Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 1, 1991

УДК 622.011

Ю. Н. Гордеев

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА О ПЛОСКОЙ ТРЕЩИНЕ ГИДРОРАЗРЫВА В НАСЫЩЕННОМ ЖИДКОСТЬЮ ПЛАСТЕ

Рассматривается задача о вертикальной трещине гидроразрыва [1] в насыщенном жидкостью пласте, расклиниваемой потоком вязкой фильтрующейся жидкости. Предполагается, что напряженное состояние и деформация пласта описывается системой уравнений Био [2]. Используется система обозначений упругих констант, предложенная в работе [3].

В одном частном случае представления общего решения уравнений теории консолидации нестационарная задача о вертикальной трещине гидроразрыва в насыщенном жидкостью пласте сводится к решению уравнения типа пьезопроводности с источником и формуле, связывающей смещения берегов трещины с давлением жидкости разрыва и скоростью утечек жидкости через стенки трещины. Получена также формула для вычисления коэффициента интенсивности напряжений. В случае неподвижной «идеальной» трещины, давление вдоль которой постоянно, задача о гидроразрыве сводится к решению одномерного сингулярного интегрального уравнения для трансформант Лапласа. Находятся асимптотики решения этого уравнения на больших и малых временах.

Для решения задач теории консолидации было получено [4, 5] представление общего решения уравнений теории в форме Папковича — Нейбера. В развитие этого метода были учтены эффекты сжимаемости поровой жидкости [6]. При другом подходе к решению плоских задач было получено представление общего решения уравнений теории консолидации через две аналитические функции комплексного переменного [3]. Применение теории консолидации к исследованию стационарных задач гидроразрыва насыщенного жидкостью пласта было начато в работах [7, 8].

1. Постановка задачи. Пусть плоская трещина в бесконечном пористом насыщенном жидкостью пространстве в однородном сжимающем поле напряжений σ_0 поддерживается в раскрытом состоянии нагнетаемой внутрь трещины жидкостью, которая, двигаясь вдоль трещины, может фильтроваться через ее стенки в пористую среду. Предполагается, что радиус скважины r_0 много меньше длины трещины L_0, поэтому эффектами, связанными с наличием скважины, можно пренебречь.

Эта задача теории трещин возникает, в частности, в связи с проблемой гидравлического разрыва нефтеносного пласта [1].

Для описания деформации насыщенной жидкостью пористой среды и фильтрации в ней поровой жидкости используется связанная теория консолидации [3] ($i, j, k = 1, 2, 3$; по повторяющимся индексам производится суммирование)

$$d\sigma_{ij}/\partial x_j = 0, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{1.1}$$

$$2G\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} - \left(\frac{\nu}{1+\nu}\sigma_{kk} - 2\eta\frac{1-\nu}{1+\nu}P\right)\delta_{ij}; \quad \eta = \frac{3(\nu_u-\nu)}{2B(1-\nu)(1+\nu_u)} \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}m + \frac{\partial}{\partial x_i}q_i = 0, \quad m - m_0 = \frac{\rho_0}{G}\frac{(1-\nu)}{(1+\nu)}\eta\left(\sigma_{kk} + \frac{3}{B}P\right) \tag{1.3}$$

$$q_i = \rho_0 u_i = -\rho_0\frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial x_i}P \tag{1.4}$$

Здесь σ_{ij} — тензор суммарных напряжений, P — поровое давление, B — параметр Скэмптона, ν — коэффициент Пуассона, ν_u — коэффициент

Пуассона, соответствующий условиям, когда жидкость не может уйти из среды [3], G — модуль сдвига, ε_{ij} — тензор деформаций, m — масса поровой жидкости в единице объема, ρ_0, m_0 — плотность и масса поровой жидкости в единице объема в недеформированном состоянии, k — коэффициент проницаемости, μ — вязкость жидкости, u_i, q_i — скорость фильтрации и скорость потока массы фильтрующейся жидкости в i-м направлении.

Для плоского деформированного состояния ($\varepsilon_{33} = 0$), которое и будет рассматриваться ниже, закон Гука для насыщенной жидкостью пористой среды (1.2) принимает вид (α, β, $\gamma = 1, 2$)

$$2G\varepsilon_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} - \nu\,(\sigma_{\gamma\gamma} - 2\,(1-\nu)\,\eta P)\,\delta_{\alpha\beta} \tag{1.5}$$

Ось $x_2 = 0$ выбрана вдоль трещины, начало координат ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) — центр трещины.

Движение нагнетаемой жидкости вдоль трещины описывается уравнением неразрывности и законом Пуазейля

$$\frac{\partial}{\partial t} w + \frac{\partial}{\partial x_1}(wu) = -2v, \quad u = -\frac{w^2}{12\mu}\frac{\partial}{\partial x_1} P_c \tag{1.6}$$

Здесь w — раскрытие берегов трещины, P_c — давление нагнетаемой в трещину жидкости разрыва, u — скорость движения жидкости, v — скорость утечки жидкости разрыва через стенки трещины.

На берегах трещины ставятся граничные условия

$$P_c\,(x_1, t) = P\,(x_1, x_2 = 0, t)$$

$$v\,(x_1, t) = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial x_2} P\,(x_1, x_2 = 0, t) \tag{1.7}$$

2. Метод решения. Система уравнений (1.1), (1.3)—(1.5) для плоского деформированного состояния методами теории сингулярных интегральных уравнений была сведена [3] к задаче определения двух аналитических функций комплексного переменного. В отличие от этого подхода получим обобщение формул Колосова в частном случае, необходимом для теории трещин гидроразрыва, через функцию Эйри.

Тождественно удовлетворяя уравнениям равновесия (1.1) для плоской задачи (α, $\beta = 1, 2$) введем функцию Эйри

$$\sigma_{\alpha\beta} = (-1)^{\alpha+\beta}\partial^2 F/\partial x_\alpha \partial x_\beta \tag{2.1}$$

Из условия совместности деформаций

$$\partial^2\varepsilon_{11}/\partial x_2^2 + \partial^2\varepsilon_{22}/\partial x_1^2 = 2\partial^2\varepsilon_{12}/\partial x_1\partial x_2$$

и закона Гука (1.5) при учете (2.1) получим

$$\Delta^2 F = -2\eta\Delta P \quad (\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2) \tag{2.2}$$

Для решения уравнения (2.2) применим теорию функций комплексной переменной, используя следующий прием [9]. Независимые переменные x_1, x_2 и функции F, P будем считать комплексными переменными. Преобразуем их к новым переменным: $z = x_1 + ix_2$, $\bar{z} = x_1 - ix_2$, которые в этом случае являются независимыми. При возвращении к исходным переменным, когда x_1, x_2 действительны, z и $\bar{z}$ становятся сопряженными значениями одной комплексной переменной.

Представление уравнения (2.2) в переменных z и $\bar{z}$ имеет вид

$$\partial^4 F/\partial z^2\partial\bar{z}^2 = -{}^1/{}_2\eta\partial^2 P/\partial z\partial\bar{z} \tag{2.3}$$

Интегрируя уравнение (2.3) и учитывая, что при переходе к действительным переменным x_1, x_2 функция Эйри F должна быть действительной, получим:

$$F(z, \bar{z}) = -\frac{1}{2}\eta \int_{z_0}^{z}\int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} P\, d\zeta\, d\bar{\zeta} + \bar{z}\varphi(z) + z\bar{\varphi}(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z}) \qquad (2.4)$$

$\varphi(z)$, $\chi(z)$ — аналитические функции, z_0, $\bar{z}_0$ — некоторые постоянные.

Подставив (2.4) в (2.1), после некоторых преобразований получим

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + 2\eta P = 2\,(\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})) \qquad (2.5)$$

$$\sigma_{11} - \sigma_{22} + 2i\sigma_{12} - 2\eta \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \int_{z_0}^{z} P\, d\zeta = -2\,[z\bar{\varphi}''(\bar{z}) + \bar{\psi}''(\bar{z})] \quad (\psi = \chi')$$

Из закона Гука (1.5) и определения тензора деформации через компоненты вектора перемещения получим

$$\sigma_{11} - \sigma_{22} + 2i\sigma_{12} = 4G\partial D/\partial \bar{z}, \quad D = w_1 + iw_2 \qquad (2.6)$$

(w_i — i-я компонента вектора перемещения $\mathbf{w}$).

Подставив (2.5) в (2.6) и проинтегрировав по $\bar{z}$, получим

$$2GD = \eta \int_{z_0}^{z} P\, d\zeta + (3 - 4\nu)\,\varphi(z) - z\bar{\varphi}'(\bar{z}) - \bar{\psi}(\bar{z}) \qquad (2.7)$$

Введем аналитическую функцию [10]

$$\Omega(z) = \bar{\Phi}(z) + z\Phi'(z) + \bar{\Psi}(z), \quad \Phi(z) = \varphi'(z), \quad \Psi(z) = \psi'(z)$$

используя которую, из (2.5) и (2.7) найдем представление для тензора напряжений и перемещений насыщенной жидкостью пористой среды через две аналитические функции

$$\sigma_{22} - i\sigma_{12} + Q = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\,\bar{\Phi}'(\bar{z}) \qquad (2.8)$$

$$2G\left(\frac{\partial}{\partial x_1} w_1 + i\frac{\partial}{\partial x_1} w_2\right) - Q = \varkappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\,\bar{\Phi}'(\bar{z})$$

$$Q = \eta P + \eta \int_{z_0}^{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} P\, d\zeta, \quad \varkappa = 3 - 4\nu$$

Задав нагрузку на верхнем и нижнем берегах трещины, получим задачу Дирихле во внешности разреза для двух аналитических функций $\Phi(z)$, $\Omega(z)$. Использовав принцип суперпозиции, представим поля напряжений и смещений в виде суммы двух полей, одно из которых соответствует сплошному телу под действием нагрузок, приложенных внутри тела (σ_0 — однородное сжимающее напряжение, P_∞ — невозмущенное давление поровой жидкости), а второе — телу с разрезом, к поверхностям которого приложены нагрузки. При этом граничные условия на берегах трещины имеют вид

$$\sigma_{22}^{\pm} = \sigma_0 - P_c(x_1), \quad \sigma_{12}^{\pm} = 0, \quad x_2 = 0 \pm 0 \qquad (2.9)$$

Кроме того, для решения краевой задачи (2.8) необходимо задать значения функции Q на берегах трещины. Из (1.7), (2.8) следует

$$Q^{\pm} = Q_1^{\pm} + iQ_2^{\pm}$$

$$Q_1^{\pm} = \eta\,(P_c(x_1, t) - P_\infty) + {}^1/_2\eta\,[P_c(x_1, t) - P_c(x_0, t)]; \quad Q_2^{\pm} = \mp {}^1/_2 \frac{\eta\mu}{k} \int_{x_0}^{x_1} v\, d\zeta$$

$$(x_0 = z_0, \operatorname{Im} z_0 = 0).$$

Решение краевой задачи Дирихле (2.8), (2.9) известно [10]

$$\left.\begin{matrix}\Phi(z)\\ \Omega(z)\end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2\pi i\sqrt{z^2-l^2}}\int\limits_{-l(t)}^{l(t)}\frac{\sqrt{\tau^2-l^2}\,R(\tau,t)}{\tau-z}\,d\tau \mp \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-l(t)}^{l(t)}\frac{T(\tau,t)}{\tau-z}\,d\tau + \frac{c_1}{\sqrt{z^2-l^2}} \tag{2.10}$$

$$c_1 = -\frac{1}{2\pi}\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\int\limits_{-l(t)}^{l(t)} T(\tau,t)\,d\tau, \quad T(\tau,t) = \frac{1}{2}\frac{\eta\mu}{k}\int\limits_{x_0}^{\tau} v(\zeta,t)\,d\zeta$$

$$R(x_1, t) = \sigma_0 - P_c(x_1, t) + \eta\,(P_c(x_1, t) - P_\infty) + {}^1/{}_2\eta\,(P_c(x_1, t) - P_c(x_0, t))$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}w_2 = \frac{\varkappa+1}{4G}\left\{-T(x_1, t) + \frac{1}{\pi\sqrt{l^2-x_1^2}}\int\limits_{-l}^{l}\frac{\sqrt{l^2-\tau^2}\,R(\tau,t)}{\tau-x_1}\,d\tau - \frac{2c_1}{\sqrt{l^2-x_1^2}}\right\}, \quad |x_1|\leqslant l, \quad x_2 = 0 \tag{2.11}$$

При нахождении постоянной c_1 было учтено условие симметрии давления жидкости в трещине ($P_c(-x_1, t) = P_c(x_1, t)$).

Поскольку нагрузка приложена к берегам трещины симметрично, профиль трещины также симметричен относительно начала координат: $w_2(-x_1, t) = w_2(x_1, t)$. Поэтому $\partial w_2(-x_1, t)/\partial x_1 = -\partial w_2(x_1, t)/\partial x_1$. Скорость утечки жидкости из трещины также симметрична относительно начала координат: $v(-x_1, t) = v(x_1, t)$. Для выполнения этих условий симметрии необходимо положить $x_0 = 0$. При этом получим

$$T(x_1, t) = \frac{1}{2}\frac{\eta\mu}{k}\int\limits_0^{x_1} v\,d\zeta, \quad c_1 = 0 \tag{2.12}$$

Используя (2.12), из (2.11) после интегрирования по x_1 и простых преобразований найдем

$$w(x_1,t) = \frac{\varkappa+1}{4G}\left\{\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{l(t)}\left[P_c(\zeta,t) - \sigma_0 - \eta\,(P_c(\zeta,t) - P_\infty) - \frac{1}{2}\eta\,(P_c(\zeta,t) - P_c(0,t))\right]\ln\frac{\sqrt{l^2-x_1^2}+\sqrt{l^2-\zeta^2}}{\sqrt{|\zeta^2-x_1^2|}}\,d\zeta - \frac{\eta\mu}{k}\left[(l-x_1)\int\limits_0^{l} v(\zeta,t)\,d\zeta + \int\limits_{x_1}^{l}(x_1-\zeta)\,v(\zeta,t)\,d\zeta\right]\right\} \tag{2.13}$$

Коэффициент интенсивности напряжений K_{I} получим из (2.8), (2.10), (2.12), учитывая корневую особенность обращения в бесконечность тензора напряжений σ_{22} вблизи концов симметрично нагруженной трещины

$$K_{\mathrm{I}} = 2\sqrt{\frac{l}{\pi}}\int\limits_0^{l}\left[P_c(\zeta,t) - \sigma_0 - \eta\,(P_c(\zeta,t) - P_\infty) - \frac{1}{2}\eta\,(P_c(\zeta,t) - P_c(0,t))\right]\frac{d\zeta}{\sqrt{l^2-\zeta^2}} \tag{2.14}$$

При $\eta = 0$ выражения (2.13), (2.14) дают решение классической задачи о квазистационарной трещине нормального отрыва в упругой среде. В теории консолидации в выражение для раскрытия трещины входят слагаемые, зависящие от скорости утечки жидкости из трещины.

Давление поровой жидкости описывается уравнением типа пьезопроводности диффузии, которое может быть получено из (1.3), (2.5)

$$\frac{\partial}{\partial t} P = c\Delta P - \omega \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{Re} \Phi) \tag{2.15}$$

$$c = \frac{(1+\nu)\, kGB}{(1-\nu)\, \eta\mu\, (3-4\eta B)}, \quad \omega = \frac{4(1+\nu)\, B}{3-4\eta B}$$

где c — коэффициент консолидации или диффузии [3].

Аналитическую функцию $\Phi(z)$, входящую в уравнение (2.15), можно преобразовать к виду

$$\Phi(z) = -\frac{z}{\pi i \sqrt{z^2-l^2}} \int_0^l \frac{\sqrt{\zeta^2-l^2}\, R(\zeta, t)}{\zeta^2-z^2}\, d\zeta - \frac{\eta\mu}{4\pi k} \int_0^l v(\zeta, t) \ln \frac{l^2-z^2}{\zeta^2-z^2}\, d\zeta \tag{2.16}$$

Взяв действительную часть от комплексной функции (2.16) и перейдя к действительным переменным x_1, x_2, получим

$$\operatorname{Re}\Phi(z) = -\frac{\eta\mu}{4\pi k} \int_0^l v(\zeta, t)\, K(\zeta, l; x_1, x_2)\, d\zeta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi\sqrt{\rho_+\rho_-}} \int_{-l}^{l} R(\zeta, t) \frac{\sqrt{l^2-\zeta^2} \cos[\alpha(\zeta) + (\alpha(l) + \alpha(-l))/2]}{\sqrt{(x_1-\zeta)^2 + x_2^2}}\, d\zeta \tag{2.17}$$

$$K(\zeta, l; x_1, x_2) = \frac{1}{2} \ln \frac{((l-x_1)^2 + x_2^2)((l+x_1)^2 + x_2^2)}{((\zeta-x_1)^2 + x_2^2)((\zeta+x_1)^2 + x_2^2)}$$

$$\rho_\pm = \sqrt{(x_1^2 \pm l)^2 + x_2^2}, \quad \alpha(y) = \arccos \frac{x_1 - y}{\sqrt{(x_1-y)^2 + x_2^2}}$$

Таким образом, гидроразрыв пористого насыщенного жидкостью пласта описывается системой нелинейных интегродифференциальных уравнений, включающих уравнения движения жидкости в трещине (1.6), уравнение пьезопроводности с источником (2.15), (2.17), функциональную связь раскрытия трещины с давлением и скоростью утечки жидкости из трещины (2.13) и выражение для $K_{\mathrm{I}}(t)$ (2.14). В общем случае эта система уравнений может быть решена только численными методами.

3. Неподвижная трещина; l = const. Длина трещины не меняется со временем, если коэффициент интенсивности напряжений меньше модуля сцепления породы.

Рассмотрим случай, когда жидкость закачивается в трещину при постоянном давлении P_0. Если гидравлическая проводимость трещины существенно больше проводимости среды, то уравнения (1.6) сводятся к граничному условию на контуре трещины

$$P(x_1, t) = P_0 \tag{3.1}$$

Воспользовавшись методом функций Грина [11], решение уравнения пьезопроводности (2.15) представим в виде

$$P(x_1, x_2, t) = P_1(x_1, x_2, t) -$$

$$- \omega \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{Re}\Phi)\, G(x_1-\zeta, x_2-\xi; t-\tau) + P_\infty \tag{3.2}$$

$$G(x_1-\zeta, x_2-\xi; t-\tau) = \frac{1}{4\pi c(t-\tau)} \left\{ \exp\left[-\frac{(x_1-\zeta)^2 + (x_2-\xi)^2}{4c(t-\tau)}\right] + \right.$$

$$\left. + \exp\left[-\frac{(x_1-\zeta)^2 + (x_2+\xi)^2}{4c(t-\tau)}\right] \right\}$$

Давление $P_1(x_1, x_2, t)$ определяется потенциалом простого слоя [11]

$$P_1(x_1, x_2, t) = \int_0^t \frac{d\tau}{4c\pi(t-\tau)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c\mu}{k} v(\zeta, \tau) \exp\left[-\frac{(x_1-\zeta)^2 + x_2^2}{4c(t-\tau)}\right] d\zeta \qquad (3.3)$$

Подставив выражение (3.3) в (3.2), при учете условия (3.1) получим интегральное уравнение для определения скорости утечки жидкости из трещины ($x_2 = 0$)

$$\int_0^t \frac{d\tau}{4c\pi(t-\tau)} \int_{-l}^{l} \frac{c\mu}{k} v(\zeta, \tau) \exp\left[-\frac{(x_1-\zeta)^2}{4c(t-\tau)}\right] d\zeta -$$

$$- \omega \int_0^t \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{Re}\Phi) G(x_1-\zeta, -\xi; t-\tau)\, d\tau\, d\xi\, d\zeta = P_0 - P_\infty \qquad (3.4)$$

Применив к этому уравнению преобразование Лапласа, при учете выражения для источника $\partial(\operatorname{Re}\Phi)/\partial t$ (2.17) после преобразований получим ($K_0(z)$ — функция Макдональда)

$$\int_{-l}^{l} v(\xi, p) K_0(\sigma|x_1-\xi|)\, d\xi + \lambda \left\{\int_{-l}^{l} v(\xi, p) M(\sigma|x_1-\xi|)\, d\xi - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} A(l, \sigma) \int_{-l}^{l} v(\xi, p)\, d\xi = \frac{\delta}{p} \right. \qquad (3.5)$$

$$M(\sigma\,|\,x_1-\xi\,|) = K_0(\sigma\,|\,x_1-\xi\,|) + \ln(\sigma\,|\,x_1-\xi\,|)$$

$$A(l, \sigma) = K_0(\sigma\,|\,x_1-l\,|) + K_0(\sigma\,|\,x_1+l\,|) + \ln(\sigma^2\,|\,l^2-x_1^2\,|)$$

$$\sigma = \sqrt{p/c}, \quad \lambda = \omega\eta/8, \quad \delta = 2\pi k(P_0 - P_\infty)/\mu$$

Параметр λ характеризует эффекты обратного влияния деформаций среды на фильтрацию жидкости. При $\lambda = 0$ уравнение (3.5) отвечает несвязанной консолидации.

Уравнение (3.5) относится к хорошо изученному классу сингулярных интегральных уравнений типа свертки. Для уравнений с ядрами Макдональда нулевого порядка показано [12], что при разложении решения по функциям Матье уравнение (3.5) сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, которая может быть аппроксимирована конечной системой уравнений. Получив решение последней и применив к нему обратное преобразование Лапласа, можно получить неизвестную скорость утечки жидкости из трещины $v(x_1, p)$ $x_1 \in [-l, l]$ с необходимой степенью точности. Зная скорость утечки и давление жидкости в трещине, по формулам (2.13), (2.14), (2.17), (3.2), (3.3) восстанавливается раскрытие трещины, коэффициент интенсивности напряжений и распределение давления поровой жидкости в пласте.

Интегральное уравнение (3.5) для трансформанты Лапласа скорости утечки жидкости из трещины $v(x_1, p)$ $x_1 \in [-l, l]$ дает возможность провести качественные исследования рассматриваемой задачи, в частности найти асимптотики решения на малых ($t \to 0$) и больших временах ($t \to \infty$).

4. Асимптотика решения уравнения (3.5) на больших временах. Этот случай соответствует малым значениям параметра p ($p \to 0$), т. е. при выполнении обратного преобразования Лапласа основной вклад в асимптотику решения на больших временах дают значения изображения при малых p.

Воспользовавшись асимптотической формулой для функции Макдональда при малых аргументах ($K_0(z) = \ln(z\gamma/2) + o(z)$, $\gamma = \exp\{c\}$; c —

постоянная Эйлера), уравнение (3.5) преобразуем к известному уравнению Карлемана [13]

$$\int_{-l}^{l} v(\xi, p)\ln|x_1-\xi|^{-1}d\xi = \frac{\delta}{p} + N\left[\frac{1}{2}\ln\frac{p\gamma^2}{4c} + o(p)\right] \tag{4.1}$$

$$N = \int_{-l}^{l} v(\xi, p)\,d\xi$$

решение которого может быть приведено к виду

$$v(x_1, p) = -\frac{N}{\pi^2\sqrt{l^2-x_1^2}} \tag{4.2}$$

$$N = -\frac{2\delta}{p\ln(\alpha p) + o(p^2)}, \quad \alpha = \frac{1}{c}\left(\frac{l\gamma}{4}\right)^2$$

Применив к (4.2) обратное преобразование Лапласа и вычислив интеграл методом перевала для больших t ($p \to 0$), получим формулу для скорости утечки жидкости разрыва из трещины

$$v(x_1, t) = \frac{2\delta}{\pi^2\sqrt{l^2-x_1^2}}\left[\frac{1}{\ln(t/\alpha)} + o\left(\frac{1}{\ln(t/\alpha)}\right)\right], \quad t \to \infty \tag{4.3}$$

совпадающую с соответствующим решением этой же задачи без учета обратного влияния деформации среды на процессы фильтрации, т. е. без учета эффектов связанности.

Подставив выражение (4.3) в (2.13), получим формулу для раскрытия трещины

$$w(x_1, t) = \frac{\varkappa+1}{4G}\left\{\left[P_0 - \eta(P-P_\infty) - \sigma_0\right]\sqrt{l^2-x_1^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\eta\mu\delta}{\pi^2 k}\left[\frac{\pi l}{2} - x_1\arcsin\frac{x_1}{l} - \sqrt{l^2-x_1^2}\right]\frac{1}{\ln(t/\alpha)} + o\left(\frac{1}{\ln(t/\alpha)}\right)\right\} \tag{4.4}$$

5. **Асимптотика решения (3.5) на малых временах.** Малым временам ($t \to 0$) соответствуют большие значения параметра p в изображении Лапласа. Приближенное решение интегрального уравнения (3.5) может быть получено методом сращиваемых асимптотических разложений. Найдем вырожденное решение уравнения (3.5). Пусть $|x_1| \leqslant l - c_0 p^{-1/2+\varepsilon}$ ($c_0 \sim 1$, $0 < \varepsilon < 1/2$). Используя результаты работы [14] о разложении по параметру интегралов с ядром типа дельта-функции, асимптотическое представление функции Макдональда при больших значениях аргумента ($K_0(z) \sim \sqrt{\pi/(2z)}\exp\{-z\}$) и опуская в уравнении (3.5) слагаемые порядка $p^{-1-\varepsilon}$ ($\varepsilon > 1/4$), получим также уравнение Карлемана

$$\int_{-l}^{l} v(\xi, p)\ln\frac{1}{|x_1-\xi|}\,d\xi = -\frac{\delta}{\lambda p} +$$

$$+ \frac{N}{2\lambda}\left[\ln|l^2-x_1^2| + K_0(\sigma|l-x_1|) + K_0(\sigma|l+x_1|)\right] \tag{5.1}$$

Решение уравнения (5.1) при больших p дается выражением

$$v(\xi, p) = \frac{8\sqrt{l}\,\delta(\pi+1)}{\pi c^{1/4}\lambda\Gamma^2(1/4)}\frac{1}{\sqrt{l^2-x_1^2}}\left[\frac{1}{p^{3/4}} + o\left(\frac{1}{p^{3/4}}\right)\right] \tag{5.2}$$

Применив к (5.2) обратное преобразование Лапласа, получим решение интегрального уравнения (3.5) для малых времен

$$v(\xi, t) = \frac{4\sqrt{2l}\,\delta(\pi+1)}{\pi^2 c^{1/4}\lambda\Gamma(1/4)}\frac{1}{\sqrt{l^2-x_1^2}}\left[\frac{1}{t^{1/4}} + o\left(\frac{1}{t^{1/4}}\right)\right] \tag{5.3}$$

Раскрытие трещины в этом случае имеет вид

$$w(x_1, t) = \frac{\varkappa+1}{4G}\Big\{[P_0 - \sigma_0 - \eta(P_0 - P_\infty)]\sqrt{l^2 - x_1^2} -$$
$$-\frac{8\sqrt{2l}\,\delta(1+\pi)\eta\mu}{\pi^2 c^{1/4}\lambda\Gamma(1/4)k}\frac{1}{t^{1/4}}\left[\frac{\pi l}{2} - x_1\arcsin\frac{x_1}{l} - \sqrt{l^2 - x_1^2} + o(1)\right] \quad (5.4)$$

Выражения (5.3), (5.4) дают решение задачи о неподвижной трещине гидроразрыва в консолидирующейся среде для малых времен, но бóльших некоторого времени t_* ($t > t_*$), где t_* — время, необходимое для раскрытия трещины при скачкообразном нагружении разреза постоянным давлением жидкости разрыва при учете процессов набухания насыщенной жидкостью среды.

Поток жидкости разрыва при $x_1 = 0$ (расход) определяется выражением

$$Q = \frac{d}{dt}V_c + Q_c = h\left[\frac{d}{dt}\int_{-l}^{l} w(x_1, t)\,dx_1 + 2\int_{-l}^{l} v(x_1, t)\,dx_1\right] \quad (5.5)$$

где h — высота вертикальной трещины, V_c — объем трещины, Q_c — количество жидкости, фильтрующееся в пласт в единицу времени через поверхности трещины.

При $t \to 0$, подставив выражение (4.3), (4.4) в выражение (5.5), получим

$$Q = \frac{8\sqrt{2l}\,\delta(1+\pi)h}{\pi c^{1/4}\lambda\Gamma(1/4)}\left(t^{-1/4} + o(t^{-1/4})\right) \quad (5.6)$$

При $t \to \infty$ из (5.5), (3.3), (3.4) найдем

$$Q = \frac{4\delta h}{\pi}\left[\frac{1}{\ln(t/\alpha)} + o\left(\frac{1}{\ln(t/\alpha)}\right)\right] \quad (5.7)$$

Полученные асимптотики решения нестационарной задачи о трещине гидроразрыва в насыщенной жидкостью среде могут быть использованы для определения параметров пласта гидродинамическими методами [15].

Поддерживая постоянным давление в скважине P_0, на основании данных об изменении дебитов и формул (5.6), (5.7) можно оценить параметры пласта — проницаемость, пористость и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Желтов Ю. П., Христианович С. А.* О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР. ОТН. 1955. № 5. С. 3—41.
2. *Biot M. A.* General theory of three dimensional consolidation // J. Appl. Phys. 1941. V. 12. № 2. P. 155—165.
3. *Rice J. R., Cleary M. P.* Some basic stress diffusion solutions for fluid-saturated elastic porous media with compressible constituents // Rev. Geophys. and Space Phys. 1976. V. 14. № 2. P. 227—241.
4. *Biot M. A.* General solutions of equations of elasticity and consolidation of a porous material // J. Appl. Mech. 1956. V. 23. № 1. P. 91—96.
5. *McNamee J., Gibson R. E.* Displacement functions and linear transforms applied to diffusion through porous elastic media // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1960. V. 13. № 1. P. 98—111.
6. *Керчман В. И.* Задача консолидации и связанной термоупругости для деформируемого полупространства // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 1. С. 45—54.
7. *Зазовский А. Ф., Панько С. В.* О локальной структуре решения связанной задачи о трещине гидроразрыва в проницаемой среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 5. С. 153—158.
8. *Зазовский А. Ф.* Развитие дискообразной трещины гидроразрыва в мощном, насыщенном жидкостью пласте // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 5. С. 169—178.
9. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963. 639 с.
10. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.

11. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
12. *Александров В. М.*, *Коваленко Е. В.* Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 329 с.
13. *Плещинский Н. Б.* Приложения теории интегральных уравнений с логарифмическими и степенными ядрами. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1987. 157 с.
14. *Тихонов А. Н.*, *Самарский А. А.* О разложении по параметру интегралов с ядром типа δ-функции // Научн. докл. высш. шк. Сер. физ.-мат. наук. 1959. № 1. С. 54—61.
15. *Баренблатт Г. И.*, *Борисов Ю. П.*, *Каменецкий С. Г.*, *Крылов А. П.* Об определении параметров нефтеносного пласта по данным о восстановлении давления в остановленных скважинах // Изв. АН СССР. ОТН. 1957. № 11. С. 84—91.

Москва

Поступила в редакцию
6.III.1990