Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 6, 1990

УДК 539.3

В. А. Юрко

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Рассматривается задача определения размеров поперечных сечений балки по заданным частотам ее собственных колебаний. Указываются спектры частот, однозначно определяющие размеры поперечных сечений балки, приводится эффективная процедура решения обратной задачи, доказывается теорема единственности. При решении обратной задачи применяется метод эталонных моделей [1].

Дифференциальное уравнение, описывающее колебания балки, рассмотрим в виде

$$(h^\mu(x)\, y'')'' = \lambda h(x)\, y, \quad 0 \leqslant x \leqslant T \tag{1}$$

где $h(x)$ — функция, характеризующая поперечное сечение балки, $\mu = 1, 2, 3$ — фиксированное число. Будем предполагать, что функция $h(x)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[0, T]$ и $h(x) > 0$, $h(0) = 1$. Обратная задача для уравнения (1) в случае $\mu = 2$ (подобные поперечные сечения) исследовалась [2] при определении малых изменений поперечных сечений балки по заданным малым изменениям конечного числа частот ее собственных колебаний.

Пусть $\{\lambda_{kj}\}_{k\geqslant 1, j=1,2}$ — собственные значения краевых задач Q_j для уравнения (1) с краевыми условиями

$$y(0) = y^{(j)}(0) = y(T) = y'(T) = 0$$

Обратная задача ставится следующим образом.

Задача 1. По заданным спектрам частот $\{\lambda_{kj}\}_{k\geqslant 1, j=1,2}$ найти функцию $h(x)$, $x \in [0, T]$.

Для решения этой обратной задачи докажем предварительно несколько вспомогательных утверждений.

Рассмотрим функцию $\Phi(x, \lambda)$ — решение уравнения (1) при условиях $\Phi(0, \lambda) = \Phi(T, \lambda) = \Phi'(T, \lambda) = 0$, $\Phi'(0, \lambda) = 1$. Положим $\alpha(\lambda) = \Phi''(0, \lambda)$. Далее, пусть функции $C_\nu(x, \lambda)$ ($\nu = 0, 1, 2, 3$) — решения уравнения (1) при начальных условиях $C_\nu^{(\mu)}(0, \lambda) = \delta_{\nu\mu}$, $\nu, \mu = 0, 1, 2, 3$. Обозначим $\Delta_j(\lambda) = C_{3-j}(T, \lambda)\, C_3'(T, \lambda) - C_3(T, \lambda)\, C_{3-j}'(T, \lambda)$, $j = 1, 2$

$$\gamma(x) = \int_0^x (h(t))^{(1-\mu)/4}\, dt, \quad \tau = \gamma(T)$$

Очевидно, что

$$\Phi(x, \lambda) = \det\, [C_\nu(x, \lambda), C_\nu(T, \lambda), C_\nu'(T, \lambda)]_{\nu=1,2,3} / \Delta_1(\lambda)$$

и, следовательно,

$$\alpha(\lambda) = -\Delta_2(\lambda)/\Delta_1(\lambda) \tag{2}$$

Пусть $\lambda = \rho^4$, $S = \{\rho\colon \arg \rho \in (0, \pi/4)\}$. Известно (см., например, [3, 4]), что имеют место асимптотические формулы

$$\lambda_{kj} = (k\pi\tau^{-1})^4\, (1 + A_{j1}k^{-1} + O(k^{-2})), \quad k \to \infty \tag{3}$$

$$\Delta_j(\lambda) = \rho^{j-5} A_{j2} \exp(\rho(1 - i)\tau)\, (1 + O(\rho^{-1})) \tag{4}$$

$$\Delta_j(\lambda) = O(\rho^{j-5} \exp(C \mid \lambda \mid^{1/4}) \tag{5}$$

$$\Phi^{(\nu)}(x, \lambda) = \rho^{\nu-1} \sum_{\xi=1}^{2} (R_\xi \gamma'(x))^\nu g_\xi(x) \exp(\rho R_\xi \gamma(x))(1 + O(\rho^{-1}));$$

$$R_1 = -1, \quad R_2 = i \tag{6}$$

$$\alpha(\lambda) = \rho(1 - i)(1 + O(\rho^{-1}))$$

при $\mid \lambda \mid \to \infty$, $\rho \in S$, где числа $A_{j\nu}$ зависят от τ, функции $g_\xi(x)$ абсолютно непрерывны $g_\xi(x) > 0$, $g_1(0) = -g_2(0) = (-1 - i)^{-1}$.

Лемма **1. Функция $\alpha(\lambda)$ однозначно определяется заданием спектров $\{\lambda_{kj}\}_{k \geqslant 1, j=1,2}$.**

Доказательство. Собственные значения $\{\lambda_{kj}\}$ краевых задач Q_j совпадают с нулями целых аналитических по λ функций $\Delta_j(\lambda)$. В самом деле, пусть λ^* — собственное значение, а $\psi(x)$ — собственная функция краевой задачи Q_j. Тогда

$$\psi(x) = \sum_{\mu=0}^{3} \beta_\mu C_\mu(x, \lambda^*)$$

причем

$$\sum_{\mu=0}^{3} \beta_\mu C_\mu^{(k)}(0, \lambda^*) = 0, \ \sum_{\mu=0}^{3} \beta_\mu C_\mu^{(s)}(T, \ \lambda^*) = 0; \quad k = 0, \ j; \quad s = 0, 1$$

Так как $\psi(x) \not\equiv 0$, то эта линейная однородная алгебраическая система имеет ненулевые решения, и, следовательно, ее определитель равен нулю, т. е. $\Delta_j(\lambda^*) = 0$. Повторяя все рассуждения в обратном порядке, получаем, что если $\Delta_j(\lambda^*) = 0$, то λ^* — собственное значение краевой задачи Q_j.

Из (5) вытекает, что порядок функций $\Delta_j(\lambda)$ равен $1/4$, и, следовательно, по теореме Бореля [5]

$$\Delta_j(\lambda) = B_j \Pi (1 - \lambda/\lambda_{kj}), \ B_j = \text{const} \tag{7}$$

Здесь и всюду далее произведение вычисляется по $k = 1, 2, \ldots$

Рассмотрим положительную абсолютно непрерывную на отрезке $[0, T]$ функцию $h^\circ(x)$, $h^\circ(0) = 1$. Условимся, что если некоторый символ p означает объект, относящийся к уравнению (1) и построенный по функции $h(x)$, то p° означает аналогичный объект, построенный по функции $h^\circ(x)$.

Пусть $\tau^\circ = \tau$. Из равенства (7) имеем

$$\frac{\Delta_j(\lambda)}{\Delta_j^\circ(\lambda)} = \frac{B_j S_{j1}(\lambda)}{B_j^\circ S_j}, \quad S_j = \Pi \frac{\lambda_{kj}}{\overset{\circ}{\lambda}_{kj}}, \quad S_{j1}(\lambda) = \Pi \left(1 - \frac{\overset{\circ}{\lambda}_{kj} - \lambda_{kj}}{\overset{\circ}{\lambda}_{kj} - \lambda}\right)$$

В силу равенств (3), (4) $\lim \Delta_j(\lambda)/\Delta_j^\circ(\lambda) = 1$, $\lim S_{j1}(\lambda) = 1$ при $\mid \lambda \mid \to \infty$, $\rho \in S$, и, следовательно,

$$B_j = B_j^\circ S_j \tag{8}$$

Из соотношений (2), (7) получаем

$$\alpha(\lambda) = B \Pi \frac{\lambda_{k1}}{\lambda_{k2}} \frac{\lambda_{k2} - \lambda}{\lambda_{k1} - \lambda}, \quad B = -\frac{B_2}{B_1}$$

или при учете равенства (8)

$$\alpha(\lambda) = B^\circ \Pi \frac{\overset{\circ}{\lambda}_{k1}}{\overset{\circ}{\lambda}_{k2}} \frac{\lambda_{k2} - \lambda}{\lambda_{k1} - \lambda}$$

Отсюда и вытекает утверждение леммы 1.

Лемма 2. Обозначим $p(x) = h^\mu(x)$. Справедливо соотношение

$$\int_0^T ((h(x) - h^\circ(x)) \lambda \Phi(x, \lambda) \Phi^\circ(x, \lambda) - (p(x) - p^\circ(x)) \times$$

$$\times \Phi''(x, \lambda) \Phi^{\circ\prime\prime}(x, \lambda)) \, dx = \alpha(\lambda) - \alpha^\circ(\lambda) \tag{9}$$

Доказательство. Обозначим

$$l_\lambda y = (p(x) y'')'' - \lambda h(x) y$$

$$L(y, z) = (p(x) y'')' z - p(x) y'' z' + p(x) y' z'' - y(p(x) z'')'$$

Тогда

$$\int_0^T l_\lambda y(x) z(x)\, dx = L(y(x), z(x))\Big|_0^T + \int_0^T y(x) l_\lambda z(x)\, dx \tag{10}$$

Используя соотношение (10), равенства $l_\lambda \Phi(x, \lambda) = l_\lambda^\circ \Phi^\circ(x, \lambda) = 0$ и краевые условия на функции $\Phi(x, \lambda)$, $\Phi^\circ(x, \lambda)$, получим

$$\int_0^T \Phi^\circ(x, \lambda)(l_\lambda - l_\lambda^\circ)\Phi(x, \lambda)\, dx = -L^\circ(\Phi(x, \lambda), (\Phi^\circ(x, \lambda))\Big|_0^T - \int_0^T \Phi(x, \lambda) l_\lambda^\circ \Phi^\circ(x, \lambda)\, dx =$$

$$= \Phi'(0, \lambda)\Phi^{\circ\prime\prime}(0, \lambda) - \Phi''(0, \lambda)\Phi^{\circ\prime}(0, \lambda) = \alpha^\circ(\lambda) - \alpha(\lambda)$$

С другой стороны, интегрируя левую часть последнего равенства по частям, имеем:

$$\int_0^T \Phi^\circ(x, \lambda)(l_\lambda - l_\lambda^\circ)\Phi(x, \lambda)\, dx = (((p(x) - p^\circ(x))\Phi''(x, \lambda))'\Phi^\circ(x, \lambda) -$$

$$-(p(x) - p^\circ(x))\Phi''(x, \lambda)\Phi^{\circ\prime}(x, \lambda))\Big|_0^T + \int_0^T ((p(x) - p^\circ(x))\Phi''(x, \lambda)\Phi^{\circ\prime\prime}(x, \lambda) -$$

$$-\lambda(h(x) - h^\circ(x))\Phi(x, \lambda)\Phi^\circ(x, \lambda))\, dx$$

Так как подстановка обращается в нуль, то отсюда получаем соотношение (9).

Лемма 3. Рассмотрим интеграл

$$J(z) = \int_0^T f(x) H(x, z)\, dx \tag{11}$$

$$f(x) = (f_n + s(x))\, x^n/n!, \quad s(x) \in C\,[0, T], \ s(0) = 0, \ n \geqslant 0$$
$$H(x, z) = e^{-za(x)}(1 + \xi(x, z)/z)$$
$$a(x) \in C^1[0, T], \ 0 < a(x_1) < a(x_2) \ (0 < x_1 < x_2)$$
$$a^{(\nu)}(x) \sim \beta x^{1-\nu} \quad (x \to +0, \ \nu = 0, 1), \quad a'(x) > 0$$

где функция $\xi(x, z)$ непрерывна и ограничена при $x \in [0, T]$, $z \in G \doteq$ $\doteq \{z\colon \arg z \in [-\pi/2 + \delta_0, \ \pi/2 - \delta_0], \ \delta_0 > 0\}$. Тогда при $|z| \to \infty$, $z \in G$

$$J(z) = (\beta z)^{-n-1}(f_n + o(1))$$

Доказательство. Случай 1. Пусть $a(x) \equiv x$. Тогда

$$z^{n+1}J(z) = f_n z^{n+1}\int_0^T E(x, z)\, dx + z^{n+1}\int_0^T s(x) E(x, z)\, dx + z^n \int_2^T f(x) e^{-zx}\xi(x, z)\, dx =$$

$$= J_1(z) + J_2(z) + J_3(z), \ E(x, z) = e^{-zx}x^n/n!$$

В области G справедлива оценка $\operatorname{Re} z \geqslant \varepsilon_0 |z|$, $\varepsilon_0 > 0$. Так как

$$\int_0^\infty E(x, z)\, dx = z^{-n-1}$$

то

$$J_1(z) = f_n - f_n z^{n+1}\int_T^\infty E(x, z)\, dx$$

и, следовательно, $J_1(z) - f_n \to 0$, при $|z| \to \infty$, $z \in G$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta = \delta(\varepsilon)$ так, чтобы $|s(x)| < \varepsilon_0^{n+1}\varepsilon/2$. при $x \in [0, \delta]$. Тогда

$$|J_2(z)| < \varepsilon/2\,(\varepsilon_0|z|)^{n+1}\int_0^\delta E(x, -\varepsilon_0|z|)\, dx + |z|^{n+1}\int_\delta^T |s(x)|\, E(x, -\varepsilon_0|z|)\, dx < \varepsilon/2 +$$

$$+ |z|^{n+1}e^{-\varepsilon_0|z|\delta}\int_0^{T-\delta} |s(x+\delta)|\, e^{-\varepsilon_0|z|x}(x+\delta)^n/n!\, dx$$

При $|z| \to \infty$, $z \in G$ второе слагаемое можно сделать меньше $\varepsilon/2$. В силу произвольности ε имеем $J_2(z) \to 0$ при $|z| \to \infty$, $z \in G$.

Так как $|f_n + s(x)|\,|\xi(x, z)| < C$, то при $z \in G$

$$|J_3(z) < C|z|^n \int_0^T E(x, -\varepsilon_0 |z|)\,dx < C|z|^{-1}\varepsilon_0^{-n-1}$$

т. е. $J_3(z) \to 0$ при $|z| \to \infty$, $z \in G$. Таким образом, в случае I лемма доказана.

Случай 2. Пусть теперь $a(x)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условиям леммы. Тогда функция $t = a(x)$ имеет обратную $x = b(t)$, причем $b(t) \in C^1[0, T_1]$, где $T_1 = a(T)$; $b(t) > 0$ при $t > 0$ и $b^{(\nu)}(t) = \beta^{-1}t^{1-\nu}(1 + \theta_\nu(t))$, $\theta_\nu(t) \in C[0, T_1]$, $\theta_\nu(0) = 0$, $\nu = 0, 1$. В интеграле (11) выполняем замену переменных $t = a(x)$. Получим

$$J(z) = \int_0^{T_1} f^*(t)\, H^*(t, z)\,dt$$

$$H^*(t, z) = e^{-zt}(1 + \xi(b(t), z)/z), \quad f^*(t) = b'(t) f(b(t))$$

Ясно, что

$$f^*(t) = \frac{t^n}{\beta^{n+1} n!}(f_n + s^*(t)), \quad s^*(t) \in C[0, T_1], \quad s^*(0) = 0$$

Таким образом, задача сведена к случаю 1 и лемма 3 доказана.

Обозначим

$$A_n = \frac{1}{(R_1 - R_2)^2} \sum_{k,\, j=1}^{2} \frac{(-1)^{k+j}(1 - \mu R_k^2 R_j^2)}{(R_k + R_j)^{n+1}}, \quad n \geqslant 1$$

Так как $R_1 = -1$, $R_2 = i$, то вычисляем

$$A_n = \frac{a_n}{2i(-2)^{n+1}}, \quad a_n = (\mu - 1)(1 + i^{n+1}) + 2(\mu + 1)(1 + i)^{n+1}$$

Учитывая соотношения $|1 + i^{n+1}| \leqslant \sqrt{2}$, $|1 + i|^{n-1} = (\sqrt{2})^{n+1}$, получим, что $a_n \neq 0$, $n \geqslant 1$, и, следовательно, $A_n \neq 0$ при всех $n \geqslant 1$.

Лемма 4. Пусть при $x \to +0$

$$h(x) - h^\circ(x) \sim H_n x^n/n!$$

Тогда при $|\rho| \to \infty$, $\rho \in S$ существует конечный предел

$$F_n = \lim \rho^{n-1}(\alpha(\lambda) - \alpha^\circ(\lambda))$$

причем

$$A_n H_n = F_n \tag{12}$$

Доказательство. Так как $p(x) = h^\mu(x)$, то в силу условий леммы имеем при $x \to +0$

$$p(x) - p^\circ(x) \sim \mu H_n x^n/n!$$

Используя асимптотические формулы (6) и лемму 3, находим при $|\rho| \to \infty$, $\rho \in S$

$$\int_0^T (h(x) - h^\circ(x))\,\lambda\Phi(x, \lambda)\,\Phi^\circ(x, \lambda)\,dx \sim \frac{H_n}{2i\rho^{n-1}} \sum_{k,\, j=1}^{2} \frac{(-1)^{k+j}}{(R_k + R_j)^{n+1}}$$

$$\int_0^T (p(x) - p^\circ(x))\,\Phi''(x, \lambda)\,\Phi^{\circ\prime\prime}(x, \lambda)\,dx \sim \frac{\mu H_n}{2i\rho^{n-1}} \sum_{k,\, j=1}^{2} \frac{(-1)^{k+j} R_k^2 R_j^2}{(R_k + R_j)^{n+1}}$$

Подставляя полученные выражения в (9), получаем утверждение леммы 4.

Пусть A — множество аналитических на отрезке $[0, T]$ функций. Из приведенных выше фактов вытекает следующая

Теорема. Задача 1 имеет единственное решение в классе функций $h(x) \in A$, причем оно может быть найдено по следующему алгоритму:

1) по заданным спектрам $\{\lambda_{kj}\}_{k\geqslant 1,\, j=1,\,2}$ строим функцию $\alpha(\lambda)$;

2) вычисляем $h_n = h^{(n)}(0)$, $n \geqslant 0$, $h_0 = 1$; для этого последовательно при $n = 1, 2, \ldots$ выполняем операции: строим функцию $h^\circ(x) \in A$, $h^\circ(x) > 0$ так, чтобы $h^{\circ(\nu)}(0) = h_\nu$, $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$, а в остальном произвольно, и вычисляем h_n из соотношения (12), где $H_n = h_n - h_n^\circ$;

3) определяем функцию $h(x)$ по формуле

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \frac{x^n}{n!}, \quad 0 < x < R, \quad R = \left[\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{|h_n|}{n!}\right)^{1/n}\right]^{-1}$$

Если $R < T$, то при $R < x < T$ функция $h(x)$ строится по аналитическому продолжению.

Отметим, что аналогичным образом можно решать обратную задачу и в классе кусочно-аналитических функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Юрко В. А.* Восстановление дифференциальных операторов высших порядков // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 9. С. 1540—1550.
2. *Айнола Л. Я.* К обратной задаче о собственных колебаниях упругих оболочек // ПММ. 1971. № 2. С. 358—364.
3. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.
4. *Расулов М. Л.* Метод контурного интеграла и его применение к исследованию задач для дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1964. 462 с.
5. *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. М.: Наука, 1983. 175 с.

Саратов

Поступила в редакцию 6.VI.1989