Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 6, 1990

УДК 531.332

Д. Зекович

О БРАХИСТОХРОННОМ ДВИЖЕНИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С НЕГОЛОНОМНЫМИ НЕЛИНЕЙНЫМИ И НЕСТАЦИОНАРНЫМИ СВЯЗЯМИ

В развитие исследований [1, 2] брахистохронного движения неголономных механических систем с линейными однородными связями рассматриваются неголономные нелинейные и нестационарные механические системы. Задача состоит в формулировке дифференциальных уравнений брахистохронного движения неголономных нелинейных и нестационарных механических систем и определении дополнительных сил, которые вместе с данными силами нужны для реализации такого движения.

1. Проанализируем ограничения, накладываемые на механическую систему, которую надо переместить из положения **A** в положение **B** за минимальное время. Механическая система движется в поле известных сил. Дополнительные силы удовлетворяют условию

$$R_\alpha q^{\cdot\alpha} = 0 \tag{1.1}$$

Таким образом, они не влияют на закон изменения полной механической энергии системы. Здесь и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование. Индексы принимают следующие значения: $i, j, k, s = 1, \ldots, n$; $\alpha, \beta, = 1, \ldots, m$; $\nu, \rho = m + 1, \ldots, m + l$.

Вторая группа ограничений — неголономные, нелинейные и нестационарные связи:

$$q^{\cdot\nu} = \psi^\nu (q^i, q^{\cdot\alpha}, t) \tag{1.2}$$

Кроме (1.1) и (1.2) введем еще два соотношения (см. [1)] и [3]):

$$p_s - \frac{\partial T}{\partial q^{\cdot s}} = 0 \tag{1.3}$$

$$p_\alpha^{\cdot} - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial \Pi}{\partial q^\alpha} - Q_\alpha + \frac{\partial \psi^\rho}{\partial q^{\cdot\alpha}} \left(p_\rho^{\cdot} - \frac{\partial T}{\partial q^\rho} + \frac{\partial \Pi}{\partial q^\rho} - Q_\rho\right) - R_\alpha = 0 \tag{1.4}$$

Здесь T — кинетическая энергия системы:

$$T = {}^1/_2 a_{ij} (q^k) q^{\cdot i} q^{\cdot j}$$

$\Pi (q^k)$ — потенциальная энергия, Q_i — неконсервативные силы, которые в самом общем случае зависят от обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени, R_α — дополнительные силы, которые еще нужно определить.

Начальное положение **A** системы задается моментом времени t_0 и обобщенными координатами $q_{(0)}{}^i$, а конечное положение **B** определяется моментом времени t_1 (подлежащем определению) и обобщенными координатами $q_{(1)}{}^i$. В начальном положении $q_{(0)}^{\cdot i}$ задана величина

$$T + \varepsilon^\nu p_\nu \tag{1.5}$$

$$\varepsilon^\nu = \frac{\partial \psi^\nu}{\partial q^{\cdot\alpha}} q^{\cdot\alpha} - \psi^\nu, \quad p_\nu = \frac{\partial T}{\partial q^{\cdot\nu}}$$

1) *Zeković D.* Neki problemi dinamike neholonomnih sistema sa primenom na tehničke objekte. Doktorska disertacija. Beograd. Mašinski fakultet, 1984.

В случае однородных связей $\varepsilon^\nu = 0$, и поэтому (1.5) совпадает с кинетической энергией системы. В общем случае эта величина имеет вид $T + \varepsilon^\nu p_\nu = T_2{}^* - T_0{}^*$, где $T_2{}^* = T_2 \left.\right|_{q^{\cdot\nu}=\psi^\nu}$ — квадратичная часть кинетической энергии, $T_0{}^*$ — часть кинетической энергии, которая не зависит от обобщенных скоростей.

Время движения системы из положения **A** в положение **B** совпадает с интегралом

$$J = \int_{t_0}^{t_1} dt \tag{1.6}$$

Интеграл (1.6) должен принимать минимальное значение. В этом случае система будет совершать брахистохронное движение. Задача заключается в определении условий экстремальности функционала (1.6) при ограничениях (1.1)—(1.4). Эта вариационная задача эквивалентна задаче нахождения условий экстремальности нового функционала (4)

$$\bar{J} = \int_{t_0}^{t_1} \bar{F}\, dt \tag{1.7}$$

с подынтегральной функцией

$$\bar{F} = 1 + \lambda R_\alpha q^{\cdot\alpha} + \mu^s\left(p_s - \frac{\partial T}{\partial q^{\cdot s}}\right) + \nu^\alpha \left[p_\alpha^{\cdot} - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial \Pi}{\partial q^\alpha} - Q_\alpha + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial \psi^\rho}{\partial q^{\cdot\alpha}}\left(p_\rho^{\cdot} - \frac{\partial T}{\partial q^\rho} + \frac{\partial \Pi}{\partial q^\rho} - Q_\rho\right) - R_\alpha\right] + \theta_\rho\left(q^{\cdot\rho} - \psi^\rho\right) \tag{1.8}$$

где λ, μ^s, ν^α, θ_ρ — лагранжевы множители связей.

Согласно правилам вариационного исчисления, условия экстремальности функционала (1.7) приводятся к следующим уравнениям [5]:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{F}}{\partial R_\alpha^{\cdot}} - \frac{\partial \bar{F}}{\partial R_\alpha} = 0 \to \nu^\alpha - \lambda q^{\cdot\alpha} = 0 \tag{1.9}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{F}}{\partial p_\alpha^{\cdot}} - \frac{\partial \bar{F}}{\partial p_\alpha} = 0 \to \nu^{\cdot\alpha} - \mu^\alpha = 0 \tag{1.10}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{F}}{\partial p_\nu^{\cdot}} - \frac{\partial \bar{F}}{\partial p_\nu} = 0 \to \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \psi^\nu}{\partial q^{\cdot\alpha}}\nu^\alpha\right) - \mu^\nu = 0 \tag{1.11}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{F}}{\partial q^{\cdot\alpha}} - \frac{\partial \bar{F}}{\partial q^\alpha} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{F}}{\partial q^{\cdot\nu}} - \frac{\partial \bar{F}}{\partial q^\nu} = 0 \tag{1.12}$$

$$\left.\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial p_i^{\cdot}}\delta p_i + \frac{\partial \bar{F}}{\partial R_\alpha^{\cdot}}\delta R_\alpha + \frac{\partial \bar{F}}{\partial q^{\cdot i}}\partial q^i\right)\right|_{t_0}^{t_1} = 0 \to \lambda\left.\left(q^{\cdot\alpha}\delta p_\alpha + \frac{\partial \psi^\rho}{\partial q^{\cdot\alpha}} q^{\cdot\alpha}\delta p_\rho\right)\right|_{t_0}^{t_1} = 0 \tag{1.13}$$

$$\left.\left[\bar{F} - \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial p_i^{\cdot}} p_i^{\cdot} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial R_\alpha^{\cdot}} R_\alpha^{\cdot} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial q^{\cdot i}} q^{\cdot i}\right)\right]\delta t\right|_{t_0}^{t_1} = 0 \tag{1.14}$$

Уравнения (1.9)—(1.12) — эйлеровы уравнения вариационной задачи с подынтегральной функцией (1.8). Уравнение (1.13) представляет естественное граничное условие, а уравнение (1.14) — условие трансверсальности на правом конце.

Уравнения (1.12) можно записать в явной форме:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F^*}{\partial q^{\cdot\alpha}} - \frac{\partial F^*}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial \psi^\rho}{\partial q^{\cdot\alpha}}\frac{\partial F}{\partial q^\rho} + \left(\frac{\partial F}{\partial q^\rho} - \bar{\theta}_\rho\right)\gamma_\alpha{}^\rho -$$
$$-\lambda\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q^{\cdot\nu}} - \frac{\partial T}{\partial q^\nu} + \frac{\partial \Pi}{\partial q^\nu}\right)\left(\gamma_\alpha{}^\nu - \delta_\alpha{}^\nu\right) + N_\alpha{}^* = 0 \tag{1.15}$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q^{\cdot\nu}} - \frac{\partial F}{\partial q^\nu} - \bar{\theta}_\nu^{\cdot} - \theta_\rho\frac{\partial \psi^\rho}{\partial q^\nu} + N_\nu = 0$$

В уравнениях (1.15) новые переменные F, F^*, $\bar\theta_\nu$, $\gamma_\alpha{}^\rho$, $\delta_\alpha{}^\rho$, $N_\alpha{}^*$ и N_ν имеют вид

$$
\begin{gathered}
F = \lambda^{\cdot} T + \lambda \bar Q_i q^{\cdot i} \qquad \left(\bar Q_i = Q_i + Q_i{}^K = Q_i - \frac{\partial \Pi}{\partial q^i}\right) \\
F^* = F\,|_{q^{\cdot\nu}=\psi^\nu} = \lambda^{\cdot} T^* + \lambda \bar Q_\beta{}^* q^{\cdot\beta} \\
\left[\bar Q_\beta{}^* = Q_\beta{}^* + Q_\beta^{*K} = Q_\beta{}^* - \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q^\beta} + \frac{\partial \psi^\rho}{\partial q^{\cdot\beta}}\frac{\partial \Pi}{\partial q^\rho}\right)\right] \\
\bar\theta_\nu = \theta_\nu - \lambda\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q^{\cdot\nu}} - \frac{\partial T}{\partial q^\nu} + \frac{\partial \Pi}{\partial q^\nu} - Q_\nu\right) \\
\gamma_\alpha{}^\rho = \left[\frac{\partial \psi^\rho}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial \psi^\nu}{\partial q^{\cdot\alpha}}\frac{\partial \psi^\rho}{\partial q^\nu} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \psi^\rho}{\partial q^{\cdot\alpha}}\right)\right] \qquad (1.16) \\
\delta_\alpha{}^\rho = \left[\frac{\partial^2 \psi^\rho}{\partial q^{\cdot\beta}\partial q^\alpha} q^{\cdot\beta} + \frac{\partial^2 \psi^\rho}{\partial q^{\cdot\beta}\partial q^\nu}\frac{\partial \psi^\nu}{\partial q^{\cdot\alpha}} q^{\cdot\beta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \psi^\rho}{\partial q^{\cdot\alpha}}\right)\right] \\
N_\alpha{}^* = -\varepsilon^\rho\left[\lambda\frac{\partial}{\partial q^\alpha}\left(2\frac{\partial \Pi}{\partial q^\rho} - \frac{\partial T}{\partial q^\rho} + Q_\rho\right) - \lambda\frac{\partial Q_\rho}{\partial q^{\cdot\alpha}}\right] + \\
+ \frac{d}{dt}\left\{\left[\lambda\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial h_\alpha}{\partial q^{\cdot\rho}} - \frac{\partial h_\alpha}{\partial q^\rho}\right)\varepsilon^\rho + \frac{d}{dt}(\lambda a_{\rho\alpha}\varepsilon^\rho)\right]\right\} + \\
+ \left[\lambda q^{\cdot\beta}\frac{\partial^2 \psi^\rho}{\partial q^{\cdot\alpha}\partial q^{\cdot\beta}}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q^{\cdot\rho}} - \frac{\partial T}{\partial q^\rho} + \frac{\partial \Pi}{\partial q^\rho} - Q_\rho\right) + \lambda q^{\cdot\beta} Q_\rho \frac{\partial^2 \psi^\rho}{\partial q^{\cdot\alpha}\partial q^{\cdot\beta}}\right] - \\
- \frac{\partial \psi^\nu}{\partial q^{\cdot\alpha}}\left\{\varepsilon^\rho\left[\lambda\frac{\partial}{\partial q^\nu}\left(2\frac{\partial \Pi}{\partial q^\rho} - \frac{\partial T}{\partial q^\rho} + Q_\rho\right) - \lambda\frac{\partial Q_\rho}{\partial q^{\cdot\nu}}\right]\right\} - \\
- \frac{\partial \psi^\nu}{\partial q^{\cdot\alpha}}\frac{d}{dt}\left\{\frac{d}{dt}(\lambda a_{\nu\rho}\varepsilon^\rho) - \lambda\varepsilon^\rho\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial h_\rho}{\partial q^{\cdot\nu}} - \frac{\partial h_\rho}{\partial q^\nu}\right)\right\} \\
N_\nu = -\varepsilon^\rho\left[\lambda\frac{\partial}{\partial q^\nu}\left(2\frac{\partial \Pi}{\partial q^\rho} - \frac{\partial T}{\partial q^\rho} + Q_\rho\right) - \lambda\frac{\partial Q_\rho}{\partial q^{\cdot\nu}}\right] - \\
- \frac{d}{dt}\left\{\frac{d}{dt}(\lambda a_{\nu\rho}\varepsilon^\rho) - \lambda\varepsilon^\rho\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial h_\rho}{\partial q^{\cdot\nu}} - \frac{\partial h_\rho}{\partial q^\nu}\right)\right\}, \qquad h_s = \frac{\partial T}{\partial q^{\cdot s}}
\end{gathered}
$$

Уравнение (1.14) после преобразований принимает вид

$$
\begin{gathered}
\Bigl\{1 + \frac{d}{dt}\Bigl[\lambda q^{\cdot\alpha}\left(p_\alpha + \frac{\partial \psi^\rho}{\partial q^{\cdot\alpha}} p_\rho\right) + 2\lambda\Bigl[\frac{\partial \Pi}{\partial q^\alpha} q^{\cdot\alpha} + \frac{\partial \psi^\rho}{\partial q^{\cdot\alpha}}\frac{\partial \Pi}{\partial q^\rho} q^{\cdot\alpha} - Q_\alpha q^{\cdot\alpha} - \\
- \frac{\partial \psi^\rho}{\partial q^{\cdot\alpha}} Q_\rho q^{\cdot\alpha}\Bigr] + \lambda\left(\frac{\partial Q_\alpha}{\partial q^{\cdot j}} q^{\cdot\alpha} q^{\cdot j} + \frac{\partial \psi^\rho}{\partial q^{\cdot\alpha}}\frac{\partial Q_\rho}{\partial q^{\cdot j}} q^{\cdot\alpha} q^{\cdot j}\right) - \\
- \lambda q^{\cdot\alpha}\frac{\partial^2 \psi^\rho}{\partial q^{\cdot\alpha}\partial q^{\cdot\beta}}\left(p_\rho - \frac{\partial T}{\partial q^\rho} + \frac{\partial \Pi}{\partial q^\rho} - Q_\rho\right) q^{\cdot\beta} + \theta_\rho\varepsilon^\rho\Bigr\}\,\delta t\,\Bigr|_{t=t_1} = 0 \qquad (1.17)
\end{gathered}
$$

В итоге получаем, что рассматриваемая задача сводится к решению уравнений (1.2), (1.15) и уравнения, вытекающего из (1.1) и (1.4),

$$
\frac{d}{dt}(T + \Pi) - Q_i q^{\cdot i} + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q^{\cdot\nu}} - \frac{\partial T}{\partial q^\nu} + \frac{\partial \Pi}{\partial q^\nu} - Q_\nu\right)\left(\psi^\nu - \frac{\partial \psi^\nu}{\partial q^{\cdot\alpha}} q^{\cdot\alpha}\right) = 0 \qquad (1.18)
$$

Эта система уравнений содержит одно уравнение второго порядка (1.18), l уравнений первого порядка (1.2), m уравнений третьего порядка и l уравнений второго порядка (1.15) с $m + 2l + 1 = n + l + 1$ неизвестными q^i, θ_ρ и λ. Эту систему уравнений движения можно с помощью замены $q^{\cdot\alpha} = y^\alpha$, $y^{\cdot\alpha} = x^\alpha$, $\lambda^{\cdot} = \Lambda$ свести к дифференциальным уравнениям первого порядка, которые содержат столько же постоянных интегрирования. Постоянные интегрирования определяются с помощью $2n$ граничных условий $q_{(0)}{}^i$, $q_{(1)}{}^i$, естественного граничного условия на левом конце (1.13), которое приводится к уравнению

$$\lambda\left[q^{\cdot\alpha}\delta p_\alpha + q^{\cdot\nu}\delta p_\nu + \left(\frac{\partial\psi^\nu}{\partial q^{\cdot\alpha}}q^{\cdot\alpha} - \psi^\nu\right)\delta p_\nu\right]\Bigg|_{t=t_0} = 0$$

Далее, принимая во внимание, что величина (1.5) задана, получаем соотношения

$$\lambda\frac{\partial^2\psi^\nu}{\partial q^{\cdot\alpha}\partial q^{\cdot\beta}}q^{\cdot\alpha}p_\nu\Bigg|_{t=t_0} = 0$$

Аналогично

$$\lambda\left[q^{\cdot\alpha}\delta p_\alpha + q^{\cdot\nu}\delta p_\nu + \left(\frac{\partial\psi^\nu}{\partial q^{\cdot\alpha}}q^{\cdot\alpha} - \psi^\nu\right)\delta p_\nu\right]\Bigg|_{t=t_1} = 0$$

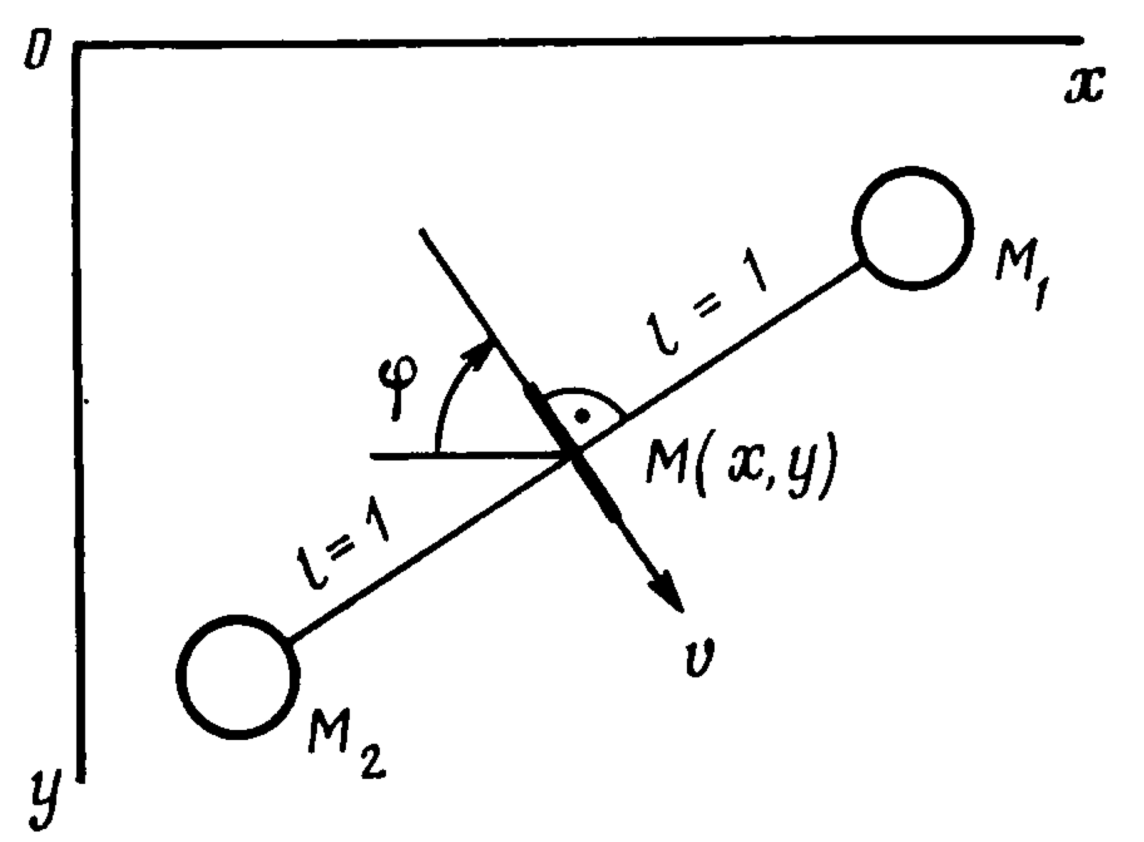
Так как на правом конце величина (1.5) не фиксирована, то $\lambda_{(t_1)} = 0$. Условие трансверсальности (1.17) на правом конце дает еще одно уравнение для определения произвольных постоянных.

Итак, имеется $2n + m + 2 = 3m + 2l + 2$ уравнений для определения такого же числа констант интегрирования. Так как необходимо определить еще момент времени t_1, то в качестве дополнительного условия можно взять (1.5).

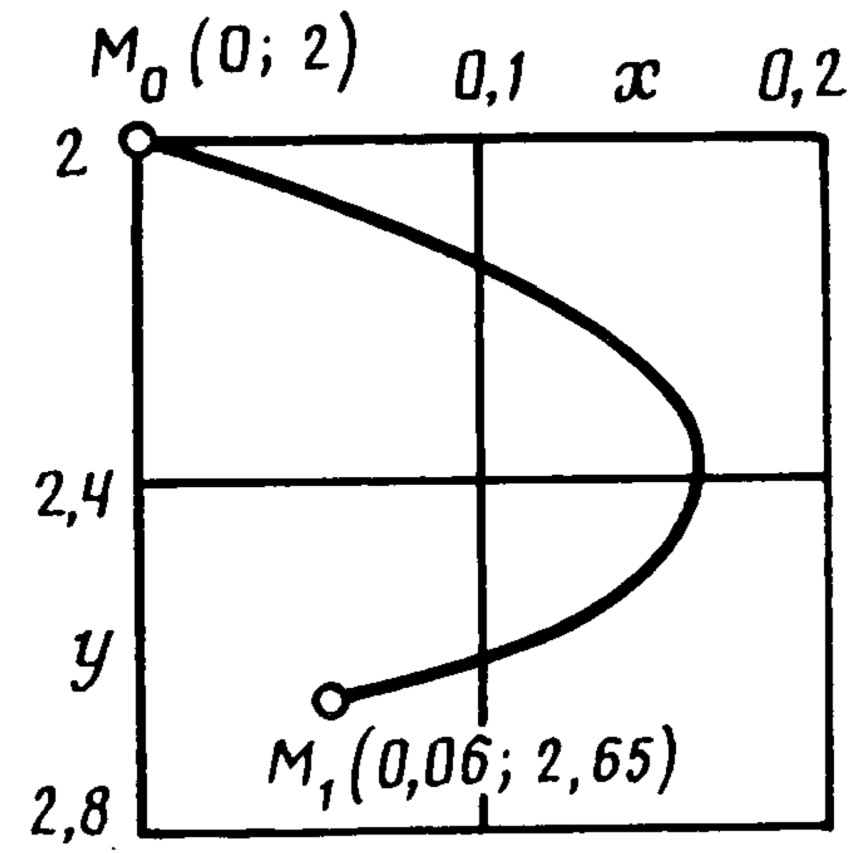
После определения функций $q^i = q^i(t)$ дополнительные силы находятся из соотношений

$$R_\alpha = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q^{\cdot\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial\Pi}{\partial q^\alpha} - Q_\alpha + \frac{\partial\psi^\rho}{\partial q^{\cdot\alpha}}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q^{\cdot\rho}} - \frac{\partial T}{\partial q^\rho} + \frac{\partial\Pi}{\partial q^\rho} - Q_\rho\right)$$

2. В качестве примера рассмотрим две тяжелые материальные точки M_1 и M_2 единичной массы, соединенные стержнем неизменяемой длины $2l$ и движущиеся в вертикальной плоскости так, что скорость середины стержня **v** перпендикулярна отрезку



Фиг. 1



Фиг. 2

M_1M_2. Эту неголономную связь можно реализовать с помощью лезвия, как для саней Чаплыгина [6] (см. фиг. 1).

Пусть x, y — координаты точки M, φ — угол поворота лезвия (фиг. 1). В рассматриваемом случае полная энергия сохраняется (ее постоянная считается равной нулю). Поэтому функционал (1.7) принимает вид

$$\int_{t_0}^{t_1}[1 + \Lambda(T + \Pi) + \theta(y^\cdot - x^\cdot \operatorname{tg}\varphi)]\,dt = \int_{t_0}^{t_1}F_1 dt \qquad (2.1)$$

а уравнения $y^\cdot - x^\cdot \operatorname{tg}\varphi = 0$, $T + \Pi = 0$ служат уравнениями связей. Из условия экстремальности функционала (2.1) вытекают уравнения

$$2\Lambda x^\cdot - \theta\operatorname{tg}\varphi = c_1 \quad (2\Lambda y^\cdot + \theta)^\cdot + 2\Lambda g = 0 \quad (2\Lambda\varphi^\cdot)^\cdot + \theta x^\cdot\cos^{-2}\varphi = 0 \qquad (2.2)$$

Уравнения (2.2) вместе с двумя уравнениями связей представляют замкнутую систему для отыскания координат x, y, φ и множителей Λ и θ. Эти уравнения содержат параметр c_1, подлежащий определению.

Задача решалась численно для следующих данных: начальное положение — $x_0 = 0$, $y_0 = 2$, $\varphi_0 = 0{,}785$; конечное положение — $x_1 = 0{,}06$, $y_1 = 2{,}65$, $\varphi_1 = 2{,}628$; начальные скорости — $x_0^{\cdot} = 2$, $y_0^{\cdot} = 2$, $\varphi_0^{\cdot} = 5{,}41$. С помощью варьирования постоянной c_1 находится искомая брахистохронная кривая, которая проходит через точку (x_1, y_1, φ_1). Она отвечает значению $c_1 = 0{,}001$. Минимальное время перехода системы из положения (x_0, y_0, φ_0) в положение (x_1, y_1, φ_1) равно 0,299 с. Траектория точки M показана на фиг. 2.

Автор благодарит В. Човича за внимание к работе и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dukić D.* O brahistohronom kretanju neholonomnih mehaničkih sistema // 14. Jugoslovenski kongres racionalne i primenjene mehanike. Portorož. 1978.
2. *Čović V.*, *Lukačević M.* O brahistohronom kretanju neholonomnih mehaničkih sistema // 16. Jugoslovenski kongres teorijske i primenjene mehanike. Budva, 1984.
3. *Неймарк Ю. И.*, *Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
4. *Мышкис А. Д.* Математика: спец. курсы. М.: Наука, 1971. 632 с.
5. *Pars L.* An introduction to the Calculus of Variations. London; Melbourne; Toronto: Heinemann, 1962. 350 p.
6. *Зекович Д.* О проблеме материальной реализации нелинейной неголономной связи // Teor. i primenj. Mehanika. Beograd. 1986. V. 12. S. 135—141.

Белград

Поступила в редакцию
4.V.1989