Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 6, 1990

УДК 531.36

В. И. Орехов

СТАЦИОНАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ СИСТЕМ С КВАДРАТИЧНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Рассматриваются консервативные системы с дополнительным интегралом движения, квадратичным по скорости. Предлагается учитывающий специфику механических задач метод описания стационарных движений и интегральных поверхностей в фазовом пространстве. В качестве примера исследуется неголономный случай движения твердого тела, несущего гироскоп.

Топологический анализ механических систем с известными интегралами $F_1, \ldots, F_k$ состоит в описании поверхностей в фазовом пространстве, заданных фиксированными значениями этих интегралов, и их бифуркаций [1]. Точки бифуркаций определяются условием зависимости интегралов $\Sigma\lambda_i dF_i = 0$ (λ_i — множители Лагранжа), или $dF_\lambda = 0$, где $F_\lambda = \Sigma\lambda_i F_i$ — связка интегралов с постоянными коэффициентами λ_i. Условие $dF_\lambda = 0$ инвариантно [2], т. е. выполнено на всей траектории системы, начинающейся в критической точке связки F_λ. Движение в этом случае называется стационарным. Такие движения изучались многими авторами, например [3—7]. В типичном случае они образуют семейства, параметризованные значениями постоянных λ_i.

Таким образом, топологический анализ связан с описанием стационарных движений. Когда интегралы (кроме энергии) линейны по скорости, для решения обеих этих задач используется приведенный потенциал [1, 8]. В данной работе рассматривается функция, играющая аналогичную роль для консервативной системы с квадратичным по скорости дополнительным интегралом.

1. Пусть M — конфигурационное многообразие с римановой формой $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Чтобы охватить неголономный случай, в качестве фазового пространства рассмотрим m-мерное подрасслоение $T'M$ касательного расслоения TM: в каждой точке $x \in M$ слой T'_xM этого подрасслоения есть пространство скоростей, допускаемых связями (в голономном случае $T'M = TM$). Пусть интегралы таковы:

$$H(\mathbf{v}) = {}^1/_2\langle\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle + V(x),\ F(\mathbf{v}) = {}^1/_2\langle\Gamma\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle + \langle\mathbf{a}, \mathbf{v}\rangle + W(x)$$

где $\mathbf{v} \in T'M$ — вектор скорости в точке $x \in M$, V и W — функции позиционных переменных, Γ — симметричный послойный линейный оператор, $\mathbf{a}$ — векторное поле на M. Можно считать, что Γ действует из $T'M$ в $T'M$ и что $\mathbf{a} \in T'M$, в противном случае заменим их на $Pr \circ \Gamma$ и $Pr(\mathbf{a})$, где Pr — послойный оператор ортогональной проекции на $T'M$.

Для удобства временно примем, что над каждой точкой x оператор Γ имеет m различных собственных значений $\mu_1(x) < \ldots < \mu_m(x)$, и $\mathbf{a}_i(x) \neq 0$, $i = 1, \ldots, m$, где $\mathbf{a}_i$ — составляющая вектора $\mathbf{a}$ по собственному направлению Γ, $\Gamma\mathbf{a}_i = \mu_i\mathbf{a}_i$, $\Sigma\mathbf{a}_i = \mathbf{a}$.

Найдем критические точки связки интегралов F_λ

$$F_\lambda = \lambda H + F = {}^1/_2\langle(\Gamma + \lambda E)\,\mathbf{v},\ \mathbf{v}\rangle + \langle\mathbf{a},\ \mathbf{v}\rangle + \lambda V + W. \quad (1.1)$$

Пусть в точке $\mathbf{v} \in T'M$ обращаются в нуль частные производные F_λ по скоростям, т. е. $(\Gamma + \lambda E)\,\mathbf{v} + \mathbf{a} = 0$. Векторы $\mathbf{v}$, удовлетворяющие этому условию, назовем критическими, соответствующими данному значению λ. Над каждой точкой x такой вектор определен однозначно при

$\lambda \neq -\mu_i(x)$; обозначим его

$$v_\lambda = -(\Gamma + \lambda E)^{-1}a \tag{1.2}$$

Критических векторов над точкой x, соответствующих $\lambda = -\mu_i(x)$, не существует ввиду $a_i \neq 0$. Из множества векторов (1.2) критические точки интеграла F_λ выделяются условием обращения в нуль дифференциала функции

$$\Phi_\lambda(x) = F_\lambda(v_\lambda) = -{}^1/_2\langle(\Gamma + \lambda E)^{-1}a, a\rangle + \lambda V + W \tag{1.3}$$

определенной на M всюду, кроме точек, где $-\mu_i(x) = \lambda$. Следовательно, критические точки v интегралов H, F, соответствующие данному λ, определяются условием

$$v = v_\lambda(x), \quad d\Phi_\lambda(x) = 0 \tag{1.4}$$

При каждом значении λ по критическим точкам функции Φ_λ проходят стационарные движения со скоростью v_λ.

Условию $dH = 0$ формально соответствует $\lambda = \infty$. Вместо (1.4) получим $v = 0$, $dV = 0$, что определяет точки равновесия.

Установим некоторые соотношения для Φ_λ и v_λ.

Утверждение 1. При каждом λ функция Φ_λ инвариантна относительно поля v_λ.

Доказательство. В каждом слое $T_x'M$ выполним преобразование $v \to w = (\Gamma + \lambda E)v + a$. Тогда из (1.1), (1.3) следует

$$F_\lambda = {}^1/_2\langle(\Gamma + \lambda E)^{-1}w, w\rangle + \Phi_\lambda$$

На произвольной траектории получим

$$0 = \frac{dF_\lambda}{dt} = {}^1/_2\left\langle\frac{d}{dt}(\Gamma + \lambda E)^{-1}w, w\right\rangle + \left\langle(\Gamma + \lambda E)^{-1}w, \frac{dw}{dt}\right\rangle + \frac{d\Phi_\lambda}{dt}$$

и если начальная скорость равна v_λ, то при $t = 0$ имеем $w = w(v_\lambda) = 0$, производная от Φ_λ равна $v_\lambda(\Phi_\lambda)$, следовательно, $v_\lambda(\Phi_\lambda) = 0$, что и требовалось.

Рассмотрим величину Φ_λ как функцию $\Phi(\lambda, x) = \Phi_\lambda(x)$, определенную на $R \times M$ всюду, за исключением поверхностей разрыва $\{\mu_i(x) + \lambda = 0\}$. Из (1.1)—(1.3) следует

$$H(v_\lambda) = {}^1/_2\langle(\Gamma + \lambda E)^{-2}a, a\rangle + V = \partial\Phi/\partial\lambda \tag{1.5}$$
$$F(v_\lambda) = \Phi - \lambda H(v_\lambda) = \Phi - \lambda\partial\Phi/\partial\lambda$$

2. Поверхности $I_{hf} \subset T'M$, соответствующие фиксированным значениям интегралов $H = h$, $F = f$, являются прообразами пар (h, f) при интегральном отображении $H \times F : T'M \to R^2$. Их топологический тип сохраняется при малом изменении точки $(h, f) \in R^2$ общего положения и меняется при переходе (h, f) через бифуркационное множество $\Sigma \subset R^2$, которое включает пары критических значений интегралов (и исчерпывается ими, если все I_{hf} компактны).

В рассматриваемом случае критические точки интегрального отображения определяются критическими точками функций Φ_λ. В силу утверждения 1 последние при каждом λ образуют множество, инвариантное относительно v_λ. В типичном случае при изменении λ получим гладкое семейство диффеоморфных множеств критических точек. Пусть $h(\lambda)$, $f(\lambda)$ — критические значения интегралов, определенные согласно (1.4) критическими точками Φ_λ из такого семейства. Тогда кривая $(h(\lambda), f(\lambda))$, параметризованная значением λ, входит в бифуркационное множество.

Утверждение 2. На рассматриваемой бифуркационной кривой выполнено равенство

$$df/dh = -\lambda$$

Доказательство. В каждом критическом множестве функции Φ_λ выберем точку $x(\lambda)$ так, чтобы получилась гладкая кривая в M. По определению значений $h(\lambda)$, $f(\lambda)$ и в силу (1.3) $\lambda h(\lambda) + f(\lambda) = \Phi_\lambda(x(\lambda))$. Дифференцируя по λ и используя соотношение $d\Phi_\lambda = 0$ в точке $x(\lambda)$, из (1.5) получим равенство $\lambda h' + f' = 0$, равносильное доказываемому.

3. Рассмотрим проекцию $\pi: I_{hf} \to M$ интегральной поверхности на конфигурационное многообразие. Механический смысл отображения π отмечен, например,[1] и более подробно в [9]: образ $\pi(I_{hf}) = M_{hf}$ является областью возможности движения (ОВД) при данных значениях интегралов; прообраз $\pi^{-1}(x)$, т. е. сечение $I_{hf} \cap T_x M$, представляет собой множество возможных скоростей в точке x. Множество критических образов π называется обобщенной границей ОВД [9]; над ней происходят бифуркации сечений $\pi^{-1}(x)$.

Были описаны [9] ОВД и их обобщенные границы для некоторых интегрируемых задач динамики твердого тела с неоднородно квадратичными интегралами. Здесь приведем общий метод описания ОВД M_{hf} и обобщенных границ, которые обозначим δM_{hf}, при помощи функций $\Phi_\lambda(x)$ или $\Phi(\lambda, x)$.

Пусть $\Phi_h(\lambda, x) = \Phi(\lambda, x) - \lambda h$ — новая функция в $R \times M$. Рассмотрим поверхность уровня $S = \{\Phi_h = f\}$ и ее проекцию $S \to M$. Сечения $S \cap \{\lambda = \text{const}\}$ проектируются в поверхности уровня функций Φ_λ на M, которые обозначим $P(\lambda)$; $P(\lambda) = \{\Phi_\lambda(x) - \lambda h = f\}$.

Утверждение 3. Обобщенная граница δM_{hf} является множеством критических образов проекции $S \to M$, или, что то же самое, огибающей семейства поверхностей $P(\lambda)$.

Доказательство. Точка $x \in M$ входит в δM_{hf} при условии, что $\pi^{-1}(x)$ содержит критическую точку отображения π, т. е. критический вектор $\mathbf{v}_\lambda \in I_{hf}$. Тогда $H(\mathbf{v}_\lambda) = h$, $F(\mathbf{v}_\lambda) = f$ и ввиду (1.5)

$$\partial\Phi/\partial\lambda - h = 0, \quad \Phi(\lambda, x) - \lambda h = f$$

что и доказывает утверждение.

Используя разложение $\mathbf{a}$ по собственным направлениям оператора Γ, можно записать

$$\Phi_h(x, \lambda) = -{}^1/_2 \sum_{i=1}^{m} \frac{\mathbf{a}_i^2(x)}{\mu_i(x) + \lambda} + \lambda(V(x) - h) + W(x) \tag{3.1}$$

откуда видно, что поверхность S состоит из компонент S_j, $j = 0, 1, \ldots, m$, разделенных поверхностями разрыва функции (3.1) $\{\mu_i(x) + \lambda = 0\}$. В соответствии с этим у каждой поверхности $P(\lambda) \subset M$ выделим компоненты

$$P_j(\lambda) = P(\lambda) \cap \{-\mu_j(x) < \lambda < -\mu_{j-1}(x)\}, \quad j = 2, \ldots, m$$

$$P_1(\lambda) = P(\lambda) \cap \{-\mu_1(x) < \lambda\}, \quad P_0(\lambda) = P(\lambda) \cap \{-\mu_m(x) > \lambda\}$$

Для каждого λ рассмотрим также области

$$C_1(\lambda) = \{\Phi_\lambda - \lambda h < f\} \cap \{-\mu_1(x) < \lambda\} \subset M$$

$$C_0(\lambda) = \{\Phi_\lambda - \lambda h > f\} \cap \{-\mu_m(x) > \lambda\} \subset M$$

[1] *Орехов В. И.* Геометрический и топологический анализ интегралов движения в задачах аналитической механики: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.01. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1970. 12 с.

Пусть F_x — сужение интеграла F на сферу $\{\mathbf{v} \in T_x' M : H(\mathbf{v}) = h\}$ над x. Критические значения F_x равны $F(\mathbf{v}_\lambda)$ и ввиду (1.5) совпадают с критическими значениями Φ_h как функции от λ при фиксированном x. Отсюда следует, что при изменении x бифуркации множеств уровня $\{F_x = f\}$ и $\{\Phi_h = f\}$ происходят одновременно, и, значит, топологический тип множества возможных скоростей $\pi^{-1}(x) = \{F_x = f\}$ однозначно соответствует распределению корней уравнения $\Phi_h = f$ на оси $\{\lambda\} \times x$. Каждому корню соответствует точка над x на поверхности S_j, а также проходящая через x кривая $P_j(\lambda)$. Опуская подробные доказательства, приведем результаты, основанные на таком сопоставлении.

Утверждение 4. ОВД M_{hf} описываются следующими равенствами:

$$M \setminus M_{hf} = \bigcup_\lambda (C_1(\lambda) \cup C_0(\lambda))$$

$$M \setminus \operatorname{Int} M_{hf} = \bigcup_\lambda (P_1(\lambda) \cup P_0(\lambda))$$

Пусть D_1 — множество точек $x \in M$, через которые проходит ровно по одной поверхности каждого семейства P_j, $j = 2, \ldots, m$, и ни одной поверхности P_1, P_0; множество D_i, $i = 2, \ldots, m$, состоит из точек, через которые проходят по три поверхности семейства P_i, по одной — семейств P_j, $j = 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m$, и ни одной из P_1, P_0.

Утверждение 5. Обблась $M_{hf} \setminus \delta M_{hf}$ есть объединение всех областей $D_{1,\ldots,m}$. Над всеми точками каждой связной компоненты области D_i множества возможных скоростей диффеоморфны между собой.

4. Ослабим предположение о собственных значениях оператора Γ и собственных составляющих вектора $\mathbf{a}$. Пусть в M существуют поверхности $\{\mu_j(x) = \mu_{j+1}(x)\}$ и $\{\mathbf{a}_i(x) = 0\}$. Над точкой $x \in \{\mathbf{a}_i = 0\}$ критический вектор $\mathbf{v}$ при $\lambda = -\mu_i(x)$ определяется условием $(\Gamma + \lambda E)\mathbf{v} + \mathbf{a} = 0$ неоднозначно. Пусть один из таких векторов является критической точкой интегралов. Рассмотрим начинающееся с него стационарное движение. Если траектория пересекает множество $\{-\mu_i(x) = \lambda\}$ в отдельных точках, то в остальных ее точках выполнено условие (1.4), следовательно, она является замыканием множества критических точек функции Φ_λ. В противном случае получим движение по точкам поверхности $\{-\mu_i(x) = \lambda\} \cap \{\mathbf{a}_i(x) = 0\}$ меньшей размерности, подробный анализ которого здесь опускаем.

Рассматривая проекцию $\pi : I_{hf} \to M$, заметим, что среди ее критических прообразов могут быть векторы $\mathbf{v} \neq \mathbf{v}_\lambda$ над точками $x \in \{-\mu_i = \lambda\} \cap \{\mathbf{a}_i = 0\}$. Утверждение 3 уточняется следующим образом: δM_{hf} есть замыкание множества критических образов проекции $S \to M$ и огибающей семейства поверхностей $P(\lambda)$. В утверждении 4 множества $\bigcup P_0(\lambda)$, $\bigcup P_1(\lambda)$ заменяются на их замыкания. При описании областей D_i, фигурирующих в утверждении 5, наряду с $P_j(\lambda)$ рассматриваются поверхности $\{\mu_j(x) = \mu_{j+1}(x)\}$.

5. В качестве примера рассмотрим движение закрепленного в центре масс твердого тела, с которым жестко связан гироскоп с постоянным кинетическим моментом $\mathbf{k}$. Пусть на систему наложена неголономная связь $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = 0$, где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость, $\boldsymbol{\gamma}$ — единичный вектор неподвижной оси. Задача имеет интегралы [10]

$$H = {}^1/_2 (J\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}), \quad F = {}^1/_2 [\mathbf{K}^2 - (\mathbf{K}, \boldsymbol{\gamma})^2]$$

Здесь J — тензор инерции, главные значения которого обозначим

$J_1 > J_2 > J_3$, $\mathrm{K} = J\hat{\omega} + \mathbf{k}$ — кинетический момент системы. В данном случае

$$\Gamma\boldsymbol{\omega} = J\boldsymbol{\omega} - (J\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{k} - (\mathbf{k}, \boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma},$$
$$2W = \mathbf{k}^2 - (\mathbf{k}, \boldsymbol{\gamma})^2, \ V \equiv 0$$

Введем обозначения $G_\lambda = (J + \lambda E)^{-1}$, $\mathbf{e} = |\mathbf{k}|^{-1}\mathbf{k}$.

В силу симметрии относительно поворотов вокруг $\boldsymbol{\gamma}$ можно считать, что M — сфера Пуассона. Рассмотрим на ней координаты u, v, определенные условиями $\rho(-u) = \rho(-v) = 0$, где $\rho(w) = (G_w\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})$, и принимающие значения $J_1 \leqslant u \leqslant J_2 \leqslant v \leqslant J_3$. (В этих координатах задача интегрируется при $k = 0$ [11].) Направления координатных линий являются собственными направлениями оператора Γ, собственные значения равны u, v.

Точки $\{\boldsymbol{\gamma} : \mathbf{a}_i(\boldsymbol{\gamma}) = 0\}$ определяются условиями $(G_{-u}\mathbf{k}, \boldsymbol{\gamma}) = 0$ или $(G_{-v}\mathbf{k}, \boldsymbol{\gamma}) = 0$ и геометрически описываются как точки касания координатных линий с окружностями, проходящими через $\pm\mathbf{e}$.

Критические векторы $\boldsymbol{\omega}_\lambda$ и функции Φ_λ таковы:

$$\boldsymbol{\omega}_\lambda = G_\lambda(\vartheta\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{k}), \ \vartheta = (G_\lambda\mathbf{k}, \boldsymbol{\gamma})(G_\lambda\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})^{-1} \tag{5.1}$$
$$\Phi_\lambda = {}^1/_2\lambda\,[(G_\lambda\mathbf{k}, \mathbf{k}) - (G_\lambda\mathbf{k}, \boldsymbol{\gamma})^2(G_\lambda\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})^{-1}]$$

Критическими точками Φ_λ являются $\pm\mathbf{e}$ и точки окружности $L_\lambda = \{(G_\lambda\mathbf{k}, \boldsymbol{\gamma}) = 0\}$. Для каждого $\lambda \neq -J_i$ получаем стационарное движение по L_λ со скоростью $\boldsymbol{\omega} = -G_\lambda\mathbf{k}$, которому соответствуют значения интегралов

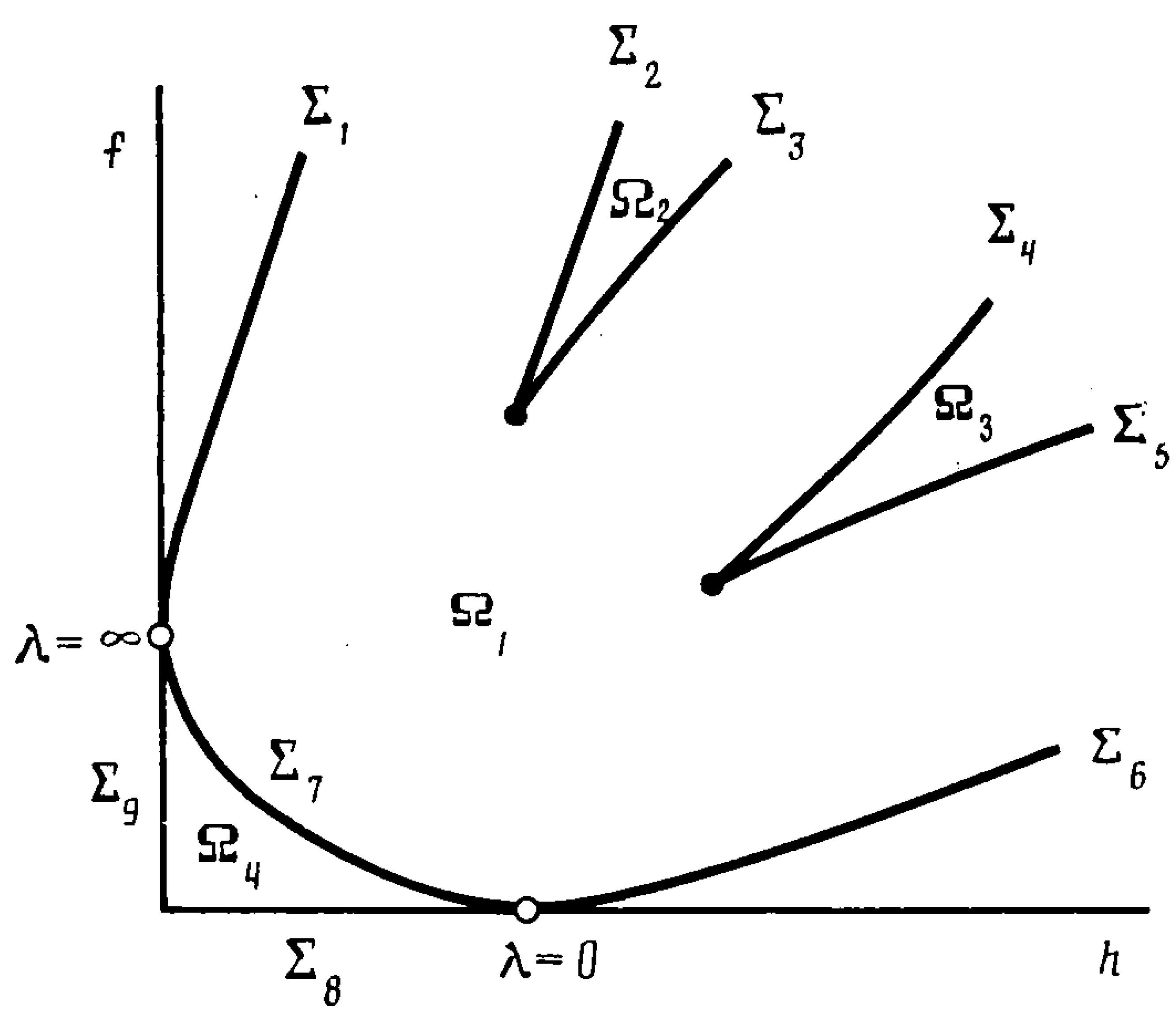
$$h(\lambda) = {}^1/_2\,(JG_\lambda^2\mathbf{k}, \mathbf{k}), f(\lambda) = {}^1/_2\lambda^2\,(G_\lambda\mathbf{k})^2 \tag{5.2}$$

При $\lambda = 0$ функция Φ_λ тождественно равна нулю. Получаем семейство стационарных движений со скоростью ω_0, определяемой из (5.1) при $\lambda = 0$. Значения интегралов таковы:

$$h = {}^1/_2\,[(J^{-1}\mathbf{k}, \mathbf{k}) - (J^{-1}\mathbf{k}, \boldsymbol{\gamma})^2(J^{-1}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})^{-1}], \ f = 0 \tag{5.3}$$

Первое из этих равенств определяет траектории — пару кривых L_h, соответствующих данному h. Равновесию, которое ввиду $V \equiv 0$ возможно в любой точке, отвечают значения

$$h = 0, f = {}^1/_2\,[\mathbf{k}^2 - (\mathbf{k}, \boldsymbol{\gamma})^2] \tag{5.4}$$



Множества $\{\mu_i = \mathrm{const}\} \cap \{\mathrm{a}_i = 0\}$ состоят из отдельных точек на сфере Пуассона, и поскольку $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = 0$, стационарных движений помимо указанных не существует.

Бифуркационное множество Σ приведено на фигуре. Отрезки Σ_i, $i = 1, \ldots, 7$, описываются параметрически уравнениями (5.2), где λ изменяется соответственно в интервалах $(-\infty, -J_1)$, $(-J_1, -u_0]$, $[-u_0, -J_2)$, $(-J_2, -v_0]$, $[-v_0, -J_3])$, $(-J_3, 0]$, $[0, +\infty)$; u_0, v_0 — координаты точек $\pm\mathbf{e}$. Отрезки Σ_8, Σ_9 состоят из точек (5.3) и (5.4).

Установим тип интегральных многообразий I_{hf} для различных областей $R^2 \setminus \Sigma$, рассматривая значения h, f, близкие к критическим. Пусть точка из Σ_6 определяется значением параметра $\lambda = \alpha$. Соответствующая критическая интегральная поверхность содержит стационарное движение по окружности L_α, причем вектор скорости $\boldsymbol{\omega}_\alpha$ является точкой минимума интеграла F на сфере $\{\boldsymbol{\omega}: H(\boldsymbol{\omega}) = h\}$. Функция Φ_α принимает на L_α минимальное значение $\min \Phi_\alpha = \alpha h + f$, поэтому все остальные точки лежат в области $\{\Phi_\alpha - \alpha h > f\} = C_1(\alpha)$, и в силу (3.2) $M_{hf} = L_\alpha$. При уменьшении f получим $C_1(\alpha) = M$, т. е. $M_{hf} = \varnothing$, $I_{hf} = \varnothing$. При малом увеличении f все $C_0(\lambda)$ пусты, все непустые $C_1(\lambda)$ представляют собой пару открытых дисков, каждый из которых содержит по одной из точек $\pm\mathbf{e}$ и не пересекается с L_α; следовательно, M_{hf} — кольцо вокруг L_α. Множество возможных скоростей над внутренними точками M_{hf} — пара векторов вблизи минимума F на окружности $\{H(\omega) = h\}$, над граничными точками — один вектор минимума. Таким образом, для $(h, f) \in \Omega_1$ (фигура) интегральное многообразие I_{hf} — тор.

Аналогично получим, что точке на Σ_5 соответствует стационарное движение, из которого при переходе в Ω_2 возникает второй тор. Переходу через Σ_4 в Ω_1 отвечает слияние двух торов в один по точкам стационарного движения. При переходе через Σ_3 и Σ_2 эволюция происходит в обратном порядке: тор расщепляется на два, один из которых затем стягивается в изолированную траекторию стационарного движения и исчезает. Над Σ_1 стягивается в стационарную траекторию оставшийся тор. Если $(h, f) \in \Sigma_8$, то I_{hf} — пара стационарных траекторий над кривыми L_h. При малом увеличении f возникает по тору вокруг каждой из этих траекторий; при переходе через Σ_7 в Ω_1 торы сливаются в один. Итак, интегральные многообразия, соответствующие точкам из $\Omega_{2,3,4}$, представляют собой пару торов. Для точек вне Ω_i, Σ_j они пусты. Описание ОВД M_{hf} для всех значений h, f имеет много вариантов в зависимости от значений $\mathbf{k}$, J_i и весьма громоздко.

Из проведенного анализа заключаем, что при малом возмущении стационарных траекторий, соответствующих точкам из Σ_i, $i = 1, 2, 5, 6, 8$, получаются движения по близким торам, следовательно, эти траектории устойчивы по части переменных. Равновесия устойчивы в точках $\pm\mathbf{e}$, при $f = 0$: при их малом возмущении ОВД — малые области, близкие к этим точкам.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Smale S.* Topology and mechanics // Invent. math. 1970. V. 10. No. 4. P. 306—331. V. 11. No. 1. P. 45—64. — *Смейл С.* Топология и механика // Успехи мат. наук. 1972. Т. 27. № 2. С. 77—120.
2. *Леви-Чивита Т.*, *Амальди У.* Курс теоретической механики. Т. 2. Ч. 2. М.: Изд-во иностр. лит. 1951. 555 с.
3. *Ляпунов А. М.* О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости // Собр. соч. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1954. С. 276—319.
4. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
5. *Румянцев В. В.* О стационарных движениях и их устойчивости // Докл. АН СССР. 1966. Т. 171. № 4. С. 823—826.
6. *Рубановский В. Н.* О бифуркации и устойчивости стационарных движений систем с известными первыми интегралами // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1975. Вып. 1. С. 121—200.
7. *Иртегов В. Д.* Инвариантные многообразия стационарных движений и их устойчивость. Новосибирск: Наука, 1985. 144 с.
8. *Татаринов Я. В.* К исследованию фазовой топологии компактных конфигураций с симметрией // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика. 1973. № 5. С. 70—77.
9. *Харламов М. П.* Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. 198 с.
10. *Веселов А. П.*, *Веселова Л. Е.* Потоки на группах Ли с неголономной связью и интегрируемые негамильтоновы системы // Функц. анализ. 1986. Т. 20. № 4. С. 65—66.
11. *Веселова Л. Е.* Новые случаи интегрируемости уравнений движения твердого тела при наличии неголономной связи // Геометрия, дифференциальные уравнения и механика. М.: Изд-во МГУ, 1986. С. 64—68.

Ленинград

Поступила в редакцию
3.II.1989