Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 6, 1990

УДК 531.36 : 534.1

А. А. Зевин, Л. А. Филоненко

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ОТТАЛКИВАЮЩЕЙ ПОЗИЦИОННОЙ СИЛОЙ

Рассматриваются нелинейные системы с одной степенью свободы, у которых позиционная сила направлена в сторону отклонения системы от положения равновесия. Исследуется существование вынужденных периодических колебаний, их устойчивость по Ляпунову, поведение амплитудно-частотных характеристик. Обнаружено, что в случае немонотонной характеристики позиционной силы возможны устойчивые периодические колебания. В качестве примера рассмотрим вынужденные колебания маятника относительно верхнего положения равновесия.

Системы с отталкивающими позиционными силами, по-видимому, ранее не рассматривались в литературе. Известные аналитические методы нелинейной механики ([1, 2] и др.), основанные на предположении о близости исследуемых решений к решениям соответствующей автономной системы, неприменимы к таким системам ввиду отсутствия периодических порождающих решений. В данной работе выполнено качественное исследование указанных систем, при котором свойства рассматриваемых решений устанавливаются непосредственно по виду вынуждающей силы и характеристике позиционной силы.

1. Рассмотрим систему

$$x^{\cdot\cdot} + f(x) + \varepsilon p(\omega t) = 0 \tag{1.1}$$
$$p(\omega t) = -p(-\omega t) = p(\omega t + 2\pi)$$
$$f(x) = -f(-x),\ f(x)x < 0 \text{ при } x \neq 0$$

В силу последнего условия позиционная сила всегда направлена в сторону отклонения системы, т. е. является отталкивающей [3]. В соответствующей автономной системе ($\varepsilon = 0$) периодические колебания невозможны; $x = 0$ — неустойчивое положение равновесия. Будем рассматривать нечетные периодические колебания относительно этого положения с периодом $2T = 2\pi/\omega$, равным периоду вынуждающей силы ($x(t, \varepsilon) = -x(-t, \varepsilon) = x(t + 2T, \varepsilon)$, $x(t, \varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$).

Так как

$$x(0, \varepsilon) = x(T, \varepsilon) = 0 \tag{1.2}$$

то очевидно, что любое решение краевой задачи (1.1), (1.2), продолженное по t в соответствии с уравнением (1.1), нечетно и $2T$-периодично, т. е. принадлежит к рассматриваемому типу.

Как известно, решение задачи (1.1), (1.2) единственным образом продолжимо по ε, если соответствующая краевая задача для уравнения в вариациях

$$y^{\cdot\cdot} + a(t, \varepsilon)y = 0,\ y(0) = y(T) = 0,\ a(t, \varepsilon) = f_x(x(t, \varepsilon)) \tag{1.3}$$

имеет только тривиальное решение.

В силу условий (1.1) $f_x(x) < 0$ при малых x, поэтому $a(t, \varepsilon) < 0$ при малых ε. При этом любое решение $y(t)$ уравнения (1.3) имеет на $(0, \infty)$ не более одного нуля [4], следовательно, указанное условие продолжимости $x(t, \varepsilon)$ выполняется. Таким образом, при малых ε уравнение (1.1) имеет единственное (в силу единственности продолжения $x(t, \varepsilon)$)

периодическое решение рассматриваемого вида. Если характеристика позиционной силы монотонна ($f_x(x) < 0$ для всех x), то решение $x(t, \varepsilon)$ существует и единственно при любом ε.

Если функция $f(x)$ немонотонна, то функция $a(t, \varepsilon)$, начиная с некоторого ε, становится знакопеременной. Здесь условие продолжимости $x(t, \varepsilon)$ может нарушиться при некотором $\varepsilon = \varepsilon_*$, при этом в задаче (1.3) появляется положительное на $(0, T)$ решение $y(t, \varepsilon_*)$. Дальнейшее продолжение $x(t, \varepsilon)$ по ε, вообще говоря, невозможно.

Покажем, что если

$$p(\omega t) \geqslant 0 \text{ на } (0, T) \tag{1.4}$$

то $x(t, \varepsilon)$ возрастает по ε на $(0, T)$.

Функция $x_\varepsilon(t, \varepsilon) = \partial x(t, \varepsilon)/\partial\varepsilon$ удовлетворяет уравнению, полученному дифференцированием (1.1) по параметру ε:

$$y^{\cdot\cdot} + a(t, \varepsilon)y + p(\omega t) = 0 \tag{1.5}$$

В силу (1.2)

$$x_\varepsilon(0, \varepsilon) = x_\varepsilon(T, \varepsilon) = 0 \tag{1.6}$$

Решение краевой задачи (1.5), (1.6) можно выразить при помощи соответствующей функции Грина $\Gamma(t, s, \varepsilon)$:

$$y(t, \varepsilon) = -\int_0^T \Gamma(t, s, \varepsilon)\, p(\omega s)\, ds \tag{1.7}$$

$$\Gamma(t, s, \varepsilon) = -\frac{y(T, s, \varepsilon)\, y(t, 0, \varepsilon)}{y(T, 0, \varepsilon)} + \delta, \quad \delta = \begin{cases} 0, & t < s \\ y(t, s, \varepsilon), & t > s \end{cases}$$

где $y(t, s, \varepsilon)$ — решение уравнения (1.3), удовлетворяющее условиям $y(t, t, \varepsilon) = 0$, $y^{\cdot}(t, t, \varepsilon) = 1$.

Так как при $\varepsilon < \varepsilon_*$ функция $y(t, 0, \varepsilon)$ не имеет нулей на $(0, T]$, то $\Gamma(t, s, \varepsilon) < 0$ при $t, s \in (0, T)$. Следовательно, $x_\varepsilon(t, \varepsilon) > 0$, т. е. $x(t, \varepsilon)$ возрастает по ε на $(0, T)$. Отсюда, в частности, следует, что при условии (1.4) $x(t, \varepsilon) > 0$ на $(0, T)$.

Пусть $\max_t x(t, \varepsilon) = x(t_1, \varepsilon) = A(\varepsilon)$. Так как в этой точке $x^{\cdot\cdot}(t_1, \varepsilon) \leqslant \leqslant 0$, то в силу (1.1) $f(A(\varepsilon)) + \varepsilon p(\omega t_1) \geqslant 0$. Можно показать, что если $\min f(x) < -\varepsilon \max p(\omega t) = -\varepsilon p_0$, то $A(\varepsilon) < A_0(\varepsilon)$, где $A_0(\varepsilon)$ — первый корень уравнения $f(x) = -\varepsilon p_0$. Физически это означает, что амплитуда рассматриваемых колебаний $A(\varepsilon)$ не превосходит отклонения $A_0(\varepsilon)$ системы от положения равновесия при действии постоянной силы εp_0.

2. Устойчивость рассматриваемого решения определяется соответствующим уравнением в вариациях

$$y^{\cdot\cdot} + a(t, \varepsilon)y = 0, \quad a(t, \varepsilon) = a(t + 2T, \varepsilon) \tag{2.1}$$

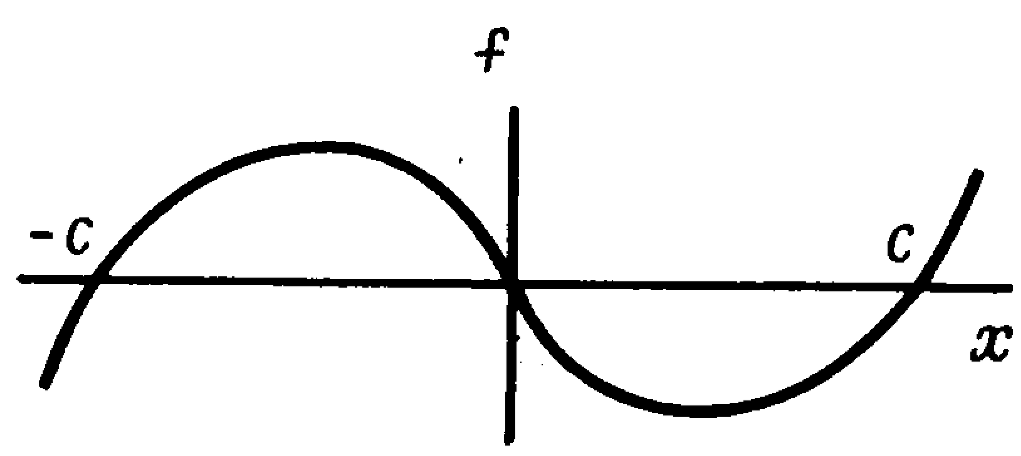
Как показано выше, $a(t, \varepsilon) < 0$ при малых ε, следовательно, уравнение (2.1) и соответствующее решение $x(t, \varepsilon)$ неустойчиво [4]. Очевидно, что если $f(x)$ монотонно убывает при всех x, то решение $x(t, \varepsilon)$ неустойчиво при любых ε. Таким образом, в системе с монотонной отталкивающей характеристикой позиционной силы периодические колебания не могут быть физически реализованы.

Если функция $f(x)$ немонотонна, то при достаточно больших ε функция $a(t, \varepsilon)$ положительна на некоторых интервалах. Как показано ниже, это может привести к устойчивости уравнения (2.1) и, следовательно, устойчивости $x(t, \varepsilon)$ в первом приближении. Наличие в реальной системе малых диссипативных сил, не учтенных в уравнении (1.1), приводит к асимптотической устойчивости такого решения [5].

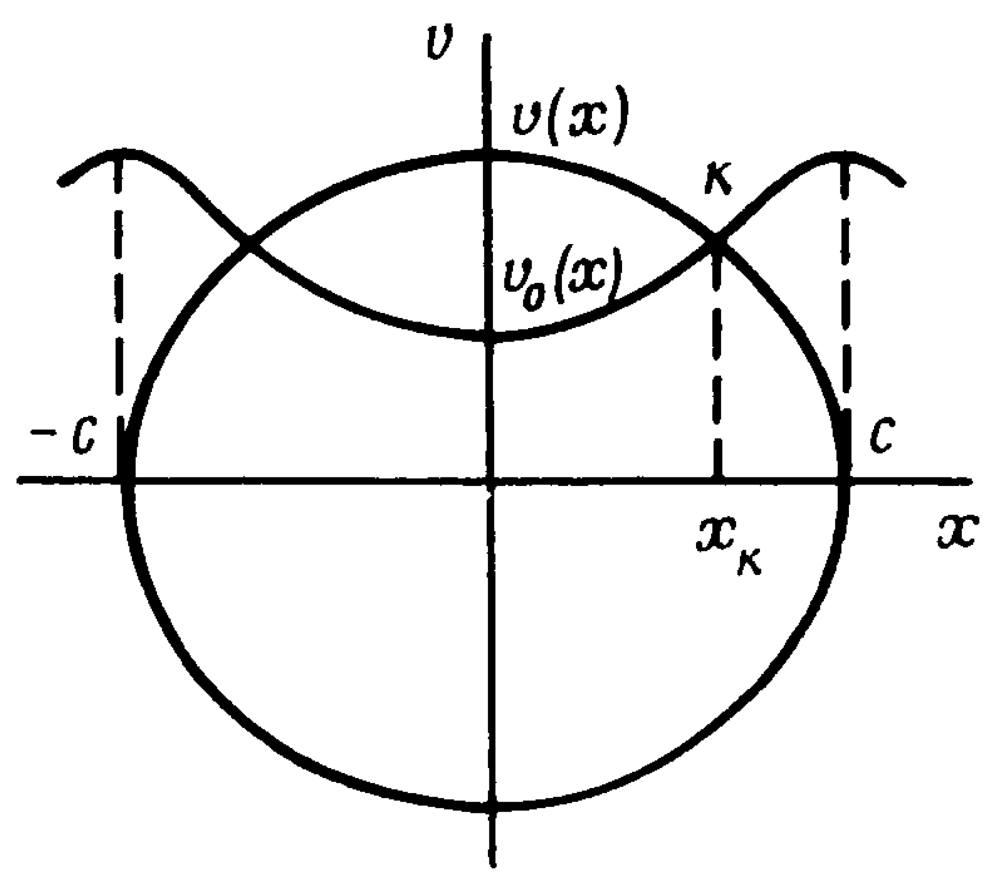
В приложениях встречаются системы, в которых позиционная сила является отталкивающей при малых и восстанавливающей при больших x (фиг. 1; такую характеристику имеют системы с прощелкиванием, например, ферма Мизеса). Здесь при $\varepsilon = 0$ наряду с неустойчивым ($x = 0$) имеются два устойчивых ($x = c$ и $x = -c$) положения равновесия.

Полагаем, что функция $f(x)$ выпукла при $x > 0$, $p(\omega t)$ удовлетворяет условию (1.4). Исследуем смену устойчивости $x(t, \varepsilon)$ при возрастании параметра ε.

Так как $x(t, \varepsilon)$ возрастает по ε на $(0, T)$, то в силу выпуклости $f(x)$ коэффициент $a(t, \varepsilon)$ также возрастает. При предельном значении $\varepsilon = \varepsilon_*$ краевая задача (1.3), как отмечалось выше, имеет положительное на $(0, T)$ решение $y(t, \varepsilon_*)$. Таким образом, при $\varepsilon = \varepsilon_*$ уравнение (2.1) имеет $2T$-периодическое решение $y(t, \varepsilon_*)$ с двумя нулями ($t = 0$ и $t = T$) на периоде. Из теории уравнения Хилла известно [4], что именно такой вид имеет решение на границах второй области неустойчивости. Следовательно, при возрастании ε от нуля до ε_* система (2.1) последовательно проходит нулевую область неустойчивости ($0 < \varepsilon < \varepsilon_1$), нулевую область устойчивости ($\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$), первую область неустойчивости ($\varepsilon_2 < \varepsilon < \varepsilon_3$), первую область устойчивости ($\varepsilon_3 < \varepsilon < \varepsilon_4$) и, возможно, вторую область неустойчивости (если $\varepsilon_4 < \varepsilon_*$, т. е. если ε_* отвечает второй границе указанной области).



Фиг. 1



Фиг. 2

Покажем, что нижней границе нулевой области устойчивости отвечает решение $x(t, \varepsilon)$ с амплитудой $A < c$.

Если предельная амплитуда $A_* = \max_t x(t, \varepsilon_*) < c$, то приведенное утверждение очевидно. Предположим, что $A_* > c$, тогда $x(t_1, \varepsilon') = A(\varepsilon') = c$ при некоторых $t_1 \in (0, T)$ и $\varepsilon' < \varepsilon_*$. Пусть $x_0(t, x_0^{\boldsymbol{\cdot}})$ ($x_0(t, x_0^{\boldsymbol{\cdot}}) = 0$, $x_0^{\boldsymbol{\cdot}}(0, x_0^{\boldsymbol{\cdot}}) = x_0^{\boldsymbol{\cdot}}$) — решение уравнения

$$x^{\boldsymbol{\cdot\cdot}} + f(x) = 0 \qquad (2.2)$$

Так как $x = x^{\boldsymbol{\cdot}} = 0$ — особая точка уравнения (2.2), то $x_0(t_1, x_0^{\boldsymbol{\cdot}}) \to 0$ при $x_0^{\boldsymbol{\cdot}} \to 0$; очевидно, что $x_0(t_1, x_0^{\boldsymbol{\cdot}}) \to \infty$ при $x_0^{\boldsymbol{\cdot}} \to \infty$. Поэтому найдется такое $x_0^{\boldsymbol{\cdot}}$, что $x_0(t_1, x_0^{\boldsymbol{\cdot}}) = c$. Соответствующая фазовая траектория $v_0(x)$ пересекает фазовую траекторию $v(x)$ решения $x(t, \varepsilon')$ при некотором $x = x_K$ (иначе равенство $x_0(t_1, x_0^{\boldsymbol{\cdot}}) = x(t_1, \varepsilon') = c$ не имело бы места).

Функции $v_0(x)$ и $v(x)$ удовлетворяют уравнениям

$$dv/dx = -v^{-1}f(x), \quad dv/dx = -v^{-1}(f(x) + P(x)), \ P(x) = p(\omega t(x)) \quad (2.3)$$

где $t(x)$ — функция, обратная $x(t)$ $(t \in (0, t_1))$.

Так как $P(x) \geqslant 0$ в силу (1.4), то в соответствии с теоремой Чаплыгина о дифференциальных неравенствах $v(x) \geqslant v_0(x)$ на $(0, x_k)$, $v(x) \leqslant v_0(x)$ на (x_k, c) (фиг. 2). Следовательно, $x(t, \varepsilon') > x_0(t, x_0^{\cdot})$ на $(0, t_1)$, $a(t, \varepsilon) > a_0(t) = f_x(x_0(t, x_0^{\cdot}))$ в силу выпуклости $f(x)$. Ввиду автономности (2.2) $x_0^{\cdot}(t, x_0^{\cdot})$ удовлетворяет соответствующему уравнению в вариациях, т. е. при $a = a_0(t)$ уравнение (2.1) имеет решение $y(t) = x_0^{\cdot}(t, x_0^{\cdot})$, причем $y^{\cdot}(0) = x_0^{\cdot\cdot}(0, x_0^{\cdot}) = -f(0) = y^{\cdot}(t_1) = -f(c) = 0$, $y(t) > 0$ на $(0, t_1)$.

Совершенно аналогично показывается, что найдется такое решение $x_1(t)$ уравнения (2.2), что $x_1(t_1) = c$, $x_1(T) = 0$; соответствующий коэффициент $a_1(t) = f_x(x_1(t)) < a(t, \varepsilon)$ на (t_1, T); уравнение (2.1) при $a = a_1(t)$ имеет решение $y(t) = -x_1^{\cdot}(t)$, поэтому $y^{\cdot}(t_1) = y^{\cdot}(T) = 0$, $y(t) > 0$ на (t_1, T).

Положим в (2.1) $a = \Delta(t)$, где $\Delta(t) = a_0(t)$, на $[0, t_1]$, $\Delta(t) = a_1(t)$ на $(t_1, T]$, $\Delta(t) = \Delta(2T - t)$, $\Delta(t) = \Delta(t + 2T)$. Пусть $y(t)$ — решение (2.1) при $a = \Delta(t)$, причем $y^{\cdot}(t_1) = 0$, $y(t_1) > 0$. Из полученных результатов следует, что $y^{\cdot}(0) = y^{\cdot}(T) = 0$, $y(t) > 0$ на $[0, T]$, $y(t) = y(2T - t) = y(t + 2T)$, т. е. уравнение (2.1) при $a = \Delta(t)$ имеет неколебательное $2T$-периодическое решение $y(t)$.

Так как $a(t, \varepsilon') > \Delta(t)$, то уравнение (2.1) при $\varepsilon = \varepsilon'$ колебательно [4] (т. е. число нулей любого решения $y(t)$ на $(0, l)$ неограниченно возрастает при $l \to \infty$); следовательно, нижняя граница нулевой области устойчивости $\varepsilon_1 < \varepsilon'$. Поэтому при $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon'')$, где $\varepsilon'' = \min(\varepsilon_2, \varepsilon')$ решения $x(t, \varepsilon)$ устойчивы, причем соответствующие амплитуды $A(\varepsilon) < c$. Из последнего неравенства следует, что устойчивые периодические колебания возможны и в системе с отталкивающей при всех x позиционной силой, если только функция $f(x)$ немонотонна.

Предположим, что вынуждающая сила наряду с (1.1), (1.4) удовлетворяет также условию

$$p(\omega t) = -p(\omega t + \pi) \quad (2.4)$$

Заметим, что в приложениях обычно $p(\omega t) = p_0 \sin \omega t$, т. е. соотношение (2.4) выполняется.

Так как при условии (2.4) уравнению (1.1) удовлетворяет кроме $x(t, \varepsilon)$ также функция $-x(t + T, \varepsilon)$, то в силу единственности рассматриваемого решения $x(t, \varepsilon) = -x(t + T, \varepsilon)$. Учитывая нечетность $f(x)$, найдем, что $a(t, \varepsilon) = a(t + T, \varepsilon)$, т. е. минимальный период $a(t, \varepsilon)$ равен T. Как отмечено выше, при $\varepsilon = \varepsilon_*$ уравнение (2.1) имеет решение с периодом $2T$, поэтому оно отвечает границе нулевой области неустойчивости. Следовательно, при условии (2.4) существует только один интервал устойчивости $(\varepsilon_1, \varepsilon_4 \leqslant \varepsilon_*)$.

Предположим дополнительно, что

$$p^{\cdot}(\omega t) \geqslant 0 \text{ на } (0, T/2) \quad (2.5)$$

т. е. вынуждающая сила монотонно изменяется между экстремальными значениями (в частности, $p(\omega t) = p_0 \sin \omega t$).

Такому же условию удовлетворяет и соответствующее решение $x(t, \varepsilon)$, т. е. $x^{\cdot}(t, \varepsilon) > 0$ на $(0, T/2)$.

Действительно, дифференцируя (1.1), найдем, что функция $x^{\cdot}(t, \varepsilon) = v(t, \varepsilon)$ служит решением краевой задачи

$$v^{\cdot\cdot} + a(t, \varepsilon) v + \varepsilon p^{\cdot}(\omega t) = 0, \quad v(-T/2, \varepsilon) = v(T/2, \varepsilon) = 0 \tag{2.6}$$

При малых ε решение уравнения (2.1) $y(t, -T/2, \varepsilon)$ ($y = 0$, $y^{\cdot} > 0$ при $t = -T/2$) положительно на $(-T/2, T/2)$ в силу $a(t, \varepsilon) < 0$. При возрастании ε на $(0, \varepsilon_*]$ равенство $y(T/2, -T/2, \varepsilon) = 0$ невозможно, так как при этом решение $v(t, \varepsilon)$ уравнения (2.6) не существовало бы (функции $p^{\cdot}(\omega t)$ и $y(t, -T/2, \varepsilon)$ положительны на $(-T/2, T/2)$ и поэтому неортогональны). Следовательно, $y(t, -T/2, \varepsilon) > 0$, функция Грина задачи (2.6) $\Gamma(t, s) < 0$ на $(-T/2, T/2)$. Представив решение (2.6) аналогично (1.7), найдем, что $v(t, \varepsilon) > 0$ на $(-T/2, T/2)$, т. е. координата $x(t, \varepsilon)$ монотонно изменяется между экстремальными значениями $x(-T/2, \varepsilon) = -A(\varepsilon)$ и $x(T/2, \varepsilon) = A(\varepsilon)$.

Так как $a(t, \varepsilon) = a(-t, \varepsilon)$, то на границах первой области неустойчивости уравнения (2.1) периодические решения четны либо нечетны. Очевидно, что четные решения удовлетворяют условию $y(-T/2) = y(T/2) = 0$. По доказанному выше при $\varepsilon = (0, \varepsilon_*]$ такие решения отсутствуют; следовательно, при $\varepsilon = \varepsilon_4$ уравнение (2.1) имеет нечетное $2T$-периодическое решение. Так как последнее удовлетворяет условиям (1.3), то $\varepsilon_4 = \varepsilon_*$.

Таким образом, при условии (2.5) граница устойчивости семейства $x(t, \varepsilon)$ совпадает с границей его существования.

3. Считая параметр ε фиксированным, а условия (2.4), (2.5) выполненными, исследуем поведение амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) $A(\omega)$ рассматриваемого решения. Положим $\tau = \omega t$, тогда уравнение (1.1) принимает вид

$$\omega^2 x'' + f(x) + \varepsilon p(\tau) = 0 \tag{3.1}$$

где штрих означает дифференцирование по τ.

Пусть $x(\tau, A, \omega)$ — решение уравнения (3.1), удовлетворяющее условиям $x = A$, $x' = 0$ при $\tau = \pi/2$. Если при некоторых A, ω

$$x(\pi, A, \omega) = 0 \tag{3.2}$$

то соответствующее решение $x(\tau, A, \omega)$ принадлежит к рассматриваемому типу. Таким образом, соотношение (3.2) неявным образом определяет $A(\omega)$. Поэтому

$$dA/d\omega = -x_\omega/x_A \tag{3.3}$$

Как известно, функция $y(\tau) = x_A(\tau, A, \omega)$ — решение соответствующего уравнения в вариациях

$$\omega^2 y'' + a(\tau) y = 0 \tag{3.4}$$

причем $y(\pi/2) = 1$, $y'(\pi/2) = 0$. Так как $a(\tau) = a(-\tau)$, то $y(\tau) = y(-\tau)$. Выше показано, что при $\varepsilon < \varepsilon_*$ любое решение уравнения (1.3) имеет на $[0, T]$ не более одного нуля, следовательно, $y(\tau) > 0$ на $[\pi/2, \pi]$, поэтому $x_A > 0$.

Функция $x_\omega(\tau, A, \omega)$ удовлетворяет уравнению, полученному дифференцированием (3.1) по параметру ω:

$$\omega^2 y'' + a(\tau) y = -2\omega x'' \tag{3.5}$$

причем $x_\omega(\pi/2, A, \omega) = x_\omega'(\pi/2, A, \omega) = 0$, так как $x(\pi/2, A, \omega) = A$, $x'(\pi/2, A, \omega) = 0$. Поэтому аналогично [5] найдем

$$x_\omega = -\frac{2}{\omega}\int_{\pi/2}^{\pi} x''(s)\, y(\pi, s)\, ds = \frac{2}{\omega}\left[\int_{\pi/2}^{\pi} x'(s)\, y_s(\pi, s)\, ds - x'(s)\, y(\pi, s)\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right] \tag{3.6}$$

где $y(\tau, s)$ и $y_s(\tau, s)$ — решения уравнения (3.4), причем $y(s, s) = 0$, $y'(s, s) = 1$, $y_s(s, s) = -1$, $y_s'(s, s) = 0$.

Так как $x'(\pi/2) = 0$, $y(\pi, \pi) = 0$, то внеинтегральный член в (3.6) равен нулю. Как показано выше, $x^{\cdot}(t) > 0$ на $(0, T/2)$, поэтому $x'(\tau) < 0$ на $(\pi/2, \pi)$. В силу выпуклости $f(x)$ имеем $a(\tau) > a(z)$ при $\tau < z$ $(\tau, z \in \in (\pi/2, \pi))$. Так как при возрастании $a(\tau)$ расстояния между соседними нулями решений $y(\tau)$ уменьшаются [6], а по доказанному выше, $y_s(s, \pi/2) < < 0$ на $[\pi/2, \pi]$, то и подавно $y_s(\pi, s) < 0$ при $s \in (\pi/2, \pi)$. Поэтому из (3.6) и (3.3) найдем $x_\omega > 0$, $dA/d\omega < 0$. Таким образом, АЧХ рассматриваемого решения $A(\omega)$ монотонно убывает. Можно показать, что $A(\omega) \to 0$ при $\omega \to \infty$ (поэтому при достаточно больших ω рассматриваемое решение неустойчиво).

Если $\min f(x) < -\varepsilon p_0$, то, как показано выше, $A(\omega) < A_0$ (в силу (2.4) и (2.5) $p_0 = \max p(\omega t) = p(\pi/2)$, поэтому A_0 — первый корень уравнения $f(x) = -\varepsilon p(\pi/2)$). При этом $a(t) < 0$, задача (1.3) имеет только тривиальное решение, в результате семейство $x(t, \omega)$ продолжимо по ω до $\omega = 0$; очевидно, что $A(\omega) \to A_0$ при $\omega \to 0$. В силу $a(t) < 0$ решение $x(t, \omega)$ неустойчиво при всех ω.

Если $\min f(x) > -\varepsilon p_0$, то при малых ω рассматриваемые решения отсутствуют. Действительно, если существует конечный предел $A(\omega)$ при $\omega \to 0$, то $x^{\cdot\cdot}(T/2) \to 0$, $f(A) \to -\varepsilon p_0$ при $\omega \to 0$, что, однако, невозможно в силу неравенства $f(A) > -\varepsilon p_0$. Как показано в [7], период решений $x(t)$ уравнения (1.1), сохраняющих знак на полупериоде, удовлетворяет неравенству $T(A) < T_-(A)$, где $T_-(A)$ — период свободных колебаний системы $x^{\cdot\cdot} + f(x) - p_0 \operatorname{sgn} x = 0$, имеющих одинаковую с $x(t)$ амплитуду A. Так как $\lim T_-(A) = 2\pi/k$, $k^2 = \lim f(x)/x$ при $x \to \infty$ [8], $k > 0$ в силу выпуклости $f(x)$, то существование бесконечного предела $A(\omega)$ при $\omega \to 0$ также исключается. Поэтому семейство $x(t, \omega)$ продолжимо по ω до некоторого значения $\omega_* > 0$; соответствующая задача (1.3) имеет положительное на $(0, T)$ решение. Так как при этом $x_A = y(\pi, \pi/2) = 0$, то $dA/d\omega \to -\infty$ при $\omega \to \omega_*$.

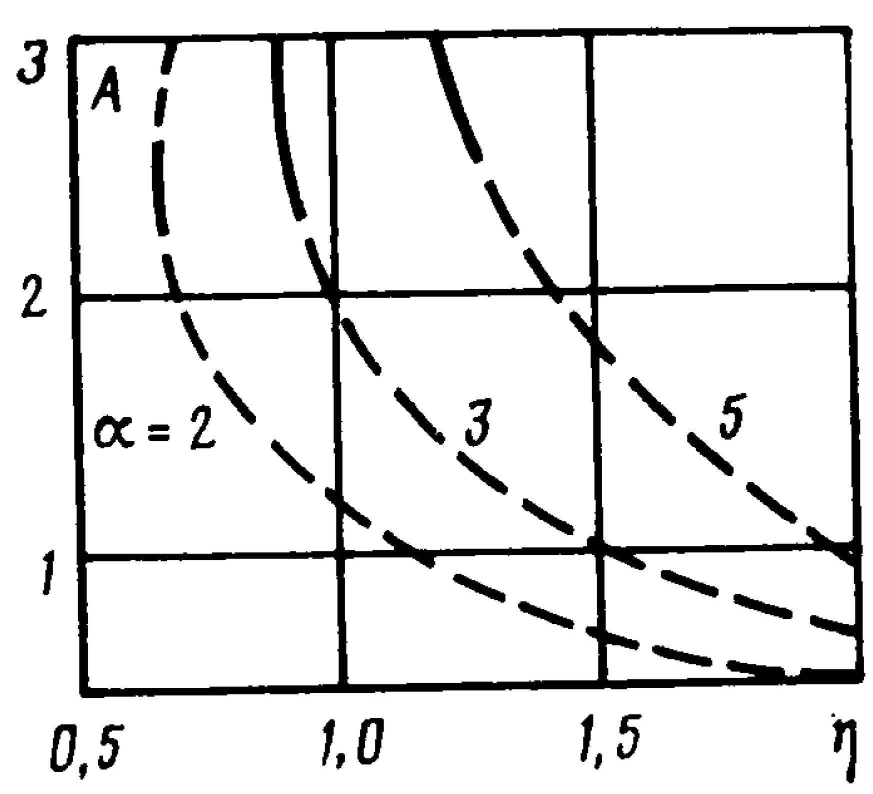
Ясно, что для некоторого частотного интервала (ω_*, ω_y) соответствующее уравнение в вариациях (2.1) колебательно, причем $y(t, 0) > 0$ на $(0, T]$. Из приведенных выше соображений следует, что при $\omega \in \in (\omega_*, \omega_y)$ решение $x(t, \omega)$ устойчиво.

4. Рассмотрим в качестве примера вынужденные колебания маятника относительно верхнего положения равновесия. Соответствующее уравнение имеет вид

$$ml^2 x^{\cdot\cdot} - mgl \sin x + \varepsilon \sin \omega t = 0 \qquad (4.1)$$

где x — угловая координата, отсчитываемая от верхнего положения, m — масса, l — длина маятника, g — ускорение силы тяжести.

При $|x| < \pi$ для системы (4.1) выполняются условия (1.1), (2.4), (2.5). Из полученных выше результатов следует, что рассматриваемое решение $x(t, \varepsilon)$ удовлетворяет соотношениям $x(t, \varepsilon) = -x(t + T, \varepsilon)$, $x(t, \varepsilon) > 0$ на $(0, T)$. АЧХ $A(\omega)$ монотонно убывает.



Фиг. 3

При $\varepsilon < mgl$ решение $x(t, \varepsilon)$ существует при любом ω, причем $A(\omega) \to A_0 = \arcsin \varepsilon/(mgl)$ при $\omega \to 0$. При $\varepsilon > mgl$ существует такое значение ω_*, что $A(\omega_*) = = \pi$ либо $A(\omega_*) < \pi$, $dA/d\omega \to -\infty$ при $\omega \to \omega_*$. В обоих случаях некоторому частотному интервалу (ω_*, ω_y) отвечают устойчивые решения. Их амплитуды превосходят $\pi/2$, так как любое решение с амплитудой $A < \pi/2$ неустойчиво (здесь $a(t) < 0$).

На фиг. 3 приведены АЧХ $A(\eta)$ ($\eta = \omega/\omega_0$, $\omega_0 = (g/l)^{1/2}$), полученные численными методами для различных значений параметра $\alpha = \varepsilon/(mgl)$. Сплошным линиям отвечают устойчивые, штриховым — неустойчивые решения. Как видно, с увеличением α длина интервала (ω_*, ω_y), отвечающего устойчивым решениям с амплитудами $A < \pi$, увеличивается. Поведение амплитуд рассматриваемых решений в зависимости от безразмерной частоты η и параметра α, характеризующего величину вынуждающей силы, полностью согласуется с установленными выше теоретическими результатами.

Как видно из фиг. 3, при достаточно малых α ($\alpha < \alpha_* \approx 3$) в некотором частотном интервале существует второе решение $x_2(t, \varepsilon)$ рассматриваемого типа с амплитудой $A_2 < \pi$, совпадающее с $x(t, \varepsilon)$ при $\omega = \omega_*$. Решение $x_2(t, \varepsilon)$ неустойчиво; в отличие от $x(t, \varepsilon)$ его амплитуда возрастает по ω и убывает по ε.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
2. *Волосов В. М.*, *Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
3. Вибрации в технике: Справочник: В 6 т. Т. 2. Колебания нелинейных механических систем. М.: Машиностроение, 1979. 351 с.
4. *Якубович В. А.*, *Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 718 с.
5. *Зевин А. А.* Устойчивость периодических колебаний в системах с мягкой и жесткой нелинейностью // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 4. С. 640—649.
6. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
7. *Зевин А. А.* Исследование амплитудно-частотных характеристик гармонических колебаний в нелинейных системах второго порядка при силовом и параметрическом возбуждении // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 4. С. 29—38.
8. *Рейссиг Р.*, *Сансоне Г.*, *Конти Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1974. 318 с.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
28.VII.1989