Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 6, 1990

УДК 539.3

Ю. М. Мамедов

О ПОСТРОЕНИИ ФОРМУЛЫ ВЗАИМНОСТИ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ КВАЗИСТАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НЕСВЯЗАННОЙ ОБОБЩЕННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Построены формулы взаимности и получены представления типа Сомильяна для квазистатических и динамических задач несвязанной обобщенной термоупругости в постановке Лорда — Шульмана, эффективные для приложений. Кроме того, получены представления для напряжений и теплового потока. В отличие от известного подхода (например, [1]) вывод этих формул осуществлен на основе рассмотрения системы дифференциальных уравнений вышеупомянутых задач обобщенной термоупругости, как системы с соответствующими несамосопряженными дифференциальными операторами. При построении формулы взаимности (второй формулы Грина) введены в рассмотрение операторы, сопряженные к исходным дифференциальным операторам и использовано преобразование Лапласа.

1. Постановка задачи. Система уравнений для динамических задач несвязанной обобщенной термоупругости (НОТ) имеет вид

$$\rho u_i^{\cdot\cdot} - (C_{ijkl} u_{k,l})_{,j} + (\beta_{ij} T)_{,j} = X_i$$
$$c_\varepsilon \tau_t T^{\cdot\cdot} + c_\varepsilon T^{\cdot} - (\lambda_{kj} T_{,j})_{,k} = G \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \tag{1.1}$$

Здесь u_i, X_i — компоненты вектора смещений и вектора массовых сил, G — объемная плотность источников тепла, T — отклонение текущей абсолютной температуры от абсолютной температуры Θ_0 недеформированного состояния, C_{ijkl}, λ_{kj}, β_{ij}, c_ε — механические и теплофизические характеристики тела, τ_t — постоянная релаксации, ρ — плотность среды.

Первое уравнение (1.1) получается из уравнений движения ($\sigma_{ij,j} + X_i = \rho u_i^{\cdot\cdot}$) в результате подстановки выражения Дюгамеля — Неймана для напряжений

$$\sigma_{ij} = {}^1/_2 C_{ijkl} (u_{k,l} + u_{l,k}) - \beta_{ij} T \tag{1.2}$$

причем $p_i = \sigma_{ij} n_j$.

Рассмотрим систему уравнений (1.1) во всем пространстве R^3, а также в области $V \subset R^3$. Предполагается, что область обладает кусочно-гладкой границей S. Точки пространства обозначаются через $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$, а $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ — единичная нормаль к границе S (внешняя по отношению к телу V). Считается, что тензоры C_{ijkl}, β_{ij}, λ_{kj} симметричны.

Пусть граница области V разбивается на четыре части:

$$S = S^1 \cup S^2 \cup S^3 \cup S^4, \quad S^i \cap S^j = \varnothing \quad (i, j = 1, 2, 3, 4;\ i \neq j)$$

причем на S^1 заданы перемещения и температуры, на S^2 — поверхностные силы и тепловой поток, на S^3 — перемещения и тепловой поток, на S^4 — поверхностные силы и температуры:

$$\mathbf{u} = \mathbf{f},\ T = g \text{ на } S^1;\ \mathbf{p} = \mathbf{h},\ Q = d \text{ на } S_R{}^2$$
$$\mathbf{u} = \mathbf{f},\ Q = d \text{ на } S_R{}^3;\ \mathbf{p} = \mathbf{h},\ T = g \text{ на } S_R{}^4 \tag{1.3}$$

Кроме того,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}^{\circ}(\mathbf{x}), \ \mathbf{u}^{\cdot}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}^{1}(\mathbf{x})$$

$$T(\mathbf{x}, 0) = T^{\circ}(\mathbf{x}), \ T^{\cdot}(\mathbf{x}, 0) = T^{1}(\mathbf{x}), \ \mathbf{x} \in V \tag{1.4}$$

причем

$$\mathbf{p} = T_{\mathbf{n}}\mathbf{u} - \beta \mathbf{n} T, \quad Q = \partial T / \partial n^{+}$$

$$\frac{\partial}{\partial n^{+}} = \sum_{k, j=1}^{3} \lambda_{kj}(\mathbf{x}) n_k(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Здесь $\mathbf{T_n}$ — оператор напряжения, $S_R{}^2$, $S_R{}^3$ и $S_R{}^4$ — множество всех точек соответственно на S^2, S^3, S^4, в которых определена нормаль; g, d, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ и $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)$ — заданные на границе скалярные и векторные функции.

Предполагается, что функции $\mathbf{u}$, $\mathbf{p}$, T и Q на поверхности S являются достаточно гладкими, для того чтобы интегралы типа потенциалов, в которых в качестве плотностей берутся эти функции, существовали.

Начально-краевые задачи для данной постановки формулируются следующим образом. Найти термоупругое состояние ($\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\sigma}$, T) среды в промежутке времени $[t_0, t_1]$, соответствующее массовой силе $\mathbf{X}$, тепловому источнику G и начальным условиям (1.4) (в случае квазистатических задач первые два условия (1.4) отсутствуют) и по соответствующим граничным условиям (1.3) при $S^m = S$, где m — номер задачи.

Будем говорить, что имеет место смешанная начально-краевая задача несвязанной термоупругой динамики (или квазистатики), если рассматриваются по крайней мере две из четырех частей границы S.

2. Формулы взаимности. Для построения формулы взаимности выпишем сопряженную к (1.1) систему уравнений

$$\rho \ddot{u}_i' - (C_{ijkl} u_{k,l}')_{,j} = X_i'$$

$$c_\varepsilon \tau_t T^{\cdot\cdot\prime} + c_\varepsilon T^{\cdot\prime} - (\lambda_{kj} T'_{,j})_{,k} - {}^1\!/_2 \beta_{kj} (u'_{k,j} + u'_{j,k}) = G \tag{2.1}$$

Для сопряженной системы

$$\sigma_{ij}' = {}^1\!/_2 C_{ijkl} (u'_{k,l} + u'_{l,k}), \quad p_i' = \sigma_{ij}' n_j \tag{2.2}$$

Применив к уравнению (1.2) и первому уравнению (2.2) преобразование Лапласа, выполнив все необходимые выкладки, использовав формулы Грина и уравнения равновесия, получим первую часть формулы взаимности (всюду далее объемные интегралы вычисляются по объему V, поверхностные — по поверхности S)

$$\int (\bar{u}_i' \bar{X}_i - \bar{u}_i \bar{X}_i')\, dV + \int (\bar{u}_i' \bar{p}_i - \bar{u}_i \bar{p}_i')\, dS +$$

$$+ \int \rho (p^* \bar{u}_i' u_i^{\circ} + \bar{u}_i' u_i^{1})\, dV = - \int \beta_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij}' \bar{T}\, dV \tag{2.3}$$

Из уравнений теплопроводности получим вторую часть формулы взаимности

$$\int (\bar{T}\bar{Q}' - \bar{T}'\bar{Q})\, dS - \int (\bar{G}\bar{T}' - \bar{G}'\bar{T})\, dV - \int c_\varepsilon T^{\circ} \bar{T}'\, dV -$$

$$- \int \tau_t c_\varepsilon p^* \bar{T}' T^{\circ}\, dV - \int \tau_t c_\varepsilon T^{1} \bar{T}'\, dV = - \int \beta_{kj} \bar{\varepsilon}_{kj}' \bar{T}\, dV \tag{2.4}$$

Исключая из уравнений (2.3) и (2.4) интеграл в правых частях, применяя обратное преобразование Лапласа к полученному равенству, найдем формулу взаимности для динамических задач НОТ

$$\int_0^t \int [u_i(\mathbf{x}, t - \tau) X_i'(\mathbf{x}, \tau) - X_i(\mathbf{x}, \tau) u_i'(\mathbf{x}, t - \tau)]\, dV_{\mathbf{x}}\, d\tau +$$

$$+\int_0^t\int[G'(\mathbf{x},t-\tau)\,T(\mathbf{x},\tau)-G(\mathbf{x},\tau)\,T'(\mathbf{x},t-\tau)]\,dV_{\mathbf{x}}\,d\tau-$$
$$-\int\rho\,[u_i''(\mathbf{x},t)\,u_i^\circ(\mathbf{x})+u_i'(\mathbf{x},t)\,u_i^1(\mathbf{x})]\,dV_{\mathbf{x}}=$$
$$=\int_0^t\int[T'(\mathbf{x},t-\tau)\,Q(\mathbf{x},\tau)-Q'(\mathbf{x},t-\tau)\,T(\mathbf{x},\tau)]\,dS_{\mathbf{x}}\,d\tau+$$
$$+\int\tau_t c_\varepsilon(\mathbf{x})\,T^1(\mathbf{x})\,T'(\mathbf{x},t)\,dV_{\mathbf{x}}+\int\tau_t c_\varepsilon(\mathbf{x})\,T^\circ(\mathbf{x})\,T''(\mathbf{x},t)\,dV_{\mathbf{x}}+$$
$$+\int c_\varepsilon(\mathbf{x})\,T^\circ(\mathbf{x})\,T'(\mathbf{x},t)\,dV_{\mathbf{x}}+\int_0^t\int[u_i'(\mathbf{x},t-\tau)\,p_i(\mathbf{x},\tau)-$$
$$-p_i'(\mathbf{x},t-\tau)\,u_i(\mathbf{x},\tau)]\,dS_{\mathbf{x}}\,d\tau \qquad (2.5)$$

В случае квазистатических задач НОТ (при этом в первом уравнении (1.1) $\rho u_i^{\cdot\cdot}\equiv 0$) формула взаимности имеет следующий вид (она строится таким же образом, как и в предыдущем случае):

$$\int[u_i(\mathbf{x},t)\,X_i'(\mathbf{x})-X_i(\mathbf{x},t)\,u_i'(\mathbf{x})]\,dV_{\mathbf{x}}+$$
$$+\int_0^t\int[G'(\mathbf{x},t-\tau)\,T(\mathbf{x},\tau)-G(\mathbf{x},\tau)\,T'(\mathbf{x},t-\tau)]\,dV_{\mathbf{x}}\,d\tau=$$
$$=\int_0^t\int[T'(\mathbf{x},t-\tau)\,Q(\mathbf{x},\tau)-Q'(\mathbf{x},t-\tau)\,T(\mathbf{x},\tau)]\,dS_{\mathbf{x}}\,d\tau+$$
$$+\int c_\varepsilon(\mathbf{x})\,T^\circ(\mathbf{x})\,T'(\mathbf{x},t)\,dV_{\mathbf{x}}+\int\tau_t c_\varepsilon(\mathbf{x})\,T^1(\mathbf{x})\,T'(\mathbf{x},t)\,dV_{\mathbf{x}}+$$
$$+\int\tau_t c_\varepsilon(\mathbf{x})\,T^\circ(\mathbf{x})\,T''(\mathbf{x},t)\,dV_{\mathbf{x}}+\int[u_i'(\mathbf{x})\,p_i(\mathbf{x},t)-p_i'(\mathbf{x})\,u_i(\mathbf{x},t)]\,dS_{\mathbf{x}} \qquad (2.6)$$

Отметим, что при $\tau_t=0$ формулы (2.5) и (2.6) совпадают с формулами взаимности квазистатических и динамических задач классической несвязанной термоупругости [5] [1]

3. Интегральные представления общего решения. Для построения формулы типа формулы Сомильяна используются уравнения взаимности (2.5) и (2.6).

Заменим в формуле (2.5) x и y и положим в ней

$$X_i'=\delta_{im}\delta(\mathbf{y}-\mathbf{x})\,\delta(t-\tau),\quad G'=0$$
$$u_i'=U_{im}(\mathbf{y},\mathbf{x},t-\tau),\quad p_i'=T_{im}(\mathbf{y},\mathbf{x},t-\tau)$$
$$T'=K_m(\mathbf{y},\mathbf{x},t-\tau),\quad Q'=N_m(\mathbf{y},\mathbf{x},t-\tau)$$

Тогда получим следующую интегральную формулу для динамических задач НОТ (относительно перемещения):

$$u_m(\mathbf{x},t)=\int_0^t\int U_{im}(\mathbf{y},\mathbf{x},t-\tau)\,X_i(\mathbf{y},\tau)\,dV_{\mathbf{y}}\,d\tau+$$
$$+\int_0^t\int G(\mathbf{y},\tau)\,K_m(\mathbf{y},\mathbf{x},t-\tau)\,dV_{\mathbf{y}}\,d\tau+$$
$$+\int\{\rho(\mathbf{y})\,[\dot U_{im}(\mathbf{y},\mathbf{x},t)\,u_i^\circ(\mathbf{y})+U_{im}(\mathbf{y},\mathbf{x},t)\,u_i^1(\mathbf{y})]+$$
$$+c_\varepsilon(\mathbf{y})\,[K_m(\mathbf{y},\mathbf{x},t)\,T^\circ(\mathbf{y})+\tau_t T^1(\mathbf{y})\,K_m(\mathbf{y},\mathbf{x},t)+\tau_t T^\circ(\mathbf{y})\,K_m^{\cdot}(\mathbf{y},\mathbf{x},t)]\}\,dV_{\mathbf{y}}+$$
$$+\int_0^t\int[K_m(\mathbf{y},\mathbf{x},t-\tau)\,Q(\mathbf{y},\tau)-N_m(\mathbf{y},\mathbf{x},t-\tau)\,T(\mathbf{y},\tau)]\,dS_{\mathbf{y}}\,d\tau+$$
$$+\int_0^t\int[U_{im}(\mathbf{y},\mathbf{x},t-\tau)\,p_i(\mathbf{y},\tau)-T_{im}(\mathbf{y},\mathbf{x},t-\tau)\,u_i(\mathbf{y},\tau)]\,dS_{\mathbf{y}}\,d\tau \qquad (3.1)$$
$$N_m(\mathbf{y},\mathbf{x},t)=\partial K_m(\mathbf{y},\mathbf{x},t)/\partial n^+(\mathbf{y}),\ \mathbf{x}\in V,\ t>0$$

[1] См. также: *Мамедов Ю. М.* Применение метода потенциала в задачах термоупругости: Препринт № 236. Баку: Ин-т физики АН АзССР, 1987. 78 с.

В случае, когда

$$X_i' = 0, \quad G' = \delta(\mathbf{y}-\mathbf{x})\,\delta(t-\tau)$$

$$u_i' = p_i' = 0, \; T' = T^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t-\tau); \; Q' = Q^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t-\tau)$$

из уравнения взаимности (2.5) получим формулы типа формулы Сомильяна для температуры

$$T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_0^t\int T^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t-\tau)\,G(\mathbf{y}, \tau)\,dV_{\mathbf{y}}\,d\tau +$$

$$+\int c_\varepsilon(\mathbf{y})\,T^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t)\,T^\circ(\mathbf{y})\,dV_{\mathbf{y}} + \int \tau_t c_\varepsilon(\mathbf{y})\,T^1(\mathbf{y})\,T^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t)\,dV_{\mathbf{y}} +$$

$$+\int \tau_t c_\varepsilon(\mathbf{y})\,T^\circ(\mathbf{y})\,\dot{T}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t)\,dV_{\mathbf{y}} + \int_0^t\int [T^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t-\tau)\,Q(\mathbf{y}, \tau) -$$

$$-Q^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t-\tau)\,T(\mathbf{y}, \tau)]\,dS_{\mathbf{y}}\,d\tau, \quad \mathbf{x}\in V, \quad t>0 \qquad (3.2)$$

$$Q^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t-\tau) = \partial T^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t-\tau)/\partial n^+(\mathbf{y})$$

Далее заменим в формуле (2.6) x на y и положим в ней

$$X_i' = \delta_{im}\delta(\mathbf{y}-\mathbf{x}), \; G' = 0, \; u_i' = U_{im}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

$$p_i' = T_{im}(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \; T' = K_m^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t-\tau), \; Q = N_m^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t-\tau)$$

При этом получим интегральную формулу представления перемещений для квазистатических задач НОТ

$$u_m(\mathbf{x}, t) = \int U_{im}(\mathbf{y}, \mathbf{x})\,X_i(\mathbf{y}, t)\,dV_{\mathbf{y}} + \int_0^t\int K_m^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t-\tau)\,G(\mathbf{y}, \tau)\,dV_{\mathbf{y}}\,d\tau +$$

$$+\int c_\varepsilon(\mathbf{y})\,\{T^\circ(\mathbf{y})\,K_m^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t) + \tau_t\,[T^1(\mathbf{y})\,K_m^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t) +$$

$$+T^\circ(\mathbf{y})\,\dot{K}_m^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t)]\}\,dV_{\mathbf{y}} + \int_0^t\int [K_m^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t-\tau)\,Q(\mathbf{y}, \tau) -$$

$$-N_m^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t-\tau)\,T(\mathbf{y}, \tau)]\,dS_{\mathbf{y}}\,d\tau + \int [U_{im}(\mathbf{y}, x)\,p_i(\mathbf{y}, t) -$$

$$-T_{im}(\mathbf{y}, \mathbf{x})\,u_i(\mathbf{y}, t)]\,dS_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x}\in V, \quad t>0 \qquad (3.3)$$

$$N_m^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t) = \partial K_m^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t)/\partial n^+(\mathbf{y})$$

Формула (3.2) остается в силе и в случае квазистатических задач.

При помощи полученных формул вычисляются смещения и температура внутри тела (т. е., при $\mathbf{x}\in V$) через их граничные значения и граничные значения напряжений и теплового потока.

Заметим, что поскольку первые три уравнения системы (2.1) образуют систему уравнений движения Ламе (в случае квазистатики систему уравнений эластостатики в перемещениях) для изотермического случая, то компоненты $U_{im}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$, $(U_{im}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ фундаментального решения сопряженной системы являются также компонентами фундаментального решения нестационарной изотермической эластодинамики (эластостатики).

Кроме того, компоненты $T_{im}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ $(T_{im}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ совпадают одноименными компонентами изотермической эластодинамики (эластостатики).

Установим теперь связь между компонентами K_m, T^* (K_m^*, T^*) фундаментального решения системы (2.1) (в случае квазистатики $\rho\ddot{u}_i \equiv 0$) и фундаментальным решением исходной системы, соответствующим единичному импульсному источнику тепла.

Предполагая, что тело неограниченно, и считая начальные условия, массовые силы нулевыми и $G(\mathbf{y}, \tau) = \delta(\mathbf{y}-\mathbf{x})\,\delta(\tau)$, из формул (3.1)—

(3.3) получим

$$T_1^* (\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = T^* (\mathbf{y}, \mathbf{x}, t), \quad U_m^* (\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = K_m (\mathbf{y}, \mathbf{x}, t)$$
$$U_m'' (\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = K_m^* (\mathbf{y}, \mathbf{x}, t) \tag{3.4}$$

Здесь $T_1^* (\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$, $U_m^* (\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ и $U_m'' (\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ — компоненты фундаментальных решений исходных систем соответственно.

4. Формулы представления для напряжений и теплового потока. Теперь, заменяя в равенстве (3.1) обозначения индекса m на l, воздействуя на обе части этого равенства оператором $C_{mrlk}\partial/\partial x_k$ и принимая во внимание формулы (1.2), получим формулу представления для напряжений

$$\sigma_{mr}(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \int D_{mri}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) X_i(\mathbf{y}, \tau)\, dV_{\mathbf{y}}\, d\tau +$$
$$+ \int_0^t \int V_{mr}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) G(\mathbf{y}, \tau)\, dV_{\mathbf{y}}\, d\tau + \int \{\rho(\mathbf{y}) [\dot{D}_{mri}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) u_i^\circ(\mathbf{y}) +$$
$$+ D_{mri}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) u_i^1(\mathbf{y})] + c_\varepsilon(\mathbf{y}) [T^\circ(\mathbf{y}) V_{mr}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \tau_t T^1(\mathbf{y}) V_{mr}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) +$$
$$+ \tau_t T^\circ(\mathbf{y}) \dot{V}_{mr}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)]\}\, dV_{\mathbf{y}} + \int_0^t \int [V_{mr}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) Q(\mathbf{y}, \tau) -$$
$$- S_{mr}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) T(\mathbf{y}, \tau)]\, dS_{\mathbf{y}}\, d\tau + \int_0^t \int [D_{mri}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) p_i(\mathbf{y}, \tau) -$$
$$- S_{mri}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) u_i(\mathbf{y}, \tau)]\, dS_{\mathbf{y}}\, d\tau - \beta_{mr} T(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in V, \quad t > 0 \tag{4.1}$$

$$D_{mri}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = C_{mrlk}(\mathbf{x})\, \partial U_{li}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)/\partial x_k$$
$$S_{mri}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = C_{mrlk}(\mathbf{x})\, \partial T_{li}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)/\partial x_k$$
$$V_{mr}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = C_{mrlk}(\mathbf{x})\, \partial U_l^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)/\partial x_k$$
$$S_{mr}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = C_{mrlk}(\mathbf{x})\, \partial N_l^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)/\partial x_k$$

причем

$$T_{li}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = C_{ijkm} n_j(\mathbf{y})\, \partial U_{ml}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t)/\partial y_k$$

Воздействуя на обе части равенства (3.2) оператором $\partial/\partial n^+(\mathbf{x})$, получим формулу представления для теплового потока

$$Q(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \int \frac{\partial}{\partial n^+(\mathbf{x})} T_1^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) G(\mathbf{y}, \tau)\, dV_{\mathbf{y}}\, d\tau +$$
$$+ \int c_\varepsilon(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n^+(\mathbf{x})} T_1^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) T^\circ(\mathbf{y})\, dV_{\mathbf{y}} + \int \tau_t c_\varepsilon(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n^+(\mathbf{x})} T_1^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) T^1(\mathbf{y})\, dV_{\mathbf{y}} +$$
$$+ \int \tau_t c_\varepsilon(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n^+(\mathbf{x})} \dot{T}_1^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) T^\circ(\mathbf{y})\, dV_{\mathbf{y}} + \int_0^t \int \left[\frac{\partial}{\partial n^+(\mathbf{x})} T_1^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) Q(\mathbf{y}, \tau) -\right.$$
$$\left. - \frac{\partial}{\partial n^+(\mathbf{x})} Q_1^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) T(\mathbf{y}, \tau)\right] dS_{\mathbf{y}}\, d\tau, \quad x \in V, \quad t > 0 \tag{4.2}$$
$$Q_1^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) = \partial T_1^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau)/\partial n^+(\mathbf{x})$$

Формула для напряжений в случае квазистатических задач имеет вид

$$\sigma_{mr}(\mathbf{x}, t) = \int D_{mri}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) X_i(\mathbf{y})\, dV_{\mathbf{y}} + \int_0^t \int V_{mr}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) G(\mathbf{y}, \tau)\, dV_{\mathbf{y}}\, d\tau +$$
$$+ \int c_\varepsilon(\mathbf{y}) V_{mr}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) T^\circ(\mathbf{y})\, dV_{\mathbf{y}} + \int \tau_t c_\varepsilon(\mathbf{y}) V_{mr}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) T^1(\mathbf{y})\, dV_{\mathbf{y}} +$$
$$+ \int \tau_t c_\varepsilon(\mathbf{y}) \dot{V}_{mr}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) T^\circ(\mathbf{y})\, dV_{\mathbf{y}} + \int_0^t \int [V_{mr}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) Q(\mathbf{y}, \tau) -$$
$$- S_{mr}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t-\tau) T(\mathbf{y}, \tau)]\, dS_{\mathbf{y}}\, d\tau + \int [D_{mri}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p_i(\mathbf{y}, t) -$$
$$- S_{mri}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_i(\mathbf{y}, t)]\, dS_{\mathbf{y}} - T(\mathbf{x}, t) \beta_{mr}, \quad \mathbf{x} \in V, \quad t > 0 \tag{4.3}$$

$$D_{mri}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = C_{mrlk}(\mathbf{x})\, \partial U_{li}(\mathbf{x}, \mathbf{y})/\partial x_k$$

$$S_{mri}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = C_{mrlk}(\mathbf{x})\, \partial T_{li}(\mathbf{x}, \mathbf{y})/\partial x_k$$

$$V^*_{mr}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = C_{mrlk}(\mathbf{x})\, \partial U_l''(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)/\partial x_k$$

$$S^*_{mr}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = C_{mrlk}(\mathbf{x})\, \partial N_l''(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)/\partial x_k$$

причем

$$T_{li}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = C_{ijkm} n_j(\mathbf{y})\, \partial U_{ml}(\mathbf{y}, \mathbf{x})/\partial y_k$$

С использованием представлений (4.1)—(4.3) можно вычислить напряжения и тепловой поток во внутренних точках рассматриваемой области для соответствующих краевых задач.

На основе построенных интегральных представлений могут быть сконструированы в прямой формулировке (при наличии фундаментальных и сингулярных решений) гранично-временные интегральные уравнения для вышеупомянутых начально-краевых задач. Кроме того, изложенный подход при замене фундаментальных решений можно распространить на двумерные начально-краевые задачи НОТ.

Автор благодарит Р. В. Гольдштейна за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
2. *Бурчуладзе Т. В., Гегелиа Т. Г.* Развитие метода потенциала в теории упругости. Тбилиси.: Мецниереба, 1985. 226 с.
3. *Кукуджанов В. Н., Острик А. В.* Динамические задачи взаимосвязанной термоупругости // Пластичность и разрушение твердых тел. М.: Наука, 1988, С. 125—130.
4. *Ignaczak J.* On a three-dimentional solution of dynamic thermoelasticity with two relaxation times // J. Therm. Stresses. 1981. V. 4. № 3—4. p. 357—385.
5. *Хуторянский Н. М.* К теории потенциала для нестационарных динамических задач несвязанной термоупругости // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1980. Вып. 15. С. 9—17.

Баку

Поступила в редакцию
24.V.1989