Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 6, 1990

УДК 538.4

Ю. Г. Губарев

К ОБРАЩЕНИЮ ТЕОРЕМЫ ЛАГРАНЖА В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

Исследуется проблема обращения теоремы Лагранжа [1, 2] в магнитной гидродинамике. Рассматривается линейная задача устойчивости состояния покоя вязкой несжимаемой жидкости с бесконечной проводимостью, содержащей магнитное поле. Прямым методом Ляпунова показано, что система неустойчива, если вторая вариация потенциальной энергии принимает отрицательные значения. Получены априорные оценки роста возмущений как снизу, так и сверху. Оценка снизу гарантирует экспоненциальное нарастание отклонений частиц жидкости и силовых линий магнитного поля от состояния равновесия. Оценка сверху показывает, что решения возрастают не быстрее, чем экспоненциально. Показатели экспонент в обоих случаях вычисляются по параметрам состояния равновесия и начальным данным для полей возмущений.

Представленная работа распространяет известные результаты [3, 4] на магнитную гидродинамику.

1. Постановка точной задачи. Изучаются пространственные движения вязкой несжимаемой жидкости с бесконечной проводимостью в магнитном поле. Область τ течения ограничена неподвижной твердой идеально проводящей границей $\partial\tau$. Используются обозначения: p и $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ — поля давления и скорости, $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)$ — магнитное поле, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и t — декартовы координаты и время, $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ — нормаль к $\partial\tau$, ρ — плотность жидкости, η — коэффициент динамической вязкости. Уравнения движения берутся в форме [5]

$$\rho du_i/dt = \sigma_{ik,k} + (4\pi)^{-1} h_k (h_{i,k} - h_{k,i}), \quad u_{k,k} = 0 \tag{1.1}$$

$$dh_i/dt = h_k u_{i,k}, \; h_{k,k} = 0$$

$$(\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \eta D_{ik}, \quad D_{ik} = u_{i,k} + u_{k,i}, \quad d/dt = \partial/\partial t + u_k \partial/\partial x_k$$

$$u_{i,k} = \partial u_i/\partial x_k, \; h_{i,k} = \partial h_i/\partial x_k, \; \sigma_{ik,k} = \partial\sigma_{ik}/\partial x_k)$$

На границе $\partial\tau$ выполняются условия

$$u_i = 0, \quad h_i n_i = 0 \tag{1.2}$$

Всюду по повторяющимся векторным и тензорным индексам проводится суммирование.

Для задачи (1.1), (1.2) справедливо уравнение диссипации энергии

$$E_1^{\boldsymbol{\cdot}} = -D_1; \; E_1 = K_1 + \Pi_1, \; D_1 = {}^1/_2 \int \eta D_{ik} D_{ik} d\tau \tag{1.3}$$

$$K_1 = {}^1/_2 \int \rho u_i u_i d\tau, \; \Pi_1 = (8\pi)^{-1} \int h_i h_i d\tau, \; d\tau = dx_1 dx_2 dx_3$$

Интегрирование всюду ведется по области τ течения, точкой обозначена частная производная по времени.

Точные стационарные решения задачи (1.1), (1.2)

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}(\mathbf{x}) \equiv 0, \quad p = P(\mathbf{x}), \; \mathbf{h} = \mathbf{H}(\mathbf{x}) \tag{1.4}$$

отвечающие состояниям магнитостатического равновесия, удовлетворяют уравнениям

$$(4\pi)^{-1} H_k (H_{k,i} - H_{i,k}) = -P_{,i}, \; H_{k,k} = 0 \; (P_{,i} = \partial P/\partial x_i) \tag{1.5}$$

и граничным условиям (1.2).

2. Постановка линеаризованной задачи. Линеаризация задачи (1.1), (1.2) на решениях (1.4) при учете (1.5) дает

$$\rho u_i'^{\cdot} = \sigma_{ik,k}' + (4\pi)^{-1}[h_k'(H_{i,k} - H_{k,i}) + H_k(h_{i,k}' - h_{k,i}')] \quad (2.1)$$
$$h_i'^{\cdot} = H_k u_{i,k}' - u_k' H_{i,k}, \quad u_{k,k}' = 0, \quad h_{k,k}' = 0 \quad \text{в } \tau$$
$$u_i' = 0, \quad h_i' n_i = 0 \quad \text{на} \quad \partial\tau$$

Здесь $\mathbf{u}'$, p' и $\mathbf{h}'$ — возмущения, полей скорости давления и магнитного поля, выражение для σ_{ik}' совпадает с σ_{ik} при замене p и $\mathbf{u}$ на p' и $\mathbf{u}'$.

Вводится поле лагранжевых смещений жидких частиц $\xi(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющее уравнению

$$\xi_i^{\cdot} = u_i' \quad (2.2)$$

Ниже штрихи у полей возмущений, тензоров σ_{ik}' и D_{ik}' опускаются.

Для линеаризованной задачи (2.1) уравнение диссипации энергии имеет вид

$$E^{\cdot} = -D; \; E = K + \Pi, \; D = {}^1/_2 \int \eta D_{ik} D_{ik} d\tau \quad (2.3)$$
$$K = {}^1/_2 \int \rho u_i u_i d\tau, \; \Pi = (8\pi)^{-1} \int [h_i h_i - h_i \xi_k (H_{k,i} - H_{i,k})] \, d\tau$$

Функционал Π (2.3) совпадает с выражением для второй вариации функционала потенциальной энергии задачи (1.1), (1.2) [6], поскольку представляет собой первый ненулевой член разложения Π_1 (1.3) вблизи состояния магнитостатического равновесия (покоя) (1.4), (1.5), (1.2).

Покажем, что состояние покоя (1.4), (1.5), (1.2) при отсутствии минимума функционала потенциальной энергии Π (2.3) неустойчиво. Получим оценки скорости нарастания возмущений.

Предполагается, что существует множество Q функций $\xi(\mathbf{x})$ из (2.2), для которого

$$\Pi < 0, \quad \xi(\mathbf{x}) \in Q \quad (2.4)$$

В случае $\xi(\mathbf{x}) \notin Q$ неравенство (2.4) меняется на противоположное. Следовательно, для функционала Π состояние покоя (1.4), (1.5), (1.2) — бесконечномерный аналог «седловой точки».

3. Функционал Ляпунова. Вводятся функционалы [4]

$$M = \int \rho \xi_i \xi_i d\tau, \quad M^{\cdot} = 2 \int \rho \xi_i u_i d\tau \quad (3.1)$$
$$2G = \int \eta G_{ik} G_{ik} d\tau, \quad G_{ik} = \xi_{i,k} + \xi_{k,i}, \quad X = M^{\cdot} + G$$

Дифференцирование функционала X по времени и последующие преобразования с использованием (2.1), (2.3) и (3.1) дают соотношение

$$X^{\cdot} = 4(K - \Pi) = 8K - 4E \quad (3.2)$$

которое называется обобщенным вириальным равенством [4]. Умножая соотношение (3.2) на произвольный постоянный множитель $-\lambda$ и складывая с уравнением диссипации энергии (2.3), можно получить связь

$$E_\lambda^{\cdot} = 2\lambda E_\lambda - 4\lambda K_\lambda - D_\lambda \quad (3.3)$$
$$E_\lambda = K_\lambda + \Pi_\lambda, \; 2\Pi_\lambda = 2\Pi + \lambda G + \lambda^2 M$$
$$2K_\lambda = 2K - \lambda M^{\cdot} + \lambda^2 M = \int \rho (\xi_t - \lambda\xi)^2 \, d\tau$$
$$D_\lambda = D - \lambda G^{\cdot} + \lambda^2 G = {}^1/_2 \int \eta (D_{ik} - \lambda G_{ik})^2 \, d\tau$$

Пусть $\lambda > 0$. Тогда, поскольку величины K_λ, D_λ неотрицательны, из (3.3) следует неравенство $E_\lambda^{\cdot} \leqslant 2\lambda E_\lambda$, в результате интегрирования которого имеем соотношение

$$E_\lambda(t) \leqslant E_\lambda^\circ \exp(2\lambda t) \; (E_\lambda^\circ = E_\lambda(0)) \quad (3.4)$$

справедливое для любого решения задачи (2.1). Важно, что здесь не налагается никаких ограничений на знак функционала потенциальной энергии П (2.3). Так как функционал E_λ меняется монотонно, его можно рассматривать в качестве функционала Ляпунова.

4. Оценка снизу. Пусть выполняется условие (2.4). Это позволяет выбирать такие начальные поля лагранжевых смещений $\xi(\mathbf{x}, 0) \in Q$, что $\Pi^\circ < 0$. В качестве начальных полей скорости рассматриваются функции $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)$, для которых $K^\circ < |\Pi^\circ|$.

Из последних двух соотношений вытекает неравенство

$$E^\circ < 0 \tag{4.1}$$

Согласно (3.3)

$$E_\lambda{}^\circ = E^\circ + \lambda A^\circ + \lambda^2 M^\circ, \quad 2A = G - M^\cdot \tag{4.2}$$

Функционал $E_\lambda{}^\circ$ (4.2) представляет собой полином второй степени от λ с положительным коэффициентом M° (3.1) при λ^2 и отрицательным свободным членом E° (4.1).

Пусть $\lambda > 0$. Тогда на интервале

$$0 < \lambda < \Lambda_1 = -{}^1/_2 A/M + \sqrt{({}^1/_2 A/M)^2 - E/M} \tag{4.3}$$

выполняется соотношение

$$E_\lambda{}^\circ < 0 \tag{4.4}$$

Неравенства (3.4), (4.4) показывают, что с течением времени решения задачи (2.1) растут экспоненциально.

Если $\lambda = \Lambda_1 - \delta$ (с любым δ из интервала $0 < \delta < \Lambda_1$), то соотношение (3.4) принимает вид

$$E_{\Lambda_1-\delta}(t) \leqslant \mathring{E}_{\Lambda_1-\delta} \exp[2(\Lambda_1 - \delta)t] \quad (\mathring{E}_{\Lambda_1-\delta} < 0) \tag{4.5}$$

Из определения функционалов Π_λ и K_λ (3.3) следует неравенство

$$E_\lambda(t) = K_\lambda(t) + \Pi_\lambda(t) > \Pi(t)$$

которое вместе с (4.5) дает оценку

$$\Pi(t) < \mathring{E}_{\Lambda_1-\delta} \exp[2(\Lambda_1 - \delta)t] \tag{4.6}$$

При помощи функционала

$$J(t) = \int [h_i h_i + \xi_i \xi_i]\, d\tau$$

неравенство (4.6) записывается в более наглядной форме

$$J(t) > |c\mathring{E}_{\Lambda_1-\delta}| \exp[2(\Lambda_1 - \delta)t] \tag{4.7}$$

где c — известная постоянная.

Из (4.7) вытекает, что параметр Λ_1 (4.3) оценивает инкременты решений задачи (2.1) снизу.

Рассматривается такой класс решений задачи (2.1), для которого начальные поля скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)$ и лагранжевых смещений $\xi(\mathbf{x}, 0)$ связаны в каждой точке соотношениями

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \lambda \xi(\mathbf{x}, 0) \tag{4.8}$$

Из соотношений (3.3), (4.8) следует, что

$$K_\lambda{}^\circ = 0, \quad E_\lambda{}^\circ = \Pi_\lambda{}^\circ \tag{4.9}$$

Пусть $\lambda > 0$, а для полей лагранжевых смещений $\xi(\mathbf{x}, 0)$ выполняется условие (2.4). Так как в силу (3.3)

$$2\Pi_\lambda{}^\circ = 2\Pi^\circ + \lambda G^\circ + \lambda^2 M^\circ$$

то на интервале

$$0 < \lambda < \Lambda = -{}^1/_2 G/M + \sqrt{({}^1/_2 G/M)^2 - 2\Pi/M} \qquad (4.10)$$

имеет место неравенство $\Pi_\lambda^\circ < 0$. Полагая $\lambda = \Lambda - \delta$ (с произвольным δ из интервала $0 < \delta < \Lambda$) и учитывая соотношение (4.9), неравенство (3.4) можно записать в виде

$$E_{\Lambda-\delta}(t) \leqslant \mathring{\Pi}_{\Lambda-\delta} \exp[2(\Lambda - \delta)t]$$

откуда вытекает оценка

$$J(t) > |c\mathring{\Pi}_{\Lambda-\delta}| \exp[2(\Lambda - \delta)t] \qquad (4.11)$$

Таким образом, параметр Λ оценивает снизу инкременты решений задачи (2.1) из класса (4.8).

Ниже будет показано, что возмущения (4.8) — наиболее опасные, поскольку наибыстрейший рост решений задачи (2.1) наблюдается при

$$\Lambda^+ = \sup_{\xi \in Q} \Lambda \qquad (4.12)$$

5. **Оценка сверху.** Пусть $\lambda > \Lambda^+$ (4.12). Тогда для полей лагранжевых смещений $\xi(\mathbf{x}) \in Q$ справедливо неравенство

$$\Pi_\lambda > 0 \qquad (5.1)$$

В силу (2.4) соотношение (5.1) тем более выполнено для функций $\xi(\mathbf{x}) \notin \notin Q$. Таким образом, функционал Π_λ положительно определен для всех возможных полей лагранжевых смещений $\xi(\mathbf{x})$. Соотношения (2.2), (3.3) и (5.1) показывают, что функционал E_λ также положительно определен для всех возможных полей лагранжевых смещений $\xi(\mathbf{x})$ и скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x})$.

Следовательно, при $\lambda = \Lambda^+ + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ из (3.4) вытекает оценка

$$E_{\Lambda^+ + \varepsilon}(t) \leqslant \mathring{E}_{\Lambda^+ + \varepsilon} \exp[2(\Lambda^+ + \varepsilon)t]$$

которая при помощи неравенства $\Pi_{\Lambda^+}(t) \geqslant 0$ преобразуется к более наглядной форме

$$2K_{\Lambda^+ + \varepsilon}(t) + \varepsilon(2\Lambda^+ + \varepsilon)M(t) + \varepsilon G \leqslant 2\mathring{E}_{\Lambda^+ + \varepsilon} \exp[2(\Lambda^+ + \varepsilon)t] \quad (5.2)$$

Из (5.2) видно, что параметр $\Lambda^+ + \varepsilon$ оценивает инкременты решений задачи (2.1) сверху. Сравнение оценок (4.11) и (5.2) при учете (4.12) показывает, что параметр Λ^+ оценивает скорость нарастания наиболее опасных возмущений (4.8) как сверху, так и снизу:

$$\Lambda^+ - \delta \leqslant \omega_* \leqslant \Lambda^+ + \varepsilon$$

Автор благодарит В. А. Владимирова за постановку задачи и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1965. 207 с.
2. *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.
3. *Владимиров В. А., Румянцев В. В.* К обращению теоремы Лагранжа для твердого тела с полостью, содержащей идеальную жидкость // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 4. С. 608—612.
4. *Владимиров В. А., Румянцев В. В.* К обращению теоремы Лагранжа для твердого тела с полостью, содержащей вязкую жидкость // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 2. С. 190—200.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 623 с.
6. *Демуцкий В. П., Половин Р. В.* Основы магнитной гидродинамики. М.: Энергоатомиздат, 1987. 206 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию 11.XII.1989