Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 6, 1990

УДК 531.36

С. Д. Фурта

О ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОЙ КОЛОННЫ

При помощи второго метода Ляпунова исследуется устойчивость прямолинейных равновесных форм нелинейно упругого тонкого стержня (колонны), подвергающегося торцевому сжатию. Устойчивость понимается относительно некоторых интегральных характеристик типа норм в пространствах С. Л. Соболева и исследуется для всех значений параметра задачи, кроме бифуркационных.

Круг задач, связанных с теоремой Лагранжа — Дирихле об устойчивости равновесия и ее обращением, в бесконечномерном случае имеет специфические сложности: устойчивость в бесконечномерных системах исследуется относительно некоторых интегральных характеристик типа норм [1], произвол в выборе которых может привести к разным результатам об устойчивости. С другой стороны, для этих задач характерны все трудности, встречающиеся в случае конечного числа степеней свободы.

Рассмотрим некоторую натуральную механическую систему с конечным числом степеней свободы. Если первая нетривиальная форма разложения потенциальной энергии положительно определена, то положение равновесия устойчиво. Аналогичное утверждение доказано и для бесконечномерного случая [1—3] при помощи прямого метода Ляпунова, и в качестве функции Ляпунова можно взять полную энергию.

Сложнее дело обстоит с неустойчивостью. Если в конечномерном случае первая нетривиальная форма разложения потенциальной энергии может принимать отрицательные значения, то в ряде случаев неустойчивость можно показать при помощи функции Четаева, предложенной в [4]. Доказана [1] общая теорема о неустойчивости для бесконечномерных систем, использующая аналог данной функции Четаева. Такие функции применялись [5, 6] и для доказательства неустойчивости равновесия конкретных линейных систем с бесконечным числом степеней свободы.

Однако функции Четаева [4] непригодны для доказательства неустойчивости равновесия большинства нелинейных систем. Была предложена [7] другая функция Четаева, представляющая собой возмущение функции Четаева из [4], и доказана неустойчивость в случае, когда положение равновесия является изолированной критической точкой первой нетривиальной формы разложения потенциальной энергии.

Большинство задач о потере устойчивости равновесными конфигурациями упругих систем рассматривались с квазистатической точки зрения (см., например, [8, 9]). В динамической постановке задачи упругой устойчивости и неустойчивости рассматривались в [2, 5], где устойчивость исследовалась при помощи прямого метода Ляпунова. Однако большинство результатов, полученных в этом направлении, касались линейных систем, работ же, где исследовалось бы явление потери устойчивости нелинейно упругой системой при помощи прямого метода Ляпунова, крайне мало. Связано это с тем, что в случае потери устойчивости упругой системой квадратичная часть потенциальной энергии знакомеременна, поэтому аналоги функции Четаева из [4] для решения этих задач, как правило, непригодны. Исследовалась [10] динамическая устойчивость конкретной нелинейно упругой системы, причем неустойчивость доказывалась при помощи аналога функции Четаева из [7].

Ниже приводится еще один пример исследования динамической устойчивости нелинейно упругой системы прямым методом Ляпунова.

1. Рассмотрим движение нелинейно упругого тонкого стержня (колонны) с закрепленными шарнирно концами в плоскости x, y. Форма стержня описывается двумя функциями $u(s, t)$, $v(s, t)$ $(0 \leqslant s \leqslant 1, t \geqslant 0)$— безразмерными перемещениями вдоль осей x и y.

В безразмерных переменных функция Лагранжа системы примет вид [11]

$$L = T - U; \quad T = {}^1/_2 \int_0^1 (u^{\cdot 2} + v^{\cdot 2})\, ds,$$
$$U = {}^1/_2 \int_0^1 (v''^2 + \beta^{-1} (u' + {}^1/_2 v'^2)^2)\, ds \tag{1.1}$$

Здесь T и U — соответственно кинетическая и потенциальная энергии системы, точки означают частные производные по t, штрихи — по s, $\beta > 0$ — некоторая постоянная. Функции $u(s, t)$, $v(s, t)$ удовлетворяют краевым условиям

$$u(0, t) = -u(1, t) = c > 0, \quad v(0, t) = v(1, t) = 0 \tag{1.2}$$

Постоянная $c > 0$ называется параметром концевого сокращения.

Для получения уравнений движения системы запишем вариационный принцип Гамильтона

$$\delta \int_0^T L\, dt = 0 \tag{1.3}$$

для вариаций $\delta u(s, t)$, $\delta v(s, t)$, удовлетворяющих условиям

$$\delta u(0, t) = \delta u(1, t) = \delta v(0, t) = \delta v(1, t) = 0$$
$$\delta u(s, 0) = \delta u(s, T) = \delta v(s, 0) = \delta v(s, T) = 0 \tag{1.4}$$

Из (1.3), (1.4) получим уравнения движения

$$u^{\cdot\cdot} - \beta^{-1} (u' + {}^1/_2 v'^2)' = 0, \quad v^{\cdot\cdot} + v^{\mathrm{IV}} - \beta^{-1} [v' (u' + {}^1/_2 v'^2)]' = 0 \tag{1.5}$$

и дополнительные краевые условия

$$v''(0, t) = v''(1, t) = 0 \tag{1.6}$$

Видно, что уравнения (1.5) при учете краевых условий (1.2) и (1.6) имеют равновесное решение

$$u(s, t) = u_0(s) = c(1 - 2s), \quad v(s, t) = 0 \tag{1.7}$$

Положив $u(s, t) = u_0(s) + w(s, t)$, запишем систему уравнений возмущенного движения с краевыми условиями

$$w^{\cdot\cdot} - \beta^{-1} w'' - {}^1/_2 \beta^{-1} (v'^2)' = 0$$
$$v^{\cdot\cdot} + v^{\mathrm{IV}} + \lambda^2 v'' - \beta^{-1} [v' (w' + {}^1/_2 v'^2)]' = 0, \quad \lambda = \sqrt{2c/\beta} \tag{1.8}$$
$$w(0, t) = w(1, t) = v(0, t) = v(1, t) = v''(0, t) = v''(1, t) = 0$$

Будем исследовать динамическую устойчивость равновесных форм (1.7) в зависимости от значений параметра λ, т. е. устойчивость тривиального решения системы (1.8)

$$w^{\cdot}(s, t) = v^{\cdot}(s, t) = w(s, t) = v(s, t) = 0$$

относительно некоторых интегральных характеристик типа норм.

2. Рассмотрим соболевские пространства функций $\mathbf{W}_p^m [0, 1]$ [12], $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ ($\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел), $p \geqslant 1$, $\mathbf{W}_p^0 [0, 1] = \mathbf{L}_p [0, 1]$ с нормами

$$\| \varphi \|_{m,p} = \left(\int | \varphi^{(m)} (s) |^p ds \right)^{1/p} + \left(\int | \varphi (s) |^p ds \right)^{1/p} \tag{2.1}$$

Здесь $(\quad)^{(m)}$ — обобщенная производная m-го порядка, интегрирование по s всюду ведется на отрезке [0, 1].

Из (1.1) следует, что для того, чтобы T и U были конечными, необходимо, чтобы

$$u^{\cdot}, v^{\cdot} \in \mathbf{W}_2^0 [0, 1], \quad u \in \mathbf{W}_2^1 [0, 1], \quad v \in \mathbf{W}_2^2 [0, 1] \cap \mathbf{W}_4^1 [0, 1], \quad \forall t \geqslant 0$$

В силу теоремы вложения $\mathbf{W}_2^2 [0, 1] \subset \mathbf{W}_4^1 [0, 1]$ [12], поэтому $v \in \mathbf{W}_2^2 [0, 1]$.

Пусть $\varphi(s)$ — некоторая функция из $C^\infty[0, 1]$, удовлетворяющая некоторым краевым условиям $l_j[\varphi] = 0$, $j = 1, \ldots, J$, таким, что для любого полинома $P(s)$ степени, не превосходящей $m - 1$ из условий $l_j[P] \equiv 0$ $(j = 1, \ldots, J)$ следует $P(s) \equiv \equiv 0$. Обозначим $W^m_{2,0}[0, 1]$ замыкание линейного пространства таких функций $\varphi \in \in C^\infty[0, 1]$ по норме (2.1) при $p = 2$. Как следует из [13], на $W^m_{2,0}[0, 1]$ норма может быть задана выражением

$$\|\varphi\|_m = \left(\int [\varphi^{(m)}(s)]^2 ds\right)^{1/2} \tag{2.2}$$

При любом $t \geqslant 0$ функции w, v принадлежат пространствам $W^1_{2,0}[0, 1]$, $W^2_{2,0}[0, 1]$, для которых роль граничных операторов l_j $(j = 1, \ldots, J)$ играют краевые условия в системе (1.8).

Пусть $\varphi \in W^m_{2,0}[0, 1]$ и система функций $\sin \pi ks$, $k \in \mathbf{N}$ удовлетворяет соответствующим краевым условиям $l_j = 0$ $(j = 1, \ldots, J)$. Разложим $\varphi(s)$ в ряд Фурье по системе функций $\{\sin \pi ks\}_{k=1}^\infty$

$$\varphi(s) = \Sigma\varphi_k \sin \pi ks; \quad \varphi_k = 2\int \varphi(s) \sin \pi ks ds$$

тогда из (2.2) следует, что

$$\|\varphi\|_m = (\Sigma (\pi k)^{2m}\varphi_k^2)^{1/2} / \sqrt{2} \tag{2.3}$$

Здесь и всюду далее суммирование ведется от $k = 1$ до $k = \infty$.

Обозначим F^m, $m \in \mathbf{Z}$ ($\mathbf{Z}$ — множество целых чисел), пространство формальных рядов Фурье

$$\varphi(s) = {}^1/_2\psi_0 + \Sigma(\varphi_k \sin \pi ks + \psi_k \cos \pi ks)$$

для которых конечна норма

$$\|\varphi\|_m = (\psi_0^2 + \Sigma(\pi k)^{2m}(\varphi_k^2 + \psi_k^2))^{1/2} / \sqrt{2} \tag{2.4}$$

$F_0^m \in F^m$ — подпространство, для которого $\psi_k = 0$, $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$.

Видно, что пространства F_0^m, F_0^{-m} изоморфны пространствам $W^m_{2,0}[0, 1]$, $W^{-m}_{2,0}[0, 1]$, где $W^{-m}_{2,0}[0, 1]$ — пространство, сопряженное к $W^m_{2,0}[0, 1]$. Заметим также, что $F^n \subset F^m$ и $\|\cdot\|_m \leqslant \|\cdot\|_n$ при $n \geqslant m$.

Итак, будем считать, что $w^\cdot, v^\cdot \in W^0_{2,0}[0, 1]$, $w \in W^1_{2,0}[0, 1]$ $v \in W^2_{2,0}[0, 1]$ для любого $t \geqslant 0$, которые будем отождествлять с соответствующими подпространствами рядов Фурье F_2^m. Краевые условия в (1.8) выполняются при этом автоматически.

Замена интегральных характеристик типа норм (2.2) на эквивалентные выражения через коэффициенты Фурье (2.3) дает при исследовании устойчивости некоторые преимущества, что впервые было отмечено в [14].

На фазовом пространстве системы $W^0_{2,0}[0, 1] \times W^0_{2,0}[0, 1] \times W^1_{2,0}[0, 1] \times \times W^2_{2,0}[0, 1]$ введем естественную норму

$$\|(w^\cdot, v^\cdot, w, v)\|_* = (\|w^\cdot\|_0^2 + \|v^\cdot\|_0^2 + \|w\|_1^2 + \|v\|_2^2)^{1/2}$$

3. *Теорема 1.* Если $\lambda \in (0, \pi)$, то нулевое решение (1.8) устойчиво относительно нормы $\|\cdot\|_*$.

Доказательство. Рассмотрим функционал полной энергии

$$H = T + U - U_0 = {}^1/_2 \int \{w^{\cdot 2} + v^{\cdot 2} + v''^2 + {}^1/_2\beta^{-1}w'^2 - \lambda^2 v'^2 + \\ + {}^1/_4\beta^{-1}v'^4 + \beta^{-1}w'v'^2\}ds, \quad U_0 = {}^1/_2\beta^{-1}\int u_0'^2 ds \tag{3.1}$$

Функционал (3.1) непрерывен по норме $\|\cdot\|_*$. Действительно, для любых $w_1^\cdot$, $v_1^\cdot$, w_1, v_1, $w_2^\cdot$, $v_2^\cdot$, w_2, v_2, воспользовавшись неравенством Коши — Буняковского, получим

$$|H(w_2^\cdot, v_2^\cdot, w_2, v_2) - H(w_1^\cdot, v_1^\cdot, w_1, v_1)| \leqslant \|w_2^\cdot + w_1^\cdot\|_0 \times \\ \times \|w_2^\cdot - w_1^\cdot\|_0 + \|v_2^\cdot + v_1^\cdot\|_0 \|v_2^\cdot - v_1^\cdot\|_0 + \|v_2'' + v_1''\|_0 \|v_2'' - \\ - v_1''\|_0 + \lambda^2 \|v_2' + v_1'\|_0 \|v_2' - v_1'\|_0 + \beta^{-1} [\|w_2' + w_1'\|_0 \|w_2' - \\ - w_1'\|_0 + {}^1/_4 (\|v_2'^3\|_0 + \|v_1'^3\|_0 + \|v_1'^4\|_0^{1/2} \|v_2'^2\|_0^{1/2} + \\ + \|v_2'^4\|_0^{1/2} \|v_1'^2\|^{1/2}) \times \|v_2' - v_1'\|_0 + \|v_2'^2\|_0 \|w_2' - w_1'\|_0 + \\ + \|w_1'\|_0 \sup_{[0,1]} |v_1' + v_2'| \|v_2' - v_1'\|_0]$$

Если $w_1^{\cdot}$, $v_1^{\cdot}$, w_1, v_1, $w_2^{\cdot}$, $v_2^{\cdot}$, w_2, v_2, ограничены по соответствующим нормам, то из неравенства треугольника и теорем вложения [12] следует оценка

$$| H(w_2^{\cdot}, v_2^{\cdot}, w_2, v_2) - H(w_1^{\cdot}, v_1^{\cdot}, w_1, v_1) | \leqslant C_1 (\| w_2^{\cdot} - w_1^{\cdot} \|_0 + \| v_2^{\cdot} - v_1^{\cdot} \|_0 + \| w_2 - w_1 \|_1 + \| v_2 - v_1 \|_2), \ C_1 > 0$$

что эквивалентно непрерывности по норме $\| \cdot \|_*$.

Вычислим вторую вариацию (3.1) при $w^{\cdot} = v^{\cdot} = w = v = 0$

$$\delta^2 H = \int \{(\delta w^{\cdot})^2 + (\delta v^{\cdot})^2 + (\delta v'')^2 + \beta^{-1} (\delta w')^2 - \lambda^2 (\delta v')^2\} ds \qquad (3.2)$$

Используя (2.2)—(2.4), получим

$$\delta^2 H = \| \delta w^{\cdot} \|_0^2 + \| \delta w^{\cdot} \|_0^2 + \beta^{-1} \| \delta w \|_1^2 + {}^1/_2 \sum (k\pi)^2 ((k\pi)^2 - \lambda^2)(\delta v_k)^2 \geqslant$$
$$\geqslant \| \delta w^{\cdot} \|_0^2 + \| \delta v^{\cdot} \|_0^2 + \beta^{-1} \| \delta w \|_1^2 + C_2 \| \delta v \|_2^2$$

где δv_k — коэффициенты разложения δv в ряд Фурье, $0 < C_2 < 1 - (\lambda/\pi)^2$. Следовательно, квадратичная форма (3.2) положительно определена по норме $\| \cdot \|_*$. Применяя прием, аналогичный использованному при доказательстве непрерывности H, можно доказать, что H дважды непрерывно дифференцируем по Фреше в соответствующем пространстве, поэтому найдутся такие постоянные C_3, $C_4 > 0$, что

$$C_3 \| (w^{\cdot}, v^{\cdot}, w, v) \|_* \leqslant H \leqslant C_4 \| (w^{\cdot}, v^{\cdot}, w, v) \|_*$$

если только возмущения $w^{\cdot}$, $v^{\cdot}$, w, v достаточно малы относительно нормы $\| \cdot \|_*$. Следовательно, в силу того, что полная энергия системы является первым интегралом, функционал (3.1) может быть использован в качестве функционала Ляпунова, откуда в силу обобщенной теоремы Ляпунова об устойчивости равновесных решений распределенных систем [1, 3] решение (1.8) устойчиво относительно нормы $\| \cdot \|_*$.

4. *Теорема* 2. Если $\lambda \in (\pi, +\infty)$, $\lambda \neq \pi n$, $n \in \mathbf{N}$, то решение системы (1.8) $w^{\cdot} = v^{\cdot} = w = v = 0$ неустойчиво относительно нормы $\| \cdot \|_*$.

Доказательство. Рассмотрим бесконечномерный аналог функции Четаева из [4, 7]

$$W = \int (w^{\cdot} \Phi(w, v) + v^{\cdot} \Psi(w, v)) ds \qquad (4.1)$$

где $\Phi = w + \mu R_1 F$, $\Psi = v - \mu R_2 G$, $\mu > 0$ — некоторый малый параметр, значение которого будет определено ниже,

$$F = \nabla_w U_2 = -\beta^{-1} w'', \ G = \nabla_v U_2 = v^{\mathrm{IV}} + \lambda^2 v''$$

∇ — производная Фреше, $U_2 = {}^1/_2 \int (v''^2 + \beta^{-1} w'^2 - \lambda^2 v'^2) ds$ — квадратичная часть функционала потенциальной энергии $U - U_0$. R_1, R_2 — самосопряженные интегральные операторы Фредгольма с ядрами K_1, K_2

$$R_1 F = \int K_1(s, \sigma) F(\sigma) d\sigma, \ R_2 G = \int K_2(s, \sigma) G(\sigma) d\sigma$$

$K_1(s, \sigma) = K_1(\sigma, s)$, $K_1(s, \sigma) = (s - 1)\sigma$, $\sigma \in [0, s]$ — функция Грина краевой задачи второго порядка

$$f'' = F, \ f(0) = f(1) = 0$$

$K_2(s, \sigma) = K_2(\sigma, s)$, $K_2(s, \sigma) = {}^1/_{12} [(s - \sigma)^3 + 2s\sigma(s^2 + \sigma^2 + 2) - (s + \sigma)^3]$, $\sigma \in [0, s]$ — функция Грина краевой задачи четвертого порядка

$$g^{\mathrm{IV}} = G, \ g(0) = g(1) = g''(0) = g''(1) = 0$$

Обозначим $f = R_1 F$, $g = R_2 G$. Данные выражения являются «сглаженными» градиентами Фреше $\nabla_w U_2$, $\nabla_v U_2$, поэтому (4.1) является аналогом функции Четаева, предложенной в [7].

Отметим, что компоненты четаевского векторного поля (см. [4, 7]) являются по смыслу возможными перемещениями, поэтому сглаживание F и G преследует следующие цели: во-первых, Φ и Ψ должны иметь те же классы гладкости, что и w и v, во-вторых, удовлетворять тем же краевым условиям.

Предположим противное: рассматриваемое равновесное решение системы уравнений (1.8) устойчиво по Ляпунову, тогда для любых, достаточно малых в смысле введенной нормы начальных условий $\|(w^{\cdot}, v^{\cdot}, w, v)\|_* < \varepsilon$ при $t \geqslant 0$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало.

В силу неравенства Коши — Буняковского

$$|W| \leqslant \|w^{\cdot}\|_0 \|\Phi\|_0 + \|v^{\cdot}\|_0 \|\Psi\|_0 \leqslant \varepsilon (\|\Phi\|_0 + \|\Psi\|_0)$$

Оценим величины $\|\Phi\|_0$, $\|\Psi\|_0$

$$\|\Phi\|_0 \leqslant \|w\|_0 + \mu \|f\|_0 \leqslant \|w\|_1 + \mu \|f\|_0, \quad \|\Psi\|_0 \leqslant \|v\|_0 + \mu \|g\|_0 \leqslant \leqslant \|v\|_2 + \mu \|g\|_0$$

Очевидно, что $F \in W_{2,0}^{-1}[0, 1]$, $G \in W_{2,0}^{-2}[0, 1]$. Рассмотрим разложения функций F, G, f, g в ряды Фурье по системе $\{\sin \pi ks\}_{k=1}^{\infty}$.

$$F = \sum F_k \sin \pi ks, \quad G = \sum G_k \sin \pi ks, \quad f = \sum f_k \sin \pi ks, \quad g = \sum g_k \sin \pi ks$$

тогда $f_k = -(\pi k)^{-2} F_k$, $g_k = (\pi k)^{-4} G_k$, откуда следуют равенства

$$\|f\|_0 = \|F\|_{-2}, \quad \|g\|_0 = \|G\|_{-4}$$

Применяя (2.3), (2.4), получим

$$\|F\|_{-2} \leqslant \beta^{-1} \|w\|_0 \leqslant \beta^{-1} \|w\|_1, \quad \|G\|_{-4} \leqslant \|v\|_0 + \lambda^2 \|v\|_{-2} \leqslant \leqslant (1 + \lambda^2) \|v\|_2$$

Следовательно, имеет место оценка

$$|W| \leqslant M_1 \varepsilon^2 \tag{4.2}$$

где $M_1 > 0$ зависит только от параметров задачи. Пользуясь приемом, аналогичным использованному в предыдущем пункте, можно показать непрерывность функционала (4.1) по норме $\|\cdot\|_*$.

Вычислим производную по t от (4.1) в силу системы уравнений (1.8)

$$\begin{aligned} W^{\cdot} &= \int (w^{\cdot\cdot}\Phi + v^{\cdot\cdot}\Psi)\, ds + \int (w^{\cdot}\Phi^{\cdot} + v^{\cdot}\Psi^{\cdot}) ds = \\ &= -\int (w\nabla_w U + v\nabla_v U)\, ds - \mu \int (f''f - g^{\mathrm{IV}} g)\, ds - \\ &\quad - \mu \int [f\nabla_w (U - U_2) - g\nabla_v (U - U_2)]\, ds + \\ &\quad + \int (w^{\cdot 2} + v^{\cdot 2}) ds + \mu \int (w^{\cdot} f^{\cdot} - v^{\cdot} g^{\cdot}) ds \end{aligned} \tag{4.3}$$

Оценим каждый из входящих в (4.3) интегралов

а) $\quad -\int (w\nabla_w U + v\nabla_v U)\, ds = -2(U - U_0) - {}^1/_2 \beta^{-1} \int (w'v'^2 + {}^1/_2 v'^4) ds$

Используя неравенство Коши — Буняковского, (2.1), (2.2) и теорему вложения $W_2^2[0, 1]$ в $W_4^1[0, 1]$ [12], получим

$$\left| \int (v'^2 w' + {}^1/_2 v'^4) ds \right| \leqslant \|v\|_{1,4}^2 (\|w\|_1 + {}^1/_2 \|v\|_{1,4}^2)$$

и

$$-\int (w\nabla_w U + v\nabla_v U)\, ds \geqslant -2(U - U_0) - M_2 \|v\|_2^2 (\|w\|_1 + \|v\|_2^2), \quad M_2 > 0 \tag{4.4}$$

б) $$-\mu \int (f''f - g^{\mathrm{IV}} g)\, ds = \mu \int (f'^2 + g''^2) ds$$

где $f' = R_3 F$, $g'' = R_4 G$, R_1, R_2 — интегральные операторы Фредгольма с ядрами K_3, K_4

$$R_3F = \int K_3(s, \sigma) F(\sigma) d\sigma, \quad R_4G = \int K_4(s, \sigma) G(\sigma) d\sigma$$

$$K_3(s, \sigma) = \begin{cases} \sigma, \sigma \in [0, s] \\ \sigma - 1, \sigma \in (s, 1] \end{cases}, \quad K_4(s, \sigma) = K_1(s, \sigma)$$

Используя разложения Фурье F, G, f, g можно показать, что

$$\| f' \|_0^2 + \| g'' \|_0^2 = \| F \|_{-1}^2 + \| G \|_{-2}^2, \ \| F \|_{-1}^2 = \beta^{-2} \| w \|_1^2$$

Пусть $\lambda \in (\pi l, \pi(l + 1))$, $l \in \mathbf{N}$. Разложим функцию v в ряд Фурье

$$v = \sum v_k \sin \pi k s$$

$$\| G \|_{-2}^2 = {}^1/_2 \sum ((\pi k)^2 - \lambda^2)^2 v_k^2 \geqslant M_3(\lambda) \| v \|_2^2,$$

$$0 < M_3(\lambda) < \min\left\{\left(1 - \left(\frac{\lambda}{\pi l}\right)^2\right)^2, \quad \left(1 - \left(\frac{\lambda}{\pi(l+1)}\right)^2\right)^2\right\}$$

Следовательно,

$$-\mu \int (f'' f - g^{\mathrm{IV}} g) ds \geqslant M_4(\lambda) (\| w \|_1^2 + \| v \|_2^2), \ M_4(\lambda) > 0 \quad (4.5)$$

в) Обозначим $f_1' = \nabla_w (U - U_2) = -{}^1/_2 \beta^{-1} (v'^2)'$, $\quad g_1' = \nabla_v (U - U_2) = - \beta^{-1} (v' (w' + {}^1/_2 v'^2))'$

Интегрируя по частям и применяя неравенство Коши — Буняковского, получим

$$| \int (f_1' f - g_1' g) ds | = | \int (g_1 g' - f_1 f') ds | \leqslant \| g_1 \|_0 \| g' \|_0 + \| f_1 \|_0 \| f' \|_0, \ \| f' \|_0 = \beta^{-1} \| w \|_1, \ \| g' \|_0 = \| G \|_{-3} \leqslant \| G \|_{-2} \leqslant \leqslant \| v \|_2 + \lambda^2 \| v \|_0 \leqslant (1 + \lambda^2) \| v \|_2$$

Воспользовавшись формулами (2.1)—(2.3) и теоремами вложения

$\mathbf{W}_2^2 [0, 1]$ в $\mathbf{W}_4^1 [0, 1]$, $\mathbf{W}_6^1 [0, 1]$ и $\mathbf{C}^1 [0, 1]$ [12]

$$\| f_1 \|_0 = {}^1/_2 \beta^{-1} \| v'^2 \|_0 \leqslant {}^1/_2 \beta^{-1} \| v \|_{1,4}^2 \leqslant M_5 \| v \|_2^2, \ M_5 > 0$$

$$\| g_1 \|_0 \leqslant \beta^{-1} (\| v' w' \|_0 + {}^1/_2 \| v'^3 \|_0) \leqslant \beta^{-1} (\| w \|_1 \sup_{[0,1]} | v' | + {}^1/_2 \| v \|_{1,6}^3) \leqslant M_6 \| v \|_2 (\| w \|_1 + \| v \|_2^2), \ M_6 > 0$$

Следовательно,

$$-\mu \int [f \nabla_w (U - U_2) - g \nabla_v (U - U_2)] ds \geqslant - \mu M_7 \| v \|_2^2 (\| w \|_1 + \| v \|_2^2), \ M_7 > 0 \quad (4.6)$$

г) $\int (w^{\cdot 2} + v^{\cdot 2}) ds = \| w^{\cdot} \|_0^2 + \| v^{\cdot} \|_0^2 \quad (4.7)$

д) Согласно неравенству Коши — Буняковского

$$| \int (w^{\cdot} f^{\cdot} - v^{\cdot} g^{\cdot}) ds | \leqslant \| w^{\cdot} \|_0 \| f^{\cdot} \|_0 + \| v^{\cdot} \|_0 \| g^{\cdot} \|_0$$

$$f^{\cdot} = R_1 F^{\cdot}, \ g^{\cdot} = R_2 G^{\cdot}, \ F^{\cdot} = -\beta^{-1} w^{\cdot\prime\prime}, \ G^{\cdot} = v^{\cdot \mathrm{IV}} + \lambda^2 v^{\cdot\prime\prime}$$

$$\| f^{\cdot} \|_0 = \| F^{\cdot} \|_{-2} = \beta^{-1} \| w^{\cdot} \|_0, \ \| g^{\cdot} \|_0 = \| G^{\cdot} \|_{-4} \leqslant \leqslant \| v^{\cdot} \|_0 + \lambda^2 \| v^{\cdot} \|_{-2} \leqslant (1 + \lambda^2) \| v^{\cdot} \|_0$$

Следовательно,

$$\mu \int (w^{\cdot} f^{\cdot} - v^{\cdot} g^{\cdot}) ds \geqslant -\mu M_8 (\| w^{\cdot} \|_0^2 + \| v^{\cdot} \|_0^2), \ M_8 > 0 \quad (4.8)$$

Используя (4.4)—(4.8), оценим (4.3)

$$W^{\cdot} \geqslant -2(U - U_0) + \| v \|_2^2 (\mu M_4(\lambda) - (M_2 + \mu M_7) \times (\| w \|_1 + \| v \|_2^2)) + (1 - \mu M_8)(\| w^{\cdot} \|_0^2 + \| v^{\cdot} \|_0^2) \quad (4.9)$$

Выберем $\mu < 1/M_8$. Поскольку $\lambda \neq \pi n$, $n \in \mathbf{N}$, то $M_4(\lambda) > 0$. Будем считать $\varepsilon > 0$ малым настолько, что

$$\mu M_4(\lambda) - (M_2 + \mu M_7)(\varepsilon + \varepsilon^2) > 0$$

Тогда из (4.9) следует неравенство

$$W^{\cdot} \geqslant -2(U - U_0)$$