Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 6, 1990

УДК 531.36

Л. М. Мархашов

О ДВИЖЕНИЯХ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В ПРОСТРАНСТВЕ ФРИДМАНА — ЛОБАЧЕВСКОГО

Строятся и исследуются некоторые простейшие движения материальной точки в пространстве Фридмана — Лобачевского ([1], с. 447), которое при этом, как и галилеево пространство, считается пустым (т. е. свободным от вещества), а силы, в том числе гравитационные, действующие на точку,— фактором, внешним по отношению к этому пространству. Таким образом, задача рассматривается в рамках механики некоторой необычной относительности, отличающейся от релятивистской. Как будет видно из дальнейшего, это отличие количественно мало и регулируется медленно меняющимся космологическим множителем в псевдоевклидовой метрике пространства специальной теории относительности.

1. Постановка задачи. Рассмотрим риманово пространство с метрикой ([1], с. 455)

$$ds^2 = (1 - \alpha/\tau)^4 (c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2)$$
$$\tau^2 = t^2 - r^2/c^2,\ r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad \tau > 0 \tag{1.1}$$

где c — скорость света, α — космологическая постоянная.

Это пространство и названо В. А. Фоком пространством Фридмана — Лобачевского.

Астрофизические наблюдения позволяют вычислить постоянную α и значение переменной величины τ для современной эпохи ([1], с. 464)

$$\alpha = 6\cdot 10^8 \text{ лет},\ \tau^* = 6\cdot 10^9 \text{ лет} \tag{1.2}$$

Ставится задача построения динамических уравнений для материальной точки; также требуется найти наиболее интересные из ее простейших движений:

а) движения по инерции (геодезические риманова пространства с метрикой (1.1));

б) движения в поле центральной ньютоновской силы (наиболее рационально сделать это в форме описания эволюции круговых орбит).

В метрике (1.1) x, y, z предполагаются декартовыми координатами точки, t — временем, отсчитываемым по часам «неподвижного» наблюдателя.

2. Уравнения движения. Согласно известному вариационному принципу действительные движения материальной точки доставляют экстремум функционалу действия. Это может означать, в частности, что группа симметрий уравнений движения сохраняет функцию Лагранжа. С другой стороны, принцип относительности требует, чтобы уравнения движения не зависели от выбора инерциальной системы отсчета. Принимая, что переход между инерциальными системами отсчета осуществляется преобразованиями, сохраняющими метрику заданного риманого пространства (группой движений этого пространства), получаем известную связь между интервалом ds и функцией Лагранжа. После этого уравнения движения пишутся как обычные уравнения Лагранжа с непотенциальными силами в правой части. Именно такой подход реализован в релятивистской динамике ([2], с. 34)

$$L = \lambda\sqrt{ds^2/dt^2} = \lambda\,(1 - \alpha/\tau)^2\sqrt{c^2 - V^2},\ V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$$

Постоянный множитель λ следует подобрать таким образом, чтобы в предельном случае классической механики, когда $c \to \infty$ $\tau^* \to \infty$, функция Лагранжа трансформировалась (с точностью до постоянной mc^2) в обычную кинетическую энергию точки: $L = mV^2/2$. Таким образом, получаем

$$L = -mc\left(\frac{1-\alpha/\tau}{1-\alpha/\tau^*}\right)^2\sqrt{c^2 - V^2} \tag{2.1}$$

Уравнения движения записываются теперь как обычные уравнения Лагранжа. Представим их в виде одного векторного уравнения.

$$\frac{d}{dt}\left[\left(1-\frac{\alpha}{\tau}\right)^2\left(1-\left(\frac{V}{c}\right)^2\right)^{-1/2} m\mathbf{V}\right] = \frac{2m\alpha}{\tau^3}\left(1-\frac{\alpha}{\tau}\right)\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}\,\mathbf{r} + \left(1-\frac{\alpha}{\tau^*}\right)^2\mathbf{F}$$

$$(1 - \alpha/\tau^*)^2 = 0{,}81 \tag{2.2}$$

Здесь m — масса точки, $\mathbf{r}$ — ее радиус-вектор, $\mathbf{V}$ — скорость, $\mathbf{F}$ — приложенная сила.

Из уравнения (2.2) немедленно следует теорема моментов относительно начала координат

$$\frac{d}{dt}\left[\left(1-\frac{\alpha}{\tau}\right)^2\left(1-\left(\frac{V}{c}\right)^2\right)^{-1/2}(\mathbf{r}\times m\mathbf{V})\right] = 0{,}81\mathbf{r}\times\mathbf{F} \tag{2.3}$$

Для других точек пространства теорема моментов места не имеет. Такая избранность начала координат связана с неравноправием точек геометрического пространства в рассматриваемой механической модели. Математически это обусловлено отсутствием в группе движений пространства (1.1) подгруппы трансляций.

Из формулы (2.3) следует, что в случае отсутствия действующих сил ($\mathbf{F} = 0$) или сводимости их к центральной силе, направленной в начало координат ($\mathbf{r}\times\mathbf{F} = 0$) имеет место первый интеграл — аналог интеграла площадей

$$(1 - \alpha/\tau)^2(1 - (V/c)^2)^{-1/2}(\mathbf{r}\times m\mathbf{V}) = \mathbf{l} = \mathbf{const} \tag{2.4}$$

Соотношение (2.4), очевидно, показывает, что движение материальной точки плоское.

3. Движения материальной точки по инерции. Уравнения свободного движения точки (уравнения геодезических) получим из уравнения (2.2), положив $\mathbf{F} = 0$ и раскрыв дифференцированием его левую часть

$$(1 - \alpha/\tau)\,d\mathbf{V}/dt = 2\alpha\tau^{-3}\,(1 - (V/c)^2)(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) \tag{3.1}$$

Из уравнения (3.1), представленного в виде

$$d\,(\mathbf{r} - \mathbf{V}t)^2/dt = -4\alpha t\tau^{-3}\,(1 - (V/c)^2)(\mathbf{r} - \mathbf{V}t)^2$$

можно непосредственно получить некоторые свойства геодезических:

а) траектории, проходящие через начало координат — прямые, движение по ним равномерно: $\mathbf{r} = \mathbf{V}t$, $\mathbf{V} = \mathbf{const}$;

б) всякая траектория имеет некоторую асимптоту

$$\mathbf{r} - \mathbf{V}_\infty t = \mathbf{a},\quad \mathbf{V}_\infty = \lim_{t\to\infty}\mathbf{V},\quad \mathbf{a} = \mathbf{const}.$$

Уравнение (3.1) удалось проинтегрировать явно в параметрической форме (τ — параметр)

$$\mathbf{r} = \tau\tau_0^{-1}(\mathbf{r}_0 \operatorname{ch}\psi(\tau) + \lambda_0 \operatorname{sh}\psi(\tau)), \quad t = \tau\tau_0^{-1}(p_0 \operatorname{sh}\psi(\tau) + t_0 \operatorname{ch}\psi(\tau)) \tag{3.2}$$

$$\psi(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\xi}{\sqrt{k^2(\xi-\alpha)^4+\xi^2}}, \quad \tau_0 \leqslant \tau < \infty$$

$$\lambda_0 = (c^2\tau_0^2\mathbf{v} + (\mathbf{r}\mathbf{v} - c^2t)\,\mathbf{r}_0)Q^{-1/2}, \quad p_0 = (t\mathbf{r}_0\mathbf{v} - r_0^2)\,Q^{-1/2}$$

$$k^2 = c^2(c^2 - v^2)(1 - \alpha/\tau_0)^4 Q^{-1}, \quad Q = (\mathbf{r}_0\mathbf{v} - c^2t_0)^2 - c^2\tau_0^2(c^2 - v^2)$$

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}\,|_{\tau=\tau_0}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{V}\,|_{\tau=\tau_0}, \quad t_0 = t\,|_{\tau=\tau_0}$$

В справедливости решения (3.2) можно убедиться непосредственной проверкой.

Процесс интегрирования уравнения (3.1) состоял из двух этапов — интегрирования одномерного уравнения движения

$$x^{\cdot\cdot} = 2\alpha\tau^{-3}(1 - \alpha/\tau)^{-1}(1 - (x^{\cdot}/c)^2)(x - tx^{\cdot}) \equiv f \tag{3.3}$$

и построения из полученного результата полномерного решения.

На обоих этапах существенно использовалась группа симметрий уравнения (3.1). Из метрики (1.1) видно, что группа движений содержит подгруппу четырехмерных комплексных вращений группы Лоренца, т. е. отличается от последней отсутствием трансляций геометрических координат и времени. Уравнение

$$X\varphi = x\frac{\partial\varphi}{\partial t} + c^2t\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (c^2 - x^{\cdot 2})\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\cdot}} = 0$$

построенное при помощи оператора X одномерной группы Лоренца, продолженного на производную $x^{\cdot}$, имеет первые интегралы

$$\omega_1 = \tau^2 = t^2 - (x/c)^2, \quad \omega_2 = (t + x/c)^2(c - x^{\cdot})/(c + x^{\cdot})$$

Решение уравнения (3.1) обязано зависеть только от функций ω_1, ω_2. Введением в уравнение

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + x^{\cdot}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + f\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\cdot}} = 0$$

новых переменных $\Omega_1 = \alpha\tau^{-1}$, $\Omega_2 = \omega_2\tau^{-2}$ получен первый интеграл уравнения (3.3)

$$(c^2 - x^{\cdot 2})(1 - \alpha/\tau)^{-4}(x - tx^{\cdot})^{-2} = k^2 = \text{const} \tag{3.4}$$

Переход к переменным τ, $\tau_1 = \tau t^{-1}$ привел к их разделению в интеграле (3.4). Отсюда найдено параметрическое представление координаты и времени

$$x = c\,(2k_1)^{-1}(k_1^2e^{\psi(\tau)} - e^{-\psi(\tau)}), \qquad t = (2k_1)^{-1}\tau\,(k_1^2e^{\psi(\tau)} + e^{-\psi(\tau)}))$$

или (после учета зависимости произвольной постоянной k_1, от начальных данных x_0, t_0)

$$\begin{gathered} x = \frac{c\tau}{\tau_0}\left(\frac{x_0}{c}\operatorname{ch}\psi(\tau) + t_0\operatorname{sh}\psi(\tau)\right) \\ t = \frac{\tau}{\tau_0}\left(\frac{x_0}{c}\operatorname{sh}\psi(\tau) + t_0\operatorname{ch}\psi(\tau)\right), \quad \tau \geqslant \tau_0 = \sqrt{t_0^2 - (x_0/c)^2} \end{gathered} \tag{3.5}$$

Поскольку интеграл $\psi(\tau)$ сходится при $\tau \to \infty$, функции $\operatorname{sh}\psi(\tau)$, $\operatorname{ch}\psi(\tau)$ всюду ограничены. Вторая из формул (3.5) показывает, что при изменении τ на полупрямой $[\tau_0, \infty[$ переменная t также принимает все значения от t_0 до ∞. Это свойство полноты параметрического представления решения в виде (3.5) сохраняется и в полномерном случае.

Второй этап решения состоял в превращении одномерного движения (3.5) в плоское. Для этого к уравнениям (3.5) было присоединено еще одно — $y = 0$, и к полученной совокупности уравнений применена композиция двух преобразований: лоренцова, примененного к переменным y, t (x при этом оставалось неизменным), и вращения плоскости (x, y).

После введения ортов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ координатных осей x, y и векторов $\mathbf{r}_0 = \mathbf{i}x_0 + \mathbf{j}y_0$, $\mathbf{v} = \mathbf{i}x_0^{\cdot} + \mathbf{j}y_0^{\cdot}$ было получено решение (3.2). В силу наличия интеграла (2.4) это решение является наиболее общим (так как движения точки — плоские).

Отмеченные ранее асимптотические свойства геодезических подтверждаются непосредственно при помощи точного решения (3.2)

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{V} = \frac{\lim_{\tau\to\infty}\mathbf{r}_\tau'}{\lim_{\tau\to\infty}t_\tau'} = \frac{\mathbf{r}_0 \operatorname{ch}\psi(\infty) + \boldsymbol{\lambda}_0 \operatorname{sh}\psi(\infty)}{t_0 \operatorname{ch}\psi(\infty) + p_0 \operatorname{sh}\psi(\infty)} = \mathbf{V}_\infty$$

$$\lim_{t\to\infty}(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) = \frac{p_0\mathbf{r}_0 - t_0\boldsymbol{\lambda}_0}{k\tau_0\,(t_0 \operatorname{ch}\psi(\infty) + p_0 \operatorname{sh}\psi(\infty))} \equiv \mathbf{a} = \mathbf{const}$$

Нерелятивистское приближение для геодезических можно получить как непосредственно из точного решения (3.2), так и путем прямого интегрирования уравнений геодезических в предельном случае $c \to \infty$. Результат получается в виде явной функции времени

$$\mathbf{r} = \mathbf{b}t + \mathbf{g}t/(t - \alpha), \quad \mathbf{b} = \mathbf{const}, \quad \mathbf{g} = \mathbf{const}$$

Геодезические оказываются гиперболами. Их уравнения в плоскости $z = 0$:

$$y_1 = \Delta\,(1 - \alpha\Delta/(x_1 - \alpha\Delta)), \quad \Delta = g_2b_1 - g_1b_2$$
$$x_1 = g_2x + g_1y, \quad y_1 = b_2x - b_1y, \quad (b_1,\, b_2) \equiv \mathbf{b}, \ (g_1,\, g_2) \equiv \mathbf{g}$$

4. Движение материальной точки в центральном поле. Уравнение движения материальной точки для случая центральной силы F_r путем введения полярных координат r, φ в плоскости движения может быть приведено к виду

$$\frac{d}{dt}\left[\left(1-\frac{\alpha}{\tau}\right)^2\left(1-\left(\frac{V}{c}\right)^2\right)^{-1/2} mr^{\cdot}\right] = \frac{2m\alpha}{\tau^3}\left(1-\frac{\alpha}{\tau}\right)\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}\,r +$$
$$+ mr\varphi^{\cdot 2}(1-\alpha/\tau)^2(1-(V/c)^2)^{-1/2} + (1-\alpha/\tau^*)^2 F_r$$

Интеграл площадей

$$(1 - \alpha/\tau)^2(1 - (V/c))^{-1/2}r^2\varphi^{\cdot} = l = \mathrm{const}$$

Отсюда следует, что для ньютоновского поля закон движения в нерелятивистском приближении ($c \to \infty$) приобретает вид

$$d\,[(1 - \alpha/t)^2r^{\cdot}]/dt = 2\alpha t^{-3}\,(1 - \alpha/t)r + l^2\,(1 - \alpha/t)^{-2}r^{-3} -$$
$$- 0{,}81\gamma Mr^{-2}, \quad r^2\varphi^{\cdot}\,(1 - \alpha/t)^{-2} = l \tag{4.1}$$

Для материальной точки, описывающей круговую орбиту радиуса r_0 с периодом обращения $T = 2\pi/\omega$, имеем $l = 0{,}81r_0^2\omega$.

Наличие в уравнениях движения космологической поправки делает траектории точки незамкнутыми, движения — нестационарными, медленно эволюционирующими.

Выясним, как будет эволюционировать первоначально круговая орбита материальной точки в рассматриваемой модели пространства — времени.

Положим $t = t_0 + t_1$, $t_0 = \tau^* = 6\cdot 10^9$ лет. Будем вести отсчет времени с момента $t_1 = 0$, соответствующего современной эпохе.

Введем малый параметр $\varepsilon = 1/t_0$. Тогда $\alpha\varepsilon = \alpha/t_0 = 0{,}1$, $t^{-1} = \varepsilon - \varepsilon^2 t_1 + \ldots$ В первом приближении $1 - \alpha t^{-1} = 0{,}9 + 0{,}1\varepsilon t_1$.

Будем разыскивать радиус-вектор r в виде разложения в ряд по параметру ε. Ограничимся первым приближением $r = r_0 + \varepsilon\nu(t_1)$. Подстановка r в первое из уравнений (4.1) дает для функции $\nu(t_1)$ уравнение

$$d^2\nu(t_1)/dt_1^2 + \omega^2\nu(t_1) = -0{,}22r_0\omega^2 t_1$$

общее решение которого имеет вид

$$\nu(t_1) = A\cos(\omega t_1 + \delta) - 0{,}22r_0 t_1; \quad \delta, A = \mathrm{const}$$

Таким образом, в первом приближении

$$r = r_0 + \varepsilon(A\cos(\omega t_1 + \delta) - 0{,}22\, r_0 t_1) \tag{4.2}$$

Из формулы (4.2) видно, что осредненное изменение $\langle\Delta r\rangle$ величины радиус-вектора сводится к систематическому его уменьшению (падению точки на центральное тело). Величина падения точки в метрах за столетие выражается формулой

$$\langle\Delta r\rangle = -0{,}37\cdot 10^{-5} r_0 \tag{4.3}$$

где r_0 — первоначальный радиус круговой орбиты в километрах. Величина скорости углового поворота радиус-вектора точки в первом приближении, подсчитанная по второй из формул (4.1), имеет вид

$$\varphi^{\cdot} = \omega + \varepsilon\omega(0{,}22t_1 - 2Ar_0^{-1}\cos(\omega t_1 + \delta))$$

Согласно формуле (4.3) радиус-вектор точки имеет в среднем положительное угловое ускорение, а величина его дополнительного углового поворота, обусловленного этим ускорением, составляет в угловых секундах за столетие величины

$$\langle\Delta\varphi\rangle = \varepsilon\omega t_1^2/9 = 24''/T \tag{4.4}$$

T — период обращения точки вокруг центрального тела, выраженный в земных годах.

Для оценки порядков величин, которые могут давать вычисления по формулам (4.3) и (4.4), применим их к планетам Солнечной системы. Получим, что сближение Луны с Землей, а Земли и Юпитера с Солнцем за столетие выражаются величинами (в метрах) 1,1; 550; $2{,}7\cdot10^3$ соответственно.

Дополнительный угловой поворот Меркурия и Земли вокруг Солнца, Луны вокруг Земли и Фобоса вокруг Марса будут соответственно 43″; 0,24″; 2,9″: 300″ за столетие.

Эти результаты (подсчитанные при помощи планетных данных, заимствованных из книги [3]), по-видимому, не слишком близки к реальности, так как учитывают один только чисто космологический эффект, выведенный, к тому же, из модели, физическая приемлемость которой к задачам центрального движения точки обоснована лишь общими соображениями.

Автор благодарит В. В. Румянцева, В. В. Сергеева, С. Я. Степанова и А. С. Сумбатова, принявших участие в обсуждении доклада на изложенную тему в МГУ, на семинаре по аналитической механике.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фок В. А.* Теория пространства, времени и тяготения. М.: Гостехиздат, 1955. 504 с.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля. М.: Физматгиз, 1960. 400 с.
3. *Alfvén H., Arrenius G.* Structure and Evolutionary History of the Solar System. Dordrecht: Reidel, 1975. 276 p.

Москва

Поступила в редакцию
28.XII.1989