Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 6, 1990

УДК 531.36

В. А. Синицын

О ПРИНЦИПЕ НАИМЕНЬШЕГО ПРИНУЖДЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ С НЕУДЕРЖИВАЮЩИМИ СВЯЗЯМИ

Из принципа Даламбера — Лагранжа для систем с идеальными голономными и неголономными удерживающими и неудерживающими связями выводятся две новые формы принципа наименьшего принуждения. Первая форма близка известному видоизмененному принципу Гаусса, полученному Больцманом и Болотовым для систем с неудерживающими связями. Отличие в том, что здесь действительное движение находится из некоторого ограниченного множества возможных движений как наименее отклоняющееся от движения системы, освобожденной от всех неудерживающих связей и любой части удерживающих. Согласно второй форме принципа действительное движение находится путем сравнения некоторых выделенных возможных движений по отклонению их от движения системы, получаемой отбрасыванием любой части неудерживающих и любой части удерживающих связей. Приводятся примеры.

1. Рассмотрим движение механической системы с идеальными голономными и неголономными связями, в числе которых есть удерживающие и неудерживающие

$$f_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{r}_n, \mathbf{v}_n, t) = 0 \quad (s = 1, \ldots, l) \tag{1.1}$$
$$f_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{r}_n, \mathbf{v}_n, t) \geqslant 0 \quad (s = l+1, \ldots, r)$$

$\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ — радиус-векторы и векторы скоростей материальных точек системы с номерами $k = 1, \ldots, n$; f_s — непрерывные и дифференцируемые (для голономных связей дважды) функции своих аргументов: времени t, координат x_k, y_k, z_k и скоростей v_{kx}, v_{ky}, v_{kz}.

Принцип наименьшего принуждения (принцип Гаусса) выведем, следуя Болотову [1], из принципа Даламбера — Лагранжа для систем с неудерживающими связями

$$\Sigma(\mathbf{F}_k - m_k\mathbf{w}_k)\,\delta\mathbf{r}_k \leqslant 0 \tag{1.2}$$

где $\mathbf{F}_k$ — активные силы; m_k, $\mathbf{w}_k$ — массы и ускорения материальных точек; $\delta\mathbf{r}_k$ — виртуальные перемещения в момент времени t в состоянии, определяемом радиус-векторами $\mathbf{r}_k$ и векторами скоростей $\mathbf{v}_k$. Здесь и далее суммирование ведется по k от $k = 1$ до $k = n$.

Виртуальные перемещения $\delta\mathbf{r}_k$ при связях (1.1) удовлетворяют условиям

$$\Sigma\mathbf{N}_{sk}\delta\mathbf{r}_k = 0 \ (s = 1, \ldots, l), \ \Sigma\mathbf{N}_{sk}\delta\mathbf{r}_k \geqslant 0 \quad (s = l+1, \ldots, r) \tag{1.3}$$

$\mathbf{N}_{sk}$ $(s = 1, \ldots, r;\ k = 1, \ldots, n)$ — непрерывные вектор-функции координат, скоростей точек и времени: $\mathbf{N}_{sk} = (\partial f_s/\partial x_k, \partial f_s/\partial y_k, \partial f_s/\partial z_k)^T$ — для голономных связей, $\mathbf{N}_{sk} = (\partial f_s/\partial v_{kx}, \partial f_s/\partial v_{ky}, \partial f_s/\partial v_{kz})^T$ — для неголономных связей.

Ослабленные по положению и (или) по скоростям неудерживающие связи не принимаются во внимание, так как при ограниченных по величине силах имеется промежуток времени, в течение которого они не препятствуют движению. Рассматриваются только неудерживающие связи, которые могут быть напряжены [2] в данном состоянии ($f_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{r}_n,$

$\mathbf{v}_n,\ t) = 0,\ s = 1, \ldots, r)$, т. е. могут создавать реакции и изменять ускорения точек, согласуя их с наложенными ограничениями. Таким образом, ограничения, налагаемые удерживающими и неудерживающими связями (1.1), удовлетворяются при выполнении уравнений и неравенств линейных относительно ускорений

$$\alpha_s = 0\ (s = 1, \ldots, l),\ \alpha_s \geqslant 0 \quad (s = l + 1, \ldots, r < 3n) \tag{1.4}$$
$$\alpha_s = \Sigma \mathbf{N}_{sk} \mathbf{w}_k + d_s\ (s = 1, \ldots, r)$$

$d_s\ (s = 1, \ldots, r)$ — непрерывные функции координат, скоростей точек и времени, l — число удерживающих связей, $(r - l)$ — число неудерживающих связей; неотрицательные величины α_s $(s = 1, \ldots, r)$ для краткости будем называть ускорениями ослабления связей.

Виртуальным перемещениям, удовлетворяющим условиям (1.3), поставим в соответствие возможные движения с возможными (допускаемыми связями) ускорениями $\mathbf{w}_k'$ [3] ($\mathbf{w}_k$ — ускорения материальных точек в действительном движении)

$$\delta \mathbf{r}_k = {}^1/_2\, (\mathbf{w}_k' - \mathbf{w}_k)(\mathrm{d}t)^2 \tag{1.5}$$

Соответствие будет установлено, если выделены движения с возможными ускорениями, при которых ускорения ослабления связей (α_s') не меньше, чем ускорения ослабления их в действительном движении (α_s), т. е.

$$\alpha_s' = \alpha_s = 0 \quad (s = 1, \ldots, l),\ \alpha_s' \geqslant \alpha_s \geqslant 0 \quad (s = l + 1, \ldots, r) \tag{1.6}$$
$$\alpha_s' = \Sigma \mathbf{N}_{sk} \mathbf{w}_k' + d_s \quad (s = 1, \ldots, r)$$

Тогда разности $(\mathbf{w}_k' - \mathbf{w}_k)$ в равенствах (1.5) для возможных ускорений, выделенных соотношениями (1.6), удовлетворяют условиям

$$\Sigma \mathbf{N}_{sk}\ (\mathbf{w}_k' - \mathbf{w}_k) = 0 \ \ (s = 1, \ldots, l),\ \ \Sigma \mathbf{N}_{sk}\ (\mathbf{w}_k' - \mathbf{w}_k) \geqslant$$
$$\geqslant 0 \quad (s = l + 1, \ldots, r). \tag{1.7}$$

имеющим такой же вид, что и условия (1.3) для виртуальных перемещений $\delta \mathbf{r}_k$.

Для выделенных возможных движений после подстановки (1.5) в (1.2) имеем

$$\Sigma\ (\mathbf{F}_k - m_k \mathbf{w}_k)(\mathbf{w}_k' - \mathbf{w}_k) \leqslant 0 \tag{1.8}$$

Введем в рассмотрение освобожденную систему: систему, которая получается из исходной после отбрасывания всех неудерживающих связей и любой части удерживающих связей. Обозначив $\mathbf{w}_k^0$ ускорения материальных точек освобожденной системы в ее действительном движении при тех же активных силах и из того же состояния, можем записать общее уравнение аналитической динамики

$$\Sigma\ (\mathbf{F}_k - m_k \mathbf{w}_k^\circ)\ \delta \mathbf{r}_k = 0 \tag{1.9}$$

Виртуальные перемещения $\delta \mathbf{r}_k$ в неравенстве (1.2) (удовлетворяющие (1.3)) являются также виртуальными перемещениями освобожденной системы и могут использоваться в уравнении (1.9). Заменив их в (1.9) выражениями (1.5), имеем уравнение

$$\Sigma\ (\mathbf{F}_k - m_k \mathbf{w}_k^\circ)(\mathbf{w}_k' - \mathbf{w}_k) = 0$$

После вычитания этого равенства из (1.8) получаем неравенство

$$\Sigma m_k\ (\mathbf{w}_k^\circ - \mathbf{w}_k)(\mathbf{w}_k' - \mathbf{w}_k) \leqslant 0$$

При учете известного свойства билинейных форм последнее неравенство преобразуется к виду

$$S_{\delta d} - S_{\delta o} + S_{do} \leqslant 0 \tag{1.10}$$

где $S_{\delta d}$ — отклонение выделенного возможного (δ) движения от действительного (d) движения системы, $S_{\delta o}$ — отклонение выделенного возможного движения от действительного движения освобожденной системы (o), S_{do} — отклонение действительного движения от действительного движения освобожденной системы

$$S_{\delta d} = \frac{1}{2} \Sigma m_k (\mathbf{w}_k' - \mathbf{w}_k)^2, \qquad S_{\delta o} = \frac{1}{2} \Sigma m_k (\mathbf{w}_k' - \mathbf{w}_k{}^\circ)^2$$

$$S_{do} = \frac{1}{2} \Sigma m_k (\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_k{}^\circ)^2$$

Так как все слагаемые в левой части неравенства (1.10) неотрицательны и равны нулю только при совпадении ускорений точек соответствующих движений, то имеем также неравенство

$$S_{do} < S_{\delta o} \tag{1.11}$$

Оно выражает принцип наименьшего принуждения для систем с неудерживающими связями в следующей форме: отклонение действительного движения от действительного же движения освобожденной системы, получающейся отбрасыванием всех неудерживающих и любой части удерживающих связей, меньше, чем отклонение любого из тех возможных движений, при которых ускорения ослабления связей не меньше ускорения ослабления их в действительном движении.

Приведем краткое обсуждение отличия доказанного утверждения от формулировки видоизмененного принципа Гаусса, обоснованного Больцманом и Болотовым [1]: отклонение действительного движения системы от действительного же ее движения, получающегося при отбрасывании всех неудерживающих связей и произвольного числа удерживающих, меньше, чем отклонение любого из возможных движений. Еще до появления работы [1], авторы, занимавшиеся исследованием систем с неудерживающими связями, отмечали трудности вывода принципа Гаусса из принципа Деламбера — Лагранжа и неясность изложения этого вопроса Больцманом [4]. Болотов подчеркивал [1], что при выводе используется следующее основное положение: вместо $\delta\mathbf{r}_k$ в неравенство (1.2) можно подставить, не опасаясь его нарушить, любые виртуальные перемещения, удовлетворяющие только тем из неравенств (1.3), которые соответствуют связям, не ослабевающим в момент времени t в действительном движении.

Отсюда видно, что в формулировке видоизмененного принципа Гаусса фигурируют возможные движения новой системы, полученной путем отбрасывания тех неудерживающих связей, которые ослабляются в действительном движении (ускорения ослабления в действительном движении больше нуля). Ослабляющиеся по ускорениям неудерживающие связи заранее, вообще говоря, неизвестны и нахождение их является одной из основных задач о движении систем с неудерживающими связями. Однако, установленное при помощи этого положения свойство действительного движения позволяет находить его среди принятых к сравнению возможных движений системы с меньшим, в общем случае, числом неудерживающих связей. Полученная здесь форма принципа использует более ограниченное множество возможных движений, в котором находится действительное движение.

Пример 1. Рассмотрим математический маятник на гибкой нити длиной l. В полярных координатах r, φ с началом в точке подвеса маятника условие освобождаемости от связи имеет вид $l - r \geqslant 0$. В состоянии «на связи» имеем $r = l$ и $r^\cdot = 0$. При помощи принципа наименьшего принуждения найдем условие ослабления нити по ускорениям ($r^{\cdot\cdot} < 0$).

Составляем функцию $S_{\delta o}$ (см. разд. 1) (m — масса материальной точки) ($w_r = r^{\cdot\cdot} - r\varphi^{\cdot 2}$, $w_\varphi = r\varphi^{\cdot\cdot} + 2r^\cdot\varphi^\cdot$)

$$2S_{\delta o} = m\,[(w_r' - w_r{}^\circ)^2 + l^2\,(w_\varphi' - w_\varphi{}^\circ)^2]$$

Свободная материальная точка (в силовом поле математического маятника) имеет ускорение свободного падения g, поэтому в состоянии r, φ, $r^{\cdot}$, $\varphi^{\cdot}$ ($r = l$, $r^{\cdot} = 0$) обобщенные ускорения освобожденной материальной точки таковы:

$$r^{\cdot\cdot 0} = r\varphi^{\cdot 2} + g\cos\varphi, \quad \varphi^{\cdot\cdot 0} = -gl^{-1}\sin\varphi$$

Необходимые условия минимума функции S_{δ_0} данного примера ($\partial S_{\delta_0}/\partial r^{\cdot\cdot\prime} = 0$, $\partial S_{\delta_0}/\partial \varphi^{\cdot\cdot\prime} = 0$) приводят к выражениям

$$r^{\cdot\cdot} = l\varphi^{\cdot 2} + g\cos\varphi, \quad \varphi^{\cdot\cdot} = -gl^{-1}\sin\varphi$$

из которых при учете неравенства $r^{\cdot\cdot} < 0$ (условие ослабления) следует известное неравенство (φ_0, φ_0', $r_0 = l$, $r_0^{\cdot} = 0$ — начальные условия)

$$l\varphi_0^{\cdot 2} + g(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0) < 0$$

определяющее угол φ в момент смятия нити.

Пример 2. Пусть круглый неоднородный абсолютно твердый диск радиусом R и массой m катится без скольжения по прямолинейной горизонтальной направляющей в однородном поле силы тяжести (плоское движение в вертикальной плоскости). Центр масс C расположен на расстоянии a от центра O диска (не обязательно $a \leqslant R$), момент инерции диска относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, равен J. В основной системе координат (одна ось направлена по горизонтальной направляющей в сторону движения центра O диска, другая — вертикально вверх) положение диска определяется координатами x, y центра O и углом поворота φ (между вертикальной осью и лучом OC).

Одностороннее ограничение в виде горизонтальной направляющей и условие качения без скольжения представляют неудерживающую и удерживающую связи: $y - R \geqslant 0$, $x - R\varphi = 0$. При выполнении этих условий в виде равенств, а также $y^{\cdot} = 0$ и $x^{\cdot} - R\varphi^{\cdot} = 0$ ускорения должны удовлетворять условиям

$$y^{\cdot\cdot} \geqslant 0, \quad x^{\cdot\cdot} - R\varphi^{\cdot\cdot} = 0 \tag{1.12}$$

Найдем условия, при которых первая связь (1.12) в действительном движении ослабляется ($y^{\cdot\cdot} > 0$). При этом предположим, что вторая связь (1.12) продолжает существовать. Не обсуждая вопрос реализуемости связей, рассматриваемых как идеальные, отметим реалистичность ситуации для некоторых движений при описании взаимодействия в точке контакта согласно закону сухого трения Амонтона — Кулона, учитывающему силу молекулярного притяжения (см., например, [5]).

Освобожденную систему получим, освободив диск от связей (1.12). Для диска, совершающего свободное плоское движение, имеем

$$x^{\cdot\cdot 0} = a\varphi^{\cdot 2}\sin\varphi, \quad y^{\cdot\cdot 0} = -g + a\varphi^{\cdot 2}\cos\varphi, \quad \varphi^{\cdot\cdot 0} = 0$$

Составляем функцию S_{δ_0}, характеризующую отклонения возможных движений от движения свободного диска

$$2S_{\delta_0} = m\,[(x^{\cdot\cdot\prime} - x^{\cdot\cdot 0})^2 + (y^{\cdot\cdot\prime} - y^{\cdot\cdot 0})^2 + 2a\,(x^{\cdot\cdot\prime} - x^{\cdot\cdot 0})(\varphi^{\cdot\cdot\prime} - \varphi^{\cdot\cdot 0})\cos\varphi -$$
$$- 2a\,(y^{\cdot\cdot\prime} - y^{\cdot\cdot 0})(\varphi^{\cdot\cdot\prime} - \varphi^{\cdot\cdot 0})\sin\varphi] + (J + ma^2)(\varphi^{\cdot\cdot\prime} - \varphi^{\cdot\cdot 0})^2$$

Необходимые условия минимума функции S_{δ_0} при втором ограничении (1.12) на возможные ускорения имеют вид (λ — неопределенный множитель)

$$\begin{gathered} \partial S_{\delta_0}/\partial x^{\cdot\cdot\prime} + \lambda = 0, \quad \partial S_{\delta_0}/\partial y^{\cdot\cdot\prime} = 0 \\ \partial S_{\delta_0}/\partial \varphi^{\cdot\cdot\prime} - \lambda R = 0, \quad x^{\cdot\cdot\prime} - R\varphi^{\cdot\cdot\prime} = 0 \end{gathered} \tag{1.13}$$

Действительному движению ($y^{\cdot\cdot} > 0$) соответствуют значения $x^{\cdot\cdot}$, $y^{\cdot\cdot}$, $\varphi^{\cdot\cdot}$, λ, являющиеся решениями уравнений (1.13). В этих уравнениях частные производные, вычисленные для действительного движения (укажем это обстоятельство, заключив их в круглые скобки), имеют следующую механическую интерпретацию: $(\partial S_{\delta_0}/\partial x^{\cdot\cdot\prime})$ — равна горизонтальной составляющей реакции в точке контакта; $(\partial S_{\delta_0}/\partial y^{\cdot\cdot\prime}) = m\,(y_c^{\cdot\cdot} + g)$ (y_c — координата центра масс). Для выяснения механического смысла $(\partial S_{\delta_0}/\partial \varphi^{\cdot\cdot\prime})$. введем центр качаний O_1 (точку, расположенную от центра O на расстоянии l, равном приведенной длине физического маятника, для которого O — точка подвеса ($|OO_1| = l = a + a_1$, $a_1 = J/(ma)$). Тогда $(\partial S_{\delta_0}/\partial \varphi^{\cdot\cdot\prime}) = ma\,(w - g\sin\varphi)$, где w — проекция абсолютного ускорения точки O_1 на поперечное (трансверсальное) направление полярных осей, в которых точка O_1 имеет координаты l, φ (начало полярной системы координат в точке O).

Определитель системы уравнений (1.13) относительно $x^{\cdot\cdot\prime}$, $y^{\cdot\cdot\prime}$, $\varphi^{\cdot\cdot\prime}$ при вещественных значениях угла φ может обратиться в нуль, если только $l = a$ (масса сосредоточена в точке C, $J = 0$), при значениях $\cos\varphi = -R/a$. Этот случай соответствует неединственности решения задачи (модель некорректна).

Из уравнений (1.13) находим выражение неопределенного множителя

$$\lambda = -m(l-a)\varphi^{\cdot\cdot 2}\sin\varphi/\Delta \tag{1.14}$$

$$(\Delta = \sin^2\varphi - 2\nu\cos\varphi - \mu - \nu^2 < 0,\ \mu = l/a,\ \nu = R/a$$

При учете условия $y^{\cdot\cdot} > 0$ из второго уравнения системы (1.13) следует неравенство

$$a\varphi^{\cdot\cdot}\sin\varphi > g - a\varphi^{\cdot 2}\cos\varphi \tag{1.15}$$

Третье уравнение системы (1.13) представляется в виде

$$w = g\sin\varphi + \lambda\nu/m \tag{1.16}$$

Полученные условия выражают следующие свойства движения диска в момент отрыва от основания. При условии (1.15) выполняется неравенство $(\partial S_{\delta_3}/\partial y^{\cdot\cdot\prime}) \leqslant 0$, при $y^{\cdot\cdot} = 0$ (связь ненапряжена).

Определитель системы уравнений (1.13) неограниченно возрастает по модулю при $a \to 0$ (центр масс приближается к центру диска). При этом неравенство (1.15) не может быть выполнено при достаточно малых значениях a и, следовательно, ослабление неудерживающей связи произойти не может.

Если ослабление первой связи (1.12) происходит при $\varphi = 0$, то горизонтальная составляющая реакции равна нулю (см. (1.14)), $a\varphi^{\cdot 2} > g$ (см. (1.15)) и $w = 0$. При $\varphi = \pi$ ослабления связи не происходит, так как не выполняется неравенство (1.15).

В момент ослабления первой связи (1.12) знаки w и λ совпадают со знаком $\sin\varphi$, проекция реакции на горизонтальную ось имеет знак, противоположный знаку $\sin\varphi$.

Если после ослабления неудерживающей связи (первой связи (1.12)) происходит устранение второй связи (1.12), то $x^{\cdot\cdot}$, $y^{\cdot\cdot}$, $\varphi^{\cdot\cdot}$ принимают значения $x^{\cdot\cdot\circ}$, $y^{\cdot\cdot\circ}$, $\varphi^{\cdot\cdot\circ}$. Отрыв диска от основания произойдет, если $y^{\cdot\cdot\circ} > 0$. Если же имеется интервал времени, на котором наряду с неравенством (1.15) выполняется неравенство $y^{\cdot\cdot\circ} < 0$, то будет иметь место процесс, характерный для систем с переменной структурой.

2. В продолжение развития мысли Маха о наименьшем отклонении действительного движения от движения системы с меньшим числом связей (отметим, однако, что в контексте этого высказывания [6] нет упоминания о неудерживающих связях) проведем сравнение действительного движения с возможными по отклонению их от движения системы освобожденной не от всех, а от части неудерживающих связей.

Пусть предполагается проводить сравнение движений по отклонению от движения системы, в которой оставлена любая часть удерживающих и любая часть неудерживающих связей. Изменив нумерацию, присвоим им номера $s = 1, \ldots, p$.

Выделим возможные движения с возможными ускорениями $\mathbf{w}_k'$ ($k = 1, \ldots, n$), удовлетворяющими условиям

$$\alpha_s' = \alpha_s \geqslant 0 \quad (s = 1, \ldots, p) \tag{2.1}$$

Обозначим A множество ускорений, удовлетворяющих условиям (2.1) ($A = \{\mathbf{w}_k' : \alpha_s' = \alpha_s \geqslant 0 \quad s = 1, \ldots, p\}$). При подстановке ускорений $\mathbf{w}_k' \in A$ в связи с номерами $p+1, \ldots, r$, последние можно разделить на две группы, сравнив величины α_s' и α_s ($s = p+1, \ldots, r$):

$$\alpha_s' \geqslant \alpha_s \geqslant 0 \quad (s = p+1, \ldots, q \leqslant r) \tag{2.2}$$

$$\alpha_s > \alpha_s' \geqslant 0 \quad (s = q+1, \ldots, r) \tag{2.3}$$

В группу (2.3) входят неудерживающие связи, которые ослабляются в действительном движении. Поэтому виртуальные перемещения $\delta\mathbf{r}_k$ в (1.2) не обязаны удовлетворять части неравенств (1.3) с номерами $q + 1, \ldots, r$ (согласно положению Больцмана — Болотова, см. разд. 1). Систему со связями $s = 1, \ldots, p$, ускорения точек которой ($\mathbf{w}_k^*$ $k =$

$= 1, \ldots, n$) удовлетворяют равенствам

$$\alpha_s^* = \alpha_s \quad (s = 1, \ldots, p), \ \alpha_s^* = \Sigma \mathbf{N}_{sk}\mathbf{w}_k^* + d_s \tag{2.4}$$

будем называть системой сравнения.

При учете соотношений (1.5) и (2.4) виртуальные перемещения в системе сравнения удовлетворяют равенствам

$$\Sigma \mathbf{N}_{sk}\delta\mathbf{r}_k = 0 \ (s = 1, \ldots, p)$$

Поэтому для системы сравнения имеем общее уравнение аналитической динамики

$$\Sigma (\mathbf{F}_k - m_k\mathbf{w}_k^*) \, \delta\mathbf{r}_k = 0 \tag{2.5}$$

Использование системы сравнения в рассуждениях разд. 1 вместо освобожденной системы приводит к следующей форме принципа для систем с неудерживающими связями: отклонение действительного движения системы от движения системы сравнения, полученной отбрасыванием (r — — p) удерживающих и неудерживающих связей, с ускорениями $\mathbf{w}_k^* \in \in A = \{\mathbf{w}_k' : \alpha_s' = \alpha_s \geqslant 0 \quad s = 1, \ \ldots, \ p\}$ является наименьшим по сравнению с отклонениями возможных движений с возможными ускорениями

$$\mathbf{w}_k' \in A \cap B$$

$$B = \{\mathbf{w}_k' : \alpha_s' \geqslant \alpha_s \geqslant 0, \ s = p + 1, \ldots, q \leqslant r\}$$

Видоизменение принципа Гаусса (по Больцману и Болотову) — частный случай этого утверждения при $\alpha_s' = \alpha_s = 0$ ($s = 1, \ldots, p$) (p — число удерживающих связей после отбрасывания всех неудерживающих и части удерживающих связей), $\alpha_s' \geqslant \alpha_s = 0$ ($s = p + 1, \ldots, q$).

Форма принципа, полученная в разд. 1, — также частный случай при

$$\alpha_s' = \alpha_s = 0 \quad (s = 1, \ldots, p \leqslant l), \ \alpha_s' \geqslant \alpha_s \geqslant 0 \quad (s = p + 1, \ldots r)$$

Заметим, что вывод новых форм принципа не изменится при наличии связей, линейно зависящих от ускорений точек.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотов Е. А.* О принципе Гаусса // Изв. физ.-матем. о-ва при Казан. ун-те. Казань: Тип. ун-та, 1916. 54 с.
2. *Суслов Г. К.* Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1944. 655 с.
3. *Остроградский М. В.* О принципе виртуальных скоростей и о силах инерции. Л.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 270—279.
4. *Boltzmann L.* Vorlesungen über die Principe der Mechanik. T. 1. 1897. Leipzig: J. A. Barth., 1922. 241 s.
5. Вибрации в технике. Т. 4. Под ред. *Лавендела Э. Э.* М.: Машиностроение, 1981. 509 с.
6. *Мах Э.* Механика. Историко-критический очерк ее развития: Пер. с 6-го нем. изд. С.- Пб.: Тип. о-ва «Общественная польза». 1909. 448 с.

Болшево

Поступила в редакцию
22.XI.1988