Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 6, 1990

УДК 531.38 + 62—50

Д. В. Лебедев

О СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Исследуется задача стабилизации невозмущенного движения динамической системы при неполной информации о ее параметрах. Решение задачи отыскивается вторым методом Ляпунова в классе динамических регуляторов и обобщает результаты работы [1] на случай управляемых динамических систем. Аналогичные задачи управления рассматривались, в частности, в [2].

Предлагаемое решение используется для стабилизации перманентного вращения твердого тела управляющим моментом, в структуре которого отсутствует x-компонента [3].

1. Постановка задачи. Рассмотрим управляемую динамическую систему (объект управления)

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}),\ \mathbf{f}(0, 0, \boldsymbol{\xi}) = 0 \tag{1.1}$$

$$\mathbf{x} \in R_n,\ \mathbf{u} \in U \subset R_m,\ \boldsymbol{\xi} \in R_s$$

в которой $\boldsymbol{\xi}$ — s-мерный вектор неизвестных параметров.

В области

$$P = \{\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}: \|\mathbf{x}\| < \nu_1,\ \|\boldsymbol{\xi}\| < \nu_2\} \tag{1.2}$$

(ν_1 и ν_2 — положительные постоянные) функции $f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\xi})$ $(i = 1, \ldots, n)$ непрерывны вместе с частными производными по $x_1, \ldots, x_n$, $\xi_1, \ldots, \xi_s$ и существует постоянная $\nu_3 > 0$, такая, что

$$|\partial^2 f_i/\partial\xi_j\partial\xi_k| < \nu_3\ (i = 1, \ldots, n;\ j, k = 1, \ldots, s)$$

Требуется найти управление $\mathbf{u}$, обеспечивающее в области (1.2) асимптотическую устойчивость положения равновесия

$$\mathbf{x} = 0 \tag{1.3}$$

системы (1.1).

2. Стабилизация объекта управления при неизвестных параметрах. Пусть при известном векторе $\boldsymbol{\xi}$ задачу стабилизации решает управление

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}),\ \mathbf{u}_*(0, \boldsymbol{\xi}) = 0 \tag{2.1}$$

которому в области (1.2) отвечает определенно-положительная функция W, такая, что удовлетворяющая уравнению

$$(\partial V_0/\partial\mathbf{x})\cdot\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_*, \boldsymbol{\xi}) = -W(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$$

функция $V_0(\mathbf{x})$ является в этой области определенно-положительной.

Кроме того, считаем, что на траектории (1.3) невозмущенного движения система (1.1) идентифицируема [4].

Решение поставленной задачи при неизвестном векторе $\boldsymbol{\xi}$ будем отыскивать в классе динамических регуляторов [2]:

$$\mathbf{y}^{\cdot} = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}),\quad \boldsymbol{\eta}^{\cdot} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}),\quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \tag{2.2}$$

где $\boldsymbol{\eta}$ — s-мерный вектор оценки параметров объекта $\boldsymbol{\xi}$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})$ — подлежащая определению вектор-функция.

Задавая правую часть первого уравнения системы (2.2) в виде [1]

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) = A(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\eta})$$

(A — устойчивая ($n \times n$)-матрица), отметим, что разность $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ между векторами состояния объекта $\mathbf{x}$ и системы слежения за его параметрами $\mathbf{y}$ подчиняется уравнению

$$\mathbf{e}^{\cdot} = A\mathbf{e} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) = A\mathbf{e} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\alpha}), \quad \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}$$

$$\|\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\alpha})\| / \|\boldsymbol{\alpha}\| \to 0 \quad \text{при } \|\boldsymbol{\alpha}\| \to 0 \tag{2.3}$$

Здесь учтены указанные выше свойства вектор-функции $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\xi})$, позволяющие записать разность двух последних слагаемых в правой части уравнения (2.3) в приведенной выше форме [1].

Формируя управляющее воздействие (2.1) не по вектору $\boldsymbol{\xi}$, а по его оценке $\boldsymbol{\eta}$, предполагаем, что управление представимо в виде соотношения

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{u}_*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + Q(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{q}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi}) \tag{2.4}$$

в котором $Q(\boldsymbol{\xi})$ — ($m \times s$) — матрица, $\mathbf{q}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi})$ — вектор-функция, разложение которой по переменным $\mathbf{x}$ и $\boldsymbol{\alpha}$ начинается членами не ниже второй степени.

Рассмотрим теперь уравнение объекта (1.1), систему (2.3), уравнение для ошибки $\boldsymbol{\alpha}$ оцениваемых параметров

$$\boldsymbol{\alpha}^{\cdot} = -\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{e}, \boldsymbol{\eta}) \tag{2.5}$$

и алгоритм управления (2.4).

Задача сводится к отысканию такой вектор-функции $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{e}, \boldsymbol{\eta})$, которая обеспечила бы положению равновесия

$$\mathbf{x} = 0, \ \mathbf{e} = 0, \ \boldsymbol{\alpha} = 0 \tag{2.6}$$

системы (1.1), (2.3)—(2.5) асимптотическую устойчивость.

Введем функцию

$$V(\mathbf{x}, \mathbf{e}, \boldsymbol{\alpha}) = V_0(\mathbf{x}) + \mathbf{e}'R\mathbf{e} + \boldsymbol{\alpha}'\Gamma^{-1}\boldsymbol{\alpha} \tag{2.7}$$

(R и Γ — симметрические ($n \times n$)- и ($s \times s$)-матрицы соответственно), положительную всюду, кроме точки (2.6), где она обращается в нуль. Производную по времени от V в силу системы (1.1), (2.3)—(2.5) возмущенного движения представим в виде

$$\begin{gathered} V^{\cdot} = -W(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + 2\mathbf{x}'D\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{e}'N\mathbf{e} + \\ + 2\mathbf{e}'R(\partial\mathbf{f}/\partial\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\alpha} - 2\boldsymbol{\alpha}'\Gamma^{-1}\mathbf{g} + v(\mathbf{x}, \mathbf{e}, \boldsymbol{\alpha}) \\ N = A'R + RA \end{gathered} \tag{2.8}$$

где из-за устойчивости матрицы A симметрическая матрица $N < 0$; разложение функции $v(\mathbf{x}, \mathbf{e}, \boldsymbol{\alpha})$ по переменным $\mathbf{x}$, $\mathbf{e}$, $\boldsymbol{\alpha}$ начинается с членов не ниже третьей степени, причем $v(0, 0, \boldsymbol{\alpha}) = 0$.

Отметим, что слагаемое $2\mathbf{x}'D\boldsymbol{\alpha}$ в соотношении (2.8) появилось из-за наличия в структуре управления $\mathbf{u}$ члена $Q(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\alpha}$.

Поскольку знакоопределенность аналитических функций определяется совокупностью членов наинизшего порядка в разложениях этих фукций [5], то судить о свойствах функции (2.8) можно по свойствам функции

$$\begin{gathered} V^{\circ}(\mathbf{x}, \mathbf{e}, \boldsymbol{\alpha}) = -W(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + \mathbf{e}'N\mathbf{e} + \\ + 2\mathbf{e}'[D\mathbf{x} + (\partial\mathbf{f}/\partial\boldsymbol{\xi})'R\mathbf{e} - \Gamma^{-1}\mathbf{g}] \end{gathered} \tag{2.9}$$

Если положить

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{e}, \boldsymbol{\eta}) = \Gamma(\partial\mathbf{f}/\partial\boldsymbol{\xi})'R\mathbf{e} + \Gamma D\mathbf{x} \tag{2.10}$$

то правая часть выражения (2.9) как функция вектора $\mathbf{z} = \{\mathbf{x}', \mathbf{e}', \boldsymbol{\alpha}'\}$ — знакопостоянная отрицательная, так как принимает нулевое значение не только в положении (2.6) исследуемой системы, но и на множестве

$$Z = \{\mathbf{z}: \mathbf{x} = 0, \mathbf{e} = 0, \boldsymbol{\alpha} \neq 0\}$$

Множество Z не содержит целых траекторий системы (1.1), (2.3)—(2.5), поэтому по теореме Н. Н. Красовского [6] управление $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})$ и закон индентификации (2.10) обеспечивают асимптотическую устойчивость невозмущенного движения (2.6) системы (1.1), (2.3)—(2.5).

Отметим в заключение, что система уравнений (динамический регулятор)

$$\mathbf{y}^{\cdot} = A(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}), \boldsymbol{\eta}), \ \boldsymbol{\eta}^{\cdot} = \Gamma(\partial \mathbf{f}/\partial \boldsymbol{\xi})' R(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \\ + \Gamma D\mathbf{x}, \ \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})$$

не только решает задачу стабилизации, но и определяет вектор ξ неизвестных параметров объекта управления.

3. Стабилизация перманентного вращения твердого тела. Введем две правые ортогональные системы координат: жестко связанный с твердым телом трехгранник xyz и систему $x_*y_*z_*$ главных центральных осей инерции тела.

Предполагается, что движение твердого тела наблюдается в базисе xyz и описывается в нем динамическими уравнениями Эйлера

$$J\boldsymbol{\omega}^{\cdot} + \boldsymbol{\omega} \times J\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}, \ \boldsymbol{\omega} = \{\omega_x, \omega_y, \omega_z\} \tag{3.1}$$

Управляющий момент $\mathbf{M}$ имеет следующую структуру: $\mathbf{M} = \{0, M_y, M_z\}$.

Матрица инерции J связана с матрицей инерции $J_* = \operatorname{diag}\{J_1, J_2, J_3\}$ (для определенности считаем $J_1 < J_2 \leqslant J_3$) в базисе $x_*y_*z_*$ соотношением

$$J = BJ_*B', \ B = \{\beta_{ij}\} \ (i, j = 1, 2, 3) \tag{3.2}$$

(B — матрица направляющих косинусов).

Пусть твердому телу с известными в трехграннике $x_*y_*z_*$ моментами инерции сообщена угловая скорость $\omega_x = \Omega$ ($|\omega_y|$, $|\omega_z| \ll \Omega$).

Требуется стабилизировать перманентное вращение тела относительно оси x_* с угловой скоростью Ω_* при неизвестной ориентации в координатной системе xyz главной центральной оси инерции x_* твердого тела. В базисе xyz ему отвечает движение

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_* = \Omega_*\boldsymbol{\xi}, \ \boldsymbol{\xi} = \{\beta_{11}, \beta_{21}, \beta_{31}\} \tag{3.3}$$

По формуле

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{X} + \Omega_*\boldsymbol{\xi}, \ \mathbf{X} = \{X_i\} \ (i = 1, 2, 3) \tag{3.4}$$

введем новые переменные X_i и запишем уравнение возмущенного движения твердого тела в виде

$$J\mathbf{X}^{\cdot} + \Omega_*\boldsymbol{\xi} \times J\mathbf{X} + \mathbf{X} \times J(\mathbf{X} + \Omega_*\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{M} \tag{3.5}$$

Параметризуем матрицу B направляющих косинусов переменными

$$\tau_1 = \beta_{21}, \ \tau_2 = \beta_{31}, \ \tau_3 = \beta_{23}$$

и представим ее в виде

$$B = \begin{Vmatrix} \gamma_1 & \tau_2\tau_3 - \tau_1\gamma_3 & T \\ \tau_1 & \gamma_2 & \tau_3 \\ \tau_2 & \tau_1 T - \tau_3\gamma_1 & \gamma_3 \end{Vmatrix}, \quad \begin{aligned} \gamma_1 &= (1 - \tau_1^2 - \tau_2^2)^{1/2} \\ \gamma_2 &= (1 - \tau_1^2 - \tau_3^2)^{1/2} \\ \gamma_3 &= (1 - \tau_3^2 - T^2)^{1/2} \end{aligned}$$

$$T = -(\tau_1\tau_3\gamma_1 + \tau_2\gamma_2)/(1 - \tau_1^2)$$

Отметим, что на траектории (3.3) невозмущенного движения параметры τ_1 и τ_2 идентифицируемы, а параметр τ_3 неидентифицируем. Неидентифицируемость параметра τ_3 позволяет придать ему произвольное (например, нулевое) значение.

Поскольку направление оси x_* в базисе xyz определяется параметрами τ_1 и τ_2, то идентификации подлежит вектор ξ (точнее, две его компоненты — β_{21} и β_{31}).

В качестве модели для слежения за вектором ξ параметров твердого тела используем систему уравнений

$$\mathbf{y}^{\cdot} = A(\mathbf{y} - \boldsymbol{\omega}) + J_+^{-1}(\mathbf{M} - \boldsymbol{\omega} \times J_+\boldsymbol{\omega}) \tag{3.6}$$

в которой J_+ — матрица инерции тела, вычисленная по оценке η вектора ξ.

Необходимая для формирования алгоритма идентификации (2.10) матрица $\partial\mathbf{f}/\partial\xi \equiv \| 0 \partial\mathbf{f}/\partial\boldsymbol{\tau} \|$, $\boldsymbol{\tau} = \{\tau_1, \tau_2\}$ (0 — нулевая (3×1)-матрица) вычисляется по формулам

$$\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\tau_i} = \frac{\partial J_+^{-1}}{\partial\tau_i}(\mathbf{M} - \boldsymbol{\omega} \times J_+\boldsymbol{\omega}) - J_+^{-1}\left(\boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial J_+}{\partial\tau_i}\boldsymbol{\omega}\right) \quad (i = 1, 2)$$

где при учете (3.2)

$$\frac{\partial C_+}{\partial\tau_i} = \frac{\partial B}{\partial\tau_i} C_* B' + B C_* \frac{\partial B'}{\partial\tau_i}$$

$$(C_+ = J_+, J_+^{-1};\ C_* = J_*, J_*^{-1};\ i = 1, 2)$$

В [3] перманентное вращение твердого тела (3.3) при известном векторе ξ стабилизируется управлением

$$\mathbf{M} = kQ(\xi)\,\boldsymbol{\omega}, \quad k < 0 \tag{3.7}$$

$$Q(\xi) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\beta_{11}\beta_{21} & 1 - \beta_{21}^2 & -\beta_{21}\beta_{31} \\ -\beta_{11}\beta_{31} & -\beta_{21}\beta_{31} & 1 - \beta_{31}^2 \end{Vmatrix}$$

или в координатной форме

$$M_y = k(\omega_y - \beta_{21}(\xi'\boldsymbol{\omega})), \quad M_z = k(\omega_z - \beta_{31}(\xi'\boldsymbol{\omega}))$$

Для решения задачи при неизвестном векторе ξ формируем управляющий момент $\mathbf{M}$ в виде (3.7), заменив в матрице Q вектор ξ его оценкой $\boldsymbol{\eta} = \xi - \boldsymbol{\alpha}$. Полученное таким образом управление запишем в виде

$$\mathbf{M} = kQ(\boldsymbol{\eta})\,\boldsymbol{\omega} = kQ(\xi)(\mathbf{X} + \Omega_*\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{m}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha}) \tag{3.8}$$

где $\mathbf{m}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha})$ — вектор-функция, разложение которой по степеням переменных $\mathbf{X}$ и $\boldsymbol{\alpha}$ начинается с членов не ниже второй степени.

Определим теперь структуру закона идентификации.

Введем обозначения

$$\mathbf{X} = B\mathbf{x}, \quad \mathbf{e} = B\mathbf{e}_*, \quad \boldsymbol{\alpha} = B\boldsymbol{\alpha}_*, \quad \mathbf{m} = B\mathbf{m}_*$$

$$\boldsymbol{\alpha}_* = \{\alpha_i^*\}, \quad \mathbf{m}_* = \{m_i^*\} \quad (i = 1, 2, 3)$$

Систему (1.1), (2.3)—(2.5), первое уравнение в которой имеет вид (3.5), запишем в базисе $x_* y_* z_*$ с учетом управления (3.8)

$$\begin{aligned} J_1 x_1^{\cdot} &= (J_2 - J_3) x_2 x_3 - k[\beta_{11}\beta_{12}(x_2 + \Omega_*\alpha_2^*) + \\ &\quad + \beta_{11}\beta_{13}(x_3 + \Omega_*\alpha_3^*)] + m_1^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}_*) \\ J_2 x_2^{\cdot} &= (J_3 - J_1)(x_1 + \Omega_*) x_3 + k[(1 - \beta_{12}^2)(x_2 + \\ &\quad + \Omega_*\alpha_2^*) - \beta_{12}\beta_{13}(x_3 + \Omega_*\alpha_3^*)] + m_2^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}_*) \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$J_3x_3^{\cdot} = (J_1 - J_2)(x_1 + \Omega_*)x_2 + k[-\beta_{12}\beta_{13}(x_2 + \Omega_*\alpha_2^*) + (1 - \beta_{13}^2)(x_3 + \Omega_*\alpha_3^*)] + m_3^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}_*)$$

$$\mathbf{e}_*^{\cdot} = A_*\mathbf{e}_* + B'(\partial\mathbf{f}/\partial\boldsymbol{\xi})B\alpha_* + \mathbf{h}_*, \quad \boldsymbol{\alpha}_*^{\cdot} = \mathbf{g}_*(\mathbf{x}, \mathbf{e}_*, \boldsymbol{\alpha}_*) \tag{3.10}$$

$$A_* = B'AB, \quad \mathbf{g}_* = \{g_i^*\} = -B'\mathbf{g} \quad (i = 1, 2, 3)$$

Новые переменные Y_1 и Y_2, связанные с переменными x_2, x_3, α_2^*, α_3^* соотношениями

$$Y_1 = x_2 + \Omega_*\alpha_2^*, \quad Y_2 = x_3 + \Omega_*\alpha_3^*$$

позволяют системе уравнений (3.9) придать вид

$$\begin{aligned} J_1x_1^{\cdot} &= (J_2 - J_3)(Y_1 - \Omega_*\alpha_2^*)(Y_2 - \Omega_*\alpha_3^*) - \\ &- k\beta_{11}\beta_{12}Y_1 - k\beta_{11}\beta_{13}Y_2 + m_1^* \\ J_2Y_1^{\cdot} &= (J_3 - J_1)(x_1 + \Omega_*)(Y_2 - \Omega_*\alpha_3^*) + \\ &+ k(1 - \beta_{12}^2)Y_1 - k\beta_{12}\beta_{13}Y_2 + J_2\Omega_*g_2^* + m_2^* \\ J_3Y_2^{\cdot} &= (J_1 - J_2)(x_1 + \Omega_*)(Y_1 - \Omega_*\alpha_2^*) - \\ &- k\beta_{12}\beta_{13}Y_1 + k(1 - \beta_{13}^2)Y_2 + J_3\Omega_*g_3^* + m_3^* \end{aligned} \tag{3.11}$$

Искомую вектор-функцию $\mathbf{g}_*$ определим при помощи функции Ляпунова вида

$$2V = J_2Y_1^2 + J_3Y_2^2 + p\mathbf{e}_*'\mathbf{e}_* + \gamma^{-1}\boldsymbol{\alpha}_*'\boldsymbol{\alpha}_*, \quad p > 0, \quad \gamma > 0 \tag{3.12}$$

Полная производная по времени от V в силу уравнений (3.10), (3.11) определяется выражением

$$\begin{aligned} V^{\cdot} &= k(1 - \beta_{12}^2)Y_1^2 + k(1 - \beta_{13}^2)Y_2^2 + [(J_3 - J_2)(x_1 + \Omega_*) - \\ &- 2k\beta_{12}\beta_{13}]Y_1Y_2 + J_2\Omega_*Y_1g_2^* + J_3\Omega_*Y_2g_3^* + \\ &+ p\mathbf{e}_*'A_*\mathbf{e}_* + \alpha_*'[pB'(\partial\mathbf{f}/\partial\boldsymbol{\xi})'B\mathbf{e}_* + \\ &+ \gamma^{-1}\mathbf{g}_* - \boldsymbol{\Psi}(Y_1, Y_2)] + v(Y_1, Y_2, \boldsymbol{\alpha}_*) \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\boldsymbol{\Psi}(Y_1, Y_2) = \{0, (J_1 - J_2)(x_1 + \Omega_*)\Omega_*Y_2, (J_3 - J_1)(x_1 + \Omega_*)\Omega_*Y_1\}$$

($v(Y_1, Y_2, \boldsymbol{\alpha}_*)$ — вектор-функция, разложение которой по степеням аргументов начинается членами не ниже третьей степени).

Задавая вектор-функцию $\mathbf{g}_*$ соотношением

$$\mathbf{g}_* = -p\gamma B'\left(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\boldsymbol{\xi}}\right)'B\mathbf{e}_* + \gamma\boldsymbol{\Psi}(Y_1, Y_2) \tag{3.14}$$

вместо (3.13) получаем выражение

$$V^{\cdot} = W(Y_1, Y_2, \mathbf{e}_*) + v(Y_1, Y_2, \boldsymbol{\alpha}_*)$$

где W — квадратичная форма относительно переменных Y_1, Y_2, $\mathbf{e}_*$.

Если выбрать весовые коэффициенты в (3.12) таким образом, чтобы $W(Y_1, Y_2, \mathbf{e}_*)$ была определенно-отрицательной функцией указанных аргументов, то в соответствии с результатами разд. 2 управление

$$M_y = k(\omega_y - \eta_2(\boldsymbol{\eta}'\boldsymbol{\omega})), \quad M_z = k(\omega_z - \eta_3(\boldsymbol{\eta}'\boldsymbol{\omega})) \tag{3.15}$$

и алгоритм идентификации (3.14) обеспечивают асимптотическую устойчивость системы (3.10), (3.11) по переменным Y_1, Y_2, $\mathbf{e}_*$, $\boldsymbol{\alpha}_*$. При этом правая часть первого уравнения системы (3.11) стремится к нулю при $t \to \infty$ и, следовательно, $x_1 \to c = \text{const}$. Перманентное вращение (3.3) твердого тела устойчиво в смысле Ляпунова.

Необходимо теперь алгоритм идентификации (3.14) записать в исходном базисе xyz. Положив для простоты выкладок $J_2 = J_3 = J_0$ и выполнив необходимые преобразования, уравнения процесса идентификации приводим к виду

$$\left\|\begin{matrix}\eta_2^{\cdot}\\ \eta_3^{\cdot}\end{matrix}\right\| = p\gamma\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tau}\right)'(\boldsymbol{\omega}-\mathbf{y}) - \gamma(J_0 - J_1)\Omega_*\xi'\boldsymbol{\omega}D(\mathbf{X}+\Omega_*\boldsymbol{\alpha}) \qquad (3.16)$$

$$D = \left\|\begin{matrix}\beta_{31} & 0 & -\beta_{11}\\ -\beta_{21} & \beta_{11} & 0\end{matrix}\right\|, \quad \eta_1 = (1-\eta_2^2-\eta_3^2)^{1/2}$$

Аппроксимируем второе слагаемое в уравнении (3.16) соотношением

$$\mathbf{F} = \gamma(J_0 - J_1)\Omega_*\boldsymbol{\eta}'\boldsymbol{\omega}\left\|\begin{matrix}\eta_3 & 0 & -\eta_1\\ -\eta_2 & \eta_1 & 0\end{matrix}\right\|(\boldsymbol{\omega}-\Omega_*\boldsymbol{\eta}) \qquad (3.17)$$

Возникающая при этом погрешность разлагается в ряд по степеням $\boldsymbol{\alpha}$ и $\mathbf{X}$, начиная с квадратичных членов.

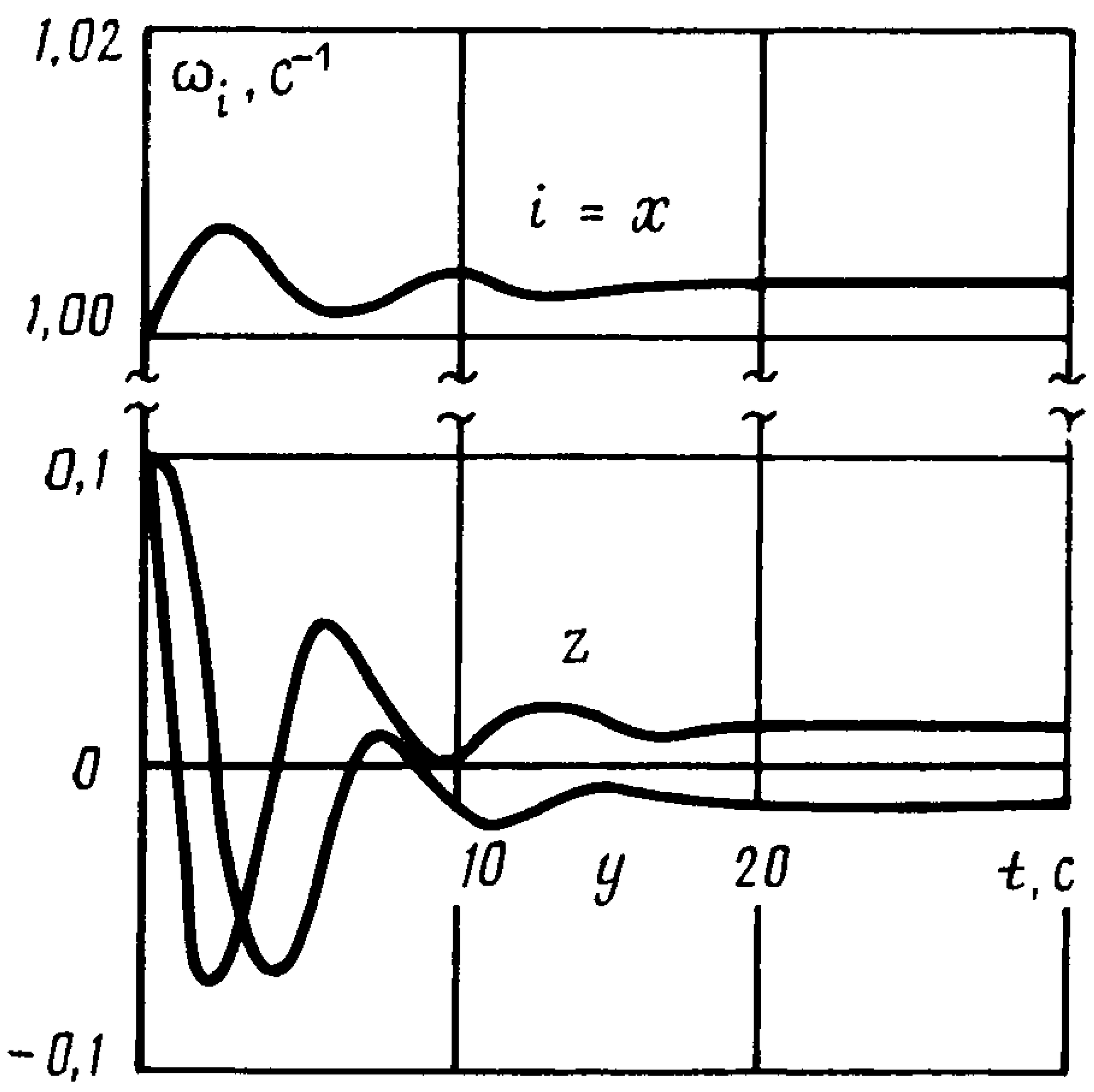
При малом рассогласовании между осями x и x_* выражение для $\mathbf{F}$ упрощается:

$$\mathbf{F} \simeq \gamma(J_0 - J_1)\Omega_*^2\left\|\begin{matrix}-(\omega_z-\Omega_*\eta_3)\\ \omega_y-\Omega_*\eta_2\end{matrix}\right\|$$

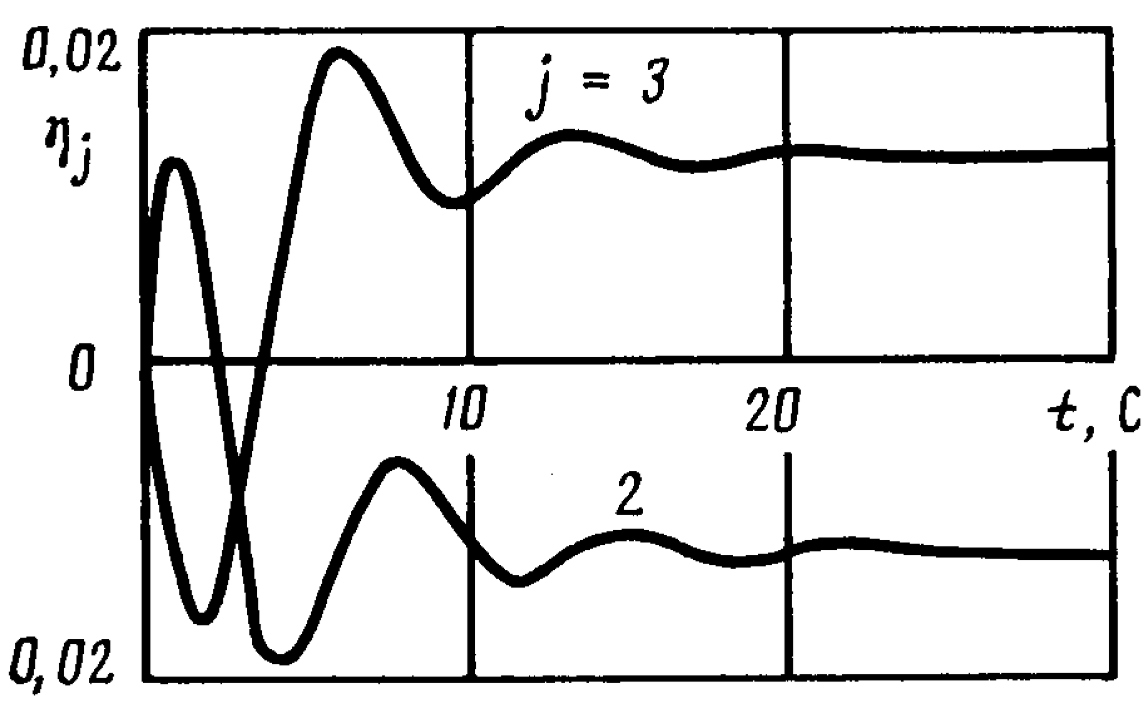
4. Пример. Для твердого тела с параметрами эллипсоида инерции

$$J_1 = 0{,}1\cdot 10^n, \quad J_2 = J_3 = 10^n \ (\text{кгм}^2)$$

(n — произвольное целое число) и ортом $\xi = \{0{,}999848, -0{,}012338, 0{,}012338\}$ главной оси инерции x_* на фиг. 1 можно проследить характер изменения угловых скоростей ω_x, ω_y, ω_z в процессе стабилизации его перманентного вращения (3.3) ($\Omega = 1\ \text{с}^{-1}$) по алгоритму управления (3.15) и закону идентификации (3.16)—(3.17).



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 2 иллюстрирует динамику процесса идентификации орта ξ. Поскольку в момент начала управляемого движения ничего не известно о векторе $\eta = \{\eta_i\}$ ($i = 1, 2, 3$), он задавался в виде $\eta(0) = \{1, 0, 0\}$.

Моделирование проводилось при следующих значениях входящих в (3.15)—(3.17) параметров: $k = -0{,}3\cdot 10^n$ Нмс, $p = 25\cdot 10^n$ кгм², $\gamma^{-1} = 5\cdot 10^n$ кгм²с⁻².

ЛИТЕРАТУРА

1. *Серегин В. Н.* Синтез асимптотически устойчивого алгоритма идентификации нелинейной нестационарной системы прямым методом Ляпунова // Автоматика и телемеханика. 1978. № 4. С. 28—32.
2. *Фурасов В. Д.* Устойчивость движения, оценки и стабилизация. М.: Наука, 1977. 247 с.
3. *Лебедев Д. В.* Об управлении движением вокруг центра масс вращающегося твердого тела // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 1. С. 18—25.
4. *Ковалев А. М.* Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем. Киев: Наук. думка, 1980. 174 с.
5. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
6. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.

Киев

Поступила в редакцию
12.II.1990