathbf{a} + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{I}),\quad \mathbf{1} : \mathbf{B} = {}^1/_2(\mathbf{B} + \mathbf{B}^T)$$

Акустический тензор, соответствующий (3.1), записывается в форме

$$\rho \mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon}, \omega(\boldsymbol{\varepsilon}), \mathbf{v}) = M\mathbf{I} + \Lambda\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \xi(\mathbf{v} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{v}) - \eta \mathbf{n} \otimes \mathbf{n},\quad \mathbf{n} \equiv \mathbf{N}\cdot\mathbf{v}$$

а уравнение (2.2) для нестационарных волн слабого разрыва будет таким

$$\{S\mathbf{I} - \Lambda\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + \xi(\mathbf{v} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{v}) + \eta\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}\}\cdot\mathbf{V} = 0,\quad S \equiv \rho c^2 - M \qquad (3.2)$$

Умножая равенство (3.2) скалярно на векторы $\mathbf{v}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{v} \times \mathbf{n}$, где символ $\times$ означает векторное произведение, получим систему трех уравнений

$$\begin{gathered}(S - \Lambda + \xi(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}))\,x + (\xi + \eta(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}))\,y = 0\\ -(\Lambda(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) - \xi(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}))\,x + (S + \xi(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) + \eta(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}))\,y = 0\\ Sz = 0\end{gathered} \qquad (3.3)$$

где $x \equiv \mathbf{v}\cdot\mathbf{V}$, $y \equiv \mathbf{n}\cdot\mathbf{V}$, $z \equiv (\mathbf{v} \times \mathbf{n})\cdot\mathbf{V}$.

Если $\mathbf{v}$ не является собственным вектором нормированного девиатора $\mathbf{N}$, так что $\mathbf{v} \times \mathbf{n} \neq 0$, система (3.3) эквивалентна (3.2). Нетривиальное решение системы (3.3) возможно при условии

$$S\ (S^2 - 2pS - q) = 0 \qquad (3.4)$$

где

$$\begin{gathered}2p(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{v}) = \lambda + \mu - \beta^{-1}\mathbf{v}\cdot(\alpha_p\mathbf{I} + \alpha_s\mathbf{N})^2\cdot\mathbf{v} + \varphi(\mathbf{v}\cdot\mathbf{N}^2\cdot\mathbf{v} - {}^1/_6)\\ q(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{v}) = \zeta(\mathbf{v} \times \mathbf{n})^2 = \zeta(\mathbf{v}\cdot\mathbf{N}^2\cdot\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{N}\cdot\mathbf{v})^2),\quad \zeta \equiv \xi^2 + \eta\Lambda\end{gathered} \qquad (3.5)$$

Корнями уравнения (3.4) служат

$$\rho c_{1,2}{}^2 = M + p \pm \sqrt{p^2 + q},\qquad \rho c_3{}^2 = M \qquad (3.6)$$

Вырождение по c_3 наступает при деформациях, определяемых условием

$$\varphi\ (I_1, J) \equiv \alpha_s\omega\ (I_1, J)/J = 2\mu \qquad (3.7)$$

Вектор $\mathbf{v}$ в этом случае произволен, а $\mathbf{V}$ — ортогонален плоскости, проведенной через векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{n}$, поскольку из первых двух уравнений (3.2) следует $x = y = 0$.

Найдем теперь вектор $\mathbf{v}$, доставляющий экстремум величине $\rho c_2{}^2(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{v})$. Без ограничения общности можно считать $\mathbf{v}$ единичным вектором, поэтому будем искать экстремум методом множителей Лагранжа. Функцию Лагранжа запишем в виде

$$\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{v}) = \rho c_2{}^2(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{v}) - {}^1/_2\varkappa\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$$

где $\varkappa$ — неизвестный множитель Лагранжа.

Условие экстремума при учете соотношения (3.6) записывается в виде

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\nu}} = \frac{-1}{2\sqrt{p^2+q}}\left(2S_2\frac{\partial p}{\partial\boldsymbol{\nu}} + \frac{\partial q}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right) - \varkappa\boldsymbol{\nu}, \quad S_2 \equiv \rho c_2^2 - \mu$$

Умножая это уравнение скалярно на $\boldsymbol{\nu}$, получим

$$\varkappa = \frac{-1}{2\sqrt{p^2+q}}\left(2S_2\frac{\partial p}{\partial\boldsymbol{\nu}} + \frac{\partial q}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right)\cdot\boldsymbol{\nu}$$

При учете этого выражения и соотношений (3.5) условия экстремума записываются в форме

$$(\mathbf{I} - \boldsymbol{\nu}\otimes\boldsymbol{\nu})\cdot\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\nu} = 0 \tag{3.8}$$

$$\mathbf{B} \equiv S_2\{\varphi\mathbf{N}^2 - \beta^{-1}(\alpha_p\mathbf{I} + \alpha_s\mathbf{N})^2\} + \zeta\{\mathbf{N}^2 - 2(\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\nu})\mathbf{N}\}$$

Из соотношения (3.8) следует, что $\boldsymbol{\nu}$ — собственный вектор симметричного тензора **B**. В силу полиномиального представления **B** как функции **N** собственные векторы тензора **N** являются собственными векторами **B**. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, поскольку могут существовать векторы, собственные для **B**, но не являющиеся таковыми для **N**.

Если воспользоваться системой координат, ортонормированный базис которой совпадает в рассматриваемой точке с главными осями тензора **N**, то уравнение (3.8) в этом базисе запишется в виде трех скалярных уравнений

$$\{(B_1 - B_2)\nu_2^2 + (B_1 - B_3)\nu_3^2\}\nu_1 = 0 \quad (1\ 2\ 3) \tag{3.9}$$

где B_1, B_2, B_3 — собственные числа **B**.

Из (3.9) следует, что нетривиальное решение $\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1$ существует в трех случаях: 1) $\boldsymbol{\nu}$ — собственный вектор тензора **N**, собственные числа тензора **B** различны; 2) вектор $\boldsymbol{\nu}$ принадлежит плоскости, проходящей через два собственных вектора тензора **N**, два собственных числа тензора **B** совпадают; 3) тензор **B** шаровой.

Рассмотрим более подробно каждый случай. Обозначим $\mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$) — ортонормированный базис, совпадающий с главными осями девиатора напряжений. Тогда $\mathbf{N} = N_1\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1 + N_2\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2 + N_3\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_3$, где N_i — собственные числа нормированного девиатора напряжений. Пусть в первом случае для определенности $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{e}_1$. Тогда $\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\nu} = N_1\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\nu} = N_1$, $\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{N}^2\cdot\boldsymbol{\nu} = N_1^2$. Учитывая, что $\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\nu} = 0$, находим скорость c_2 распространения поверхностей слабого разрыва: $\rho c_2^2 = M$ при $p \geqslant 0$; $\rho c_2^2 = M + 2p$ при $p < 0$. Отсюда следует, что при

$$\lambda + 2\mu\,(N_1^2 + {}^1/_3) \geqslant \beta^{-1}(\alpha_p + \alpha_s N_1)^2$$

реологическая неустойчивость наступает при $\varphi = 2\mu$. Ориентация поверхностей разрыва деформации может быть любой.

При $p < 0$, что эквивалентно условию

$$\lambda + \mu - \beta^{-1}(\alpha_p + \alpha_s N_1)^2 + \varphi\,(N_1^2 - {}^1/_6) < 0$$

минимальная скорость возмущений обращается в нуль при деформациях, определяемых уравнением

$$\lambda + 2\mu - \beta^{-1}(\alpha_p + \alpha_s N_1)^2 + \varphi\,(N_1^2 - {}^2/_3) = 0 \tag{3.10}$$

Вектор **V**, характеризующий амплитуду слабого разрыва, в этом случае совпадает с точностью до знака с вектором $\boldsymbol{\nu}$, что позволяет назвать эту форму проявления реологической неустойчивости *разрывом деформаций растяжения* (*сжатия*).

Из уравнения (3.10) следует, что рассматриваемый случай может реализоваться при $N_1^- < N_1 < N_1^+$, где $N_1^{\pm} = (-\alpha_p \pm \sqrt{(\lambda + 2\mu)\beta})/\alpha_s$. Если же $N_1^+ < -\sqrt{2/3}$, т. е. $\lambda + 2\mu < \beta^{-1}(\alpha_p - \alpha_s\sqrt{2/3})^2$, то материал становится реологически неустойчивым сразу же, как только начинается процесс накопления поврежденности.

Обращаясь ко второму варианту и полагая $\nu_1^2 + \nu_2^2 = 1$, $\nu_3 = 0$, можно видеть, что третье уравнение системы (3.9) удовлетворяется тождественно, а из первых двух соотношений следует $B_1 = B_2$ и

$$\nu_1^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \zeta^{-1}S_2\,\frac{2\xi - \eta N_3}{N_1 - N_2}\right), \quad \nu_2^2 = 1 - \nu_1^2 \tag{3.11}$$

Минимальный корень φ уравнения

$$\rho c_2^2 \equiv M + p - \sqrt{p^2 + q} = 0 \tag{3.12}$$

определяет на плоскости (I_1, J) прямую, в точках которой материал становится реологически неустойчивым. Поскольку $p - \sqrt{p^2 + q} \leqslant 0$ при всех p и всех $q \geqslant 0$, то вырождение наступает при $M > 0$.

Амплитуда разрыва характеризуется нормальной и касательной составляющими.

Третий случай, когда тензор **B** шаровой и все три компоненты вектора $\boldsymbol{\nu}$ отличны от нуля, реализуется только для частного вида деформированного состояния — одноосной деформации

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \quad N = \pm\sqrt{2/3}\,\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \mp (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3)/\sqrt{6}$$

В этом случае компоненты вектора экстремальной нормали удовлетворяют уравнению

$$2\nu_2^2 - (\nu_1^2 + \nu_3^2) = (\zeta - \eta S_2 \mp 2\sqrt{6}\xi S_2)/(2\zeta) \tag{3.13}$$

которое задает поверхность кругового конуса с осью $\mathbf{e}_2$. Угол Ψ полураствора этого конуса определяется выражением

$$\sin^2\Psi = 2/3 - 1/3\,\zeta^{-1}(\eta \pm 2\xi\sqrt{6})S_2$$

совпадающим с первым из равенств (3.11) при $N_1^2 = 2/3$, $N_2^2 = N_3^2 = 1/6$.

Для доказательства соотношения (3.13) заметим, что в силу тождеств (1.1) шаровая часть тензора $\mathbf{N}^2$ равна $1/3\mathbf{I}$. Это означает, что девиатор тензора **B**, определенный вторым из соотношений (3.8), равен нулю при условии

$$\{\zeta(\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\nu}) + 2\xi S_2\}\,\mathbf{N} = (\zeta - \eta S_2)(\mathbf{N}^2 - 1/3\mathbf{I}) \tag{3.14}$$

Отсюда при действии оператора **N**: на обе части равенства следует

$$\zeta(\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\nu}) = (\zeta - \eta S_2)\,\mathbf{N}^3 : \mathbf{I} - 2\xi S_2$$

Подставляя это выражение в (3.14), придем при $\zeta - \eta S_2 \neq 0$ к уравнению

$$(\mathbf{N}^3 : \mathbf{I})\,\mathbf{N} = \mathbf{N}^2 - 1/3\mathbf{I} \tag{3.15}$$

определяющему частные виды деформации, при которых возможна реализация рассматриваемого случая.

Учитывая, что в главных осях тензора **N** имеет место $\mathbf{N}^3 : \mathbf{I} = 3N_1N_2N_3$, тензорное уравнение (3.15) в этих осях можно записать в виде трех скалярных уравнений

$$(1 - 3N_2N_3)\,N_1^2 = 1/3 \quad (1\ 2\ 3)$$

При учете (1.1) отсюда следует уравнение $(5/2 - 3N_1^2)\,N_1^2 = 1/3$ с решениями $N_1^2 = 2/3$, $N_1^2 = 1/6$.

В силу симметрии системы уравнений точно такие же решения имеются для N_2 и N_3.

Возникает вопрос, какой из трех случаев реализуется. Будем считать, что реализуется та из форм проявления реологической неустойчивости, которая соответствует наименьшему значению параметра $\varphi \equiv \equiv \alpha_s\omega(I_1, J)/J$. Действительно, при $J > 0$ величинам $\varphi = \varphi_i$, $\varphi_i = \text{const}$ ($i = 1, 2$) на плоскости (I_1, J) соответствуют прямые, проходящие через точку $(\gamma/\alpha_p, 0)$ с коэффициентом наклона $k_i = \alpha_p\alpha_s/(\varphi_i\beta - \alpha_s^2)$. В процессе деформирования с любой непрерывной траекторией, начинающейся в точке (0, 0), первой будет пересекаться прямая, образующая максимальный положительный угол с осью I_1, т. е. соответствующая минимальному значению φ.

Рассмотрим теперь условия реологической неустойчивости материала в пассивном процессе. В этом случае

$$\rho\mathbf{L}(\varepsilon', \omega_*) = (\lambda + {}^1/_3\varphi_*)\,\mathbf{I}\otimes\mathbf{I} + (\mu - {}^1/_2\varphi_*)\,\mathbf{1} + \varphi_*\mathbf{N}\otimes\mathbf{N} \tag{3.16}$$

Уравнение (2.2) записывается в виде

$$\{S_*\mathbf{I} - \Lambda_*\mathbf{v}\otimes\mathbf{v} - \varphi_*\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\}\cdot\mathbf{V} = 0 \tag{3.17}$$

$$M_* \equiv \mu - {}^1/_2\varphi_*,\quad \Lambda_* \equiv \lambda + \mu - {}^1/_6\varphi_*,\quad \mathbf{n} \equiv \mathbf{N}\cdot\mathbf{v},\quad S_* \equiv \rho c^2 - M_*$$

Условием нетривиального решения уравнения (3.17) служит

$$S_*(S_*^2 - 2p_*S_* - q_*) = 0$$

$$p_* \equiv {}^1/_2(\Lambda_* + \varphi_*\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}),\qquad q_* \equiv \varphi_*\Lambda_*(\mathbf{v}\times\mathbf{n})^2$$

что приводит к аналогичным (3.6) выражениям для скоростей распространения волн слабого разрыва в материале при пассивном деформировании.

Если воспользоваться выражением

$$4(p_*^2 + q) = \Lambda_*^2 + \varphi_*^2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})^2 + 2\varphi_*\Lambda_*(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})\cos 2\alpha$$

где α — угол между векторами $\mathbf{v}$ и $\mathbf{n}$, и неравенством

$$-\,|\,\Lambda_*\,| \leqslant \Lambda_*\cos 2\alpha \leqslant |\,\Lambda_*\,|$$

из которых следует

$$^1/_4(|\,\Lambda_*\,| - \varphi_*\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}) \leqslant p_*^2 + q_* \leqslant {}^1/_4(|\,\Lambda_*\,| + \varphi_*\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})$$

то условие существования действительных скоростей распространения волн можно записать в форме

$$M_* \equiv \mu - {}^1/_2\varphi_* > 0,\quad \Lambda_* + M_* \equiv \lambda + 2\mu - {}^2/_3\varphi_* > 0 \tag{3.18}$$

При $\mu > 0$, $\lambda + 2\mu > 0$ отсюда следует, что неповрежденный материал ($\omega \equiv 0$) деформируется устойчиво в отличие от поврежденного разгружающегося. Действительно, при любом уровне поврежденности $\omega_* > 0$ найдется интенсивность сдвига $J > 0$, при которой перестанет быть справедливым одно из соотношений (3.18). Если $K > 0$, то реологическая неустойчивость наступает при интенсивности сдвига $J = \alpha_s\omega_*/2\mu$, обращающей в нуль девиатор напряжений. Эта форма потери реологической устойчивости при снятии касательных напряжений может происходить при произвольной ориентации поверхностей разрыва деформаций.

4. Примеры. Рассмотрим условия возникновения реологической неустойчивости для некоторых характерных видов деформированного состояния.

Шаровой тензор деформации. В этом случае $\varepsilon = I_1\mathbf{I}$, $J = 0$, нормированный девиатор $\mathbf{N}$ неопределен. Обращаясь непосредственно к выражению (3.1) для тензора $\mathbf{L}$, можно видеть, что коэффициенты Λ, M, η будут неограниченными при $\omega \neq 0$. Это означает, что неповрежденный материал теряет сплошность, как только $I_1 = \gamma/\alpha_p$. Иными словами, при всестороннем растяжении соотношение $I_1 \leqslant \gamma/\alpha_p$ служит традиционным критерием прочности материала. Отметим, что всестороннее сжатие ($I_1 < 0$) не вызывает накопления повреждений рассматриваемой среды.

Одноосная деформация $\varepsilon = \varepsilon\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2$. В этом случае

$$I_1 = \varepsilon,\quad J = |\,\varepsilon\,|\sqrt{^2/_3},\quad N = \varkappa(\sqrt{^2/_3}\,\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2 - (\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_3)/\sqrt{6})$$

где $\varkappa = \operatorname{sign} \varepsilon$. Обращаясь к условию (3.10) образования плоскостей разрыва деформаций, перпендикулярных главной оси тензора N, находим

$$\varphi^{(1)} = 2 \{\lambda + 2\mu - \beta^{-1} (\alpha_p - \varkappa\alpha_s/\sqrt{6})^2\}$$

Для поверхностей разрыва деформаций, расположенных под углом к главным осям тензора N, минимальное значение $\varphi^{(2)}$ определяется уравнением (3.12), в котором в соответствии с формулами (3.5), (3.13) величины ν, p, q определены выражениями

$$\nu_1^2 + \nu_3^2 = {}^1/_3 (1 - \theta_t),\ \nu_2^2 = {}^1/_3 (2 + \theta_t),\ q = {}^1/_6 (2 + \theta_t) (1 - \theta_t)$$

$$p = \Lambda + 2\varkappa\xi (1 + \theta_t)/\sqrt{6} - {}^1/_2\eta (1 + {}^1/_3\theta_t)$$

$$\theta_t \equiv \zeta^{-1}M (\eta + 2\varkappa\xi \sqrt{6})/2$$

В зависимости от конкретных значений параметров среды может реализоваться как первый, так и второй случай. Например, при $\lambda = \alpha_p = \alpha_s = \beta = \mu$ значения $\varphi^{(1)} = 2{,}03$, $\varphi^{(2)} = 1{,}65$, т. е. реологическая неустойчивость материала при одноосном растяжении проявляется в форме образования конических поверхностей разрыва деформаций. Напротив, при $\alpha_p = \alpha_s = \beta = \mu$, $\lambda = 0{,}2\mu$ первыми при $\varphi^{(1)} \simeq 0{,}43$ образуются перпендикулярные границе слоя поверхности разрыва, которые можно интерпретировать как прообраз трещин отрыва в сжатых горных породах [16, 17].

Чистый сдвиг $\varepsilon = \varepsilon (e_1 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2)$, $\varepsilon > 0$. В этом случае $I_1 \equiv 0$, $J = \varepsilon\sqrt{2}$, $N_1 = -N_2 = 1/\sqrt{2}$, $N_3 = 0$. Наименьшее значение φ, соответствующее поверхностям разрыва деформации растяжения, в силу (3.10) равно $\varphi^{(1)} = 6 (\lambda + 2\mu - \beta^{-1} (\alpha_p + \alpha_s/\sqrt{2})^2)$. Проявление реологической неустойчивости в форме плоскостей разрыва деформаций, близких по ориентации к плоскостям максимального касательного напряжения, соответствует наименьшему корню $\varphi^{(2)}$ уравнения (3.12), в котором $\nu_{1,2} = {}^1/_2 \pm \theta_s$, $2p = \Lambda - {}^1/_2\eta - 2\sqrt{2}\xi\theta_s$, $q = \zeta ({}^1/_2 - 2\theta_s)$, где $\theta_s \equiv \sqrt{2}\xi\zeta^{-1}M$. Как и при одноосной деформации, в зависимости от конкретных значений параметров среды может реализоваться как первый, так и второй случай. Так, при $\lambda = \mu = \alpha_p = \alpha_s = \beta$, $\varphi^{(1)} = 0{,}51$, $\varphi^{(2)} = 1{,}5$, т. е. первыми образуются плоскости разрыва деформации, перпендикулярные оси растяжения. При $\lambda = 1{,}2\mu$, $\alpha_p = \alpha_s = \beta = \mu$ имеет место $\varphi^{(1)} = 2{,}01$, $\varphi^{(2)} = 1{,}85$, т. е. относительно небольшое изменение модулей может приводить к смене форм проявления реологической неустойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кондауров В. И.* Континуальное разрушение нелинейно-упругих тел // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 2. С. 302—310.
2. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
3. *Rudnicki J. W., Rice J. R.* Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials // J. Mech. Phys. Solids. 1975. V. 23. № 6. P. 371—394.
4. *Никитин Л. В., Рыжак Е. И.* Закономерности разрушения горной породы с внутренним трением и дилатансией. // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1977. № 5. С. 22—37.
5. *Ревуженко А. Ф., Стажевский С. Б., Шемякин Е. И.* О механизме деформирования сыпучего материала при больших сдвигах // Физико-технич. пробл. разработки полезных ископаемых. 1974. № 3. С. 37—43.
6. *Стоянов С. С.* Механизм формирования разрывных зон. М.: Недра, 1977. 144 с.
7. *Drucker D. C., Prager W.* Soil mechanics and plastic analysis or limit design // Quart. Appl. Math. 1952. V. 10. № 2. P. 157—165.
8. *Григорян С. С.* Некоторые вопросы математической теории деформирования и разрушения твердых горных пород // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 4. С. 643—669.
9. *Николаевский В. Н.* Определяющие уравнения пластической деформации сыпучей среды // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 6. С. 1070—1082.
10. *Качанов Л. М.* Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 311 с.
11. *Ильюшин А. А.* Об одной теории длительной прочности // Инж. журн. МТТ. 1967. № 3. С. 21—35.
12. *Dragon A., Mroz Z.* A continuum model for plastic-brittle behaviour of rock and concrete // Intern. J. Engng. Sci. 1979. V. 17. P. 121. 137.
13. *Слепян Л. И.* Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981. 295 с.
14. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
15. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
16. *Stacey T. R., Jongh C. L.* Stress fracturing around a deeplevel bored tunnel // J. South Afr. Inst. Mining and Metallurg. 1977. V. 78. № 5. P. 124—133.
17. *Никитин Л. В., Одинцев В. Н.* Образование протяженных сомкнутых трещин отрыва в хрупких горных породах // Докл. АН СССР. 1987. Т. 294. № 4. С. 814—817.

Москва

Поступила в редакцию
23.III.1990