Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 6, 1990

УДК 531.36

А. А. Буров, А. В. Карапетян

О СУЩЕСТВОВАНИИ И УСТОЙЧИВОСТИ ИНВАРИАНТНЫХ МНОЖЕСТВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Обсуждается возможность применения метода функций Ляпунова к проблеме построения инвариантных множеств динамических систем.

Проведенные исследования основаны на идеях известных работ [1—11] и позволяют дать обобщение теоремы Рауса и ее модификаций [1—6, 12, 13].

1. Рассмотрим динамическую систему, поведение которой описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями вида

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n,\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in C^1\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n) \tag{1.1}$$

Пусть уравнения (1.1) допускают не зависящие явно от времени первые интегралы

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \quad (\mathbf{c} \in \mathbf{R}^k,\ U(\mathbf{x}) \in C^2\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k) \tag{1.2}$$

Рассмотрим произвольную функцию $V(\mathbf{x}) \in C^2\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^1$ и будем говорить, что она принимает стационарное значение при постоянных значениях первых интегралов на некотором множестве $M \subset R^n$ и не вырождена на этом множестве, если M — максимальное связное замкнутое множество, на котором выполняются соотношения

$$\delta V|_{\delta \mathbf{U}=0} = 0, \quad V = m = \mathrm{const}, \text{ причем } \delta^2 V|_{\delta \mathbf{U}=0} \neq 0$$

Теорема 1.1. Если какая-либо функция $V(\mathbf{x})$ принимает стационарное значение при постоянных значениях первых интегралов (1.2) системы (1.1) на некотором множестве $M_0 \subset \mathbf{R}^n$ и не вырождена на этом множестве, а ее полная производная по времени в силу этой системы $V^{\cdot} = \langle \operatorname{grad} V, \mathbf{f} \rangle$ принимает стационарное значение на некотором множестве $N_0 \in \mathbf{R}^n$ и $M_0 \subseteq N_0$, то M_0 — инвариантное множество рассматриваемой системы.

Доказательство. Пусть функция V принимает на множестве M_0 (стационарное) значение m_0 при постоянных значениях $\mathbf{c}^0$ интегралов (1.2). Тогда множество M_0 определяется соотношениями

$$V_{,j} + \lambda_\beta U_{\beta,j} = 0,\ U_\alpha = c_\alpha^\circ, \quad V = m_0\ (f_{,j} = \partial f/\partial x_j) \tag{1.3}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — неопределенные множители Лагранжа. В этом разделе $i, j = 1, \ldots, n$; $\alpha, \beta = 1, \ldots, k < n$, причем по повторяющимся индексам предполагается суммирование в соответствующих пределах.

Множество N_0 определяется соотношениями

$$V_{,ij} f_j + V_{,j} f_{ji} = 0 \quad (V_{,ij} = \partial^2 V/\partial x_i \partial x_j) \tag{1.4}$$

причем (по условию теоремы 1.1) $M_0 \subseteq N_0$. Следовательно (см. (1.3) и (1.4)), на множестве M_0 выполняются соотношения

$$V_{,ij} f_j = -V_{,j} f_{j,i} = \lambda_\beta U_{\beta,j} f_{j,i} \tag{1.5}$$

Далее, умножая левую часть j-го соотношения в (1.3) на f_j, суммируя по j и учитывая, что

$$U_{\alpha,j} f_j \equiv 0 \tag{1.6}$$

поскольку $U_\alpha = c_\alpha$ — первые интегралы, получим, что $V^{\cdot}$ обращается в нуль на множестве M_0.

Наконец, дифференцируя тождество (1.6) по x_i, получим

$$U_{\alpha,\, ij} f_j + U_{\alpha,\, j} f_{j,\, i} \equiv 0$$

откуда следует (см. также (1.5)), что на множестве M_0

$$\frac{d}{dt}(V_{,\, i} + \lambda_\beta U_{\beta,\, i}) \equiv V_{,\, ij} f_j + \lambda_\beta U_{\beta,\, ij} f_j = \lambda_\beta (U_{\beta,\, j} f_{j,\, i} + U_{\beta,\, ij} f_j) \equiv 0$$

Таким образом, все соотношения (1.3), определяющие множество M_0, инвариантны, причем функция V не вырождена на этом множестве, т. е. M_0 — инвариантное множество.

Замечание. 1.1. Действительные решения системы (1.1), лежащие на множестве M_0, будем называть стационарными, поскольку они доставляют стационарные значения функции V (при постоянных значениях первых интегралов) и ее полной производной по времени. В общем случае такие стационарные решения зависят от времени, однако, если $\dim M_0 = 0$, то они совпадают с особыми точками системы (1.1).

Замечание 1.2. Инвариантное множество M_0, доставляющее функции V (при постоянных значениях первых интегралов) и ее полной производной по времени стационарные значения, зависит от постоянных этих интегралов; что касается стационарного решения $\mathbf{x}^\circ(t) \in M_0(\mathbf{c})$, то оно, кроме того, зависит от начальных условий $\mathbf{x}^\circ \in M_0(\mathbf{c})$. Это означает, что стационарные решения $\mathbf{x}^\circ(t, \mathbf{c}, \mathbf{x}^\circ)$ образуют семейство размерности, не меньшей суммы числа произвольных и независимых для $M_0(\mathbf{c})$ постоянных среди $\mathbf{c}$ и числа произвольных и независимых для $\mathbf{x}^\circ(t, \mathbf{c}, \mathbf{x}^\circ)$ начальных условий среди $\mathbf{x}^\circ \subset M_0(\mathbf{c})$, на котором, очевидно, функция $V^{\cdot}$ обращается в нуль.

Замечание 1.3. Функция V (при фиксированных значениях $\mathbf{c}$) и ее полная производная по времени могут принимать стационарные значения не только на множествах M_0 и N_0 соответственно, но и, вообще говоря, на множествах M_1 и N_1 ($M_1 \subseteq N_1$), M_2 и N_2 ($M_2 \subseteq N_2$), ... Множествам $M_1, M_2, \ldots$ отвечают (по предположению) одни и те же значения постоянных $\mathbf{c}$, но, вообще говоря, различные значения функции V (очевидно, функция $V^{\cdot}$ по-прежнему обращается в нуль на всех этих множествах). Множества $M_1, M_2, \ldots$ также зависят от постоянных $\mathbf{c}$, а стационарные решения $\mathbf{x}^k(t, \mathbf{c}, x^k) \subset M_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ образуют семейства соответствующих размерностей.

2. Устойчивость инвариантных множеств системы (1.1) (стационарных решений), указанных в разд. 1, може быть исследована прямым методом Ляпунова с помощью следующих теорем, аналогичных теореме Рауса [1—6] и ее модификациям [12, 13].

Теорема 2.1. Если какая-либо функция $V(\mathbf{x})$ принимает локально строго минимальное (максимальное) значение при постоянных значениях $\mathbf{c}^\circ$ первых интегралов системы на некотором компактном множестве $M_0(\mathbf{c}^\circ)$, а ее полная производная по времени в силу системы $V^{\cdot}$ принимает на этом множестве локально максимальное (минимальное) значение, то $M_0(\mathbf{c}^\circ)$ — устойчивое инвариантное множество (при этом любое стационарное решение $\mathbf{x}^\circ(t) \subset M_0(\mathbf{c}^\circ)$ устойчиво по отношению к $\operatorname{dist}(\mathbf{x}, M_0(\mathbf{c}^\circ))$).

Теорема 2.2. Если какая-либо функция $V(\mathbf{x})$ принимает локально строго минимальное (максимальное) значение при постоянных значениях $\mathbf{c}^\circ$ первых интегралов системы на некотором компактном множестве $M_0(\mathbf{c}^\circ)$, а ее полная производная по времени в силу системы $V^{\cdot}$ принимает локально строго максимальное (минимальное) значение на семействе множеств $M_0(\mathbf{c})$ при всех $\mathbf{c}$, достаточно близких к $\mathbf{c}^\circ$, то $M_0(\mathbf{c}^\circ)$ — устойчивое инвариантное множество, причем всякое решение, достаточно близкое к инвариантному множеству $M_0(\mathbf{c}^\circ)$ асимптотически при $t \to \infty$ стремится к множеству $M_0(\mathbf{c})$, отвечающему возмущенным значениям постоянных первых интегралов (при этом любое решение $\mathbf{x}^\circ(t) \subset M_0(\mathbf{c}^\circ)$ асимптотически устойчиво по отношению к $\operatorname{dist}(\mathbf{x}, M_0(\mathbf{c}))$; если, кроме того, постоянные интегралов не возмущаются, то $M_0(\mathbf{c}^\circ)$ — асимптотически устойчивое инвариантное множество (при этом любое решение $\mathbf{x}^\circ(t) \subset \subset M_0(\mathbf{c}^\circ)$ асимптотически устойчиво по отношению к $\operatorname{dist}(\mathbf{x}, M_0(\mathbf{c}^\circ))$).

Теорема 2.3. Если какая-либо функция $V(\mathbf{x})$ не принимает даже нестрого минимального (максимального) значения при постоянных значениях $\mathbf{c}^\circ$ первых интегралов системы на компактном инвариантном множестве $M_0(\mathbf{c}^\circ)$, а ее полная производная по времени в силу системы принимает локально строго максимальное (минимальное) значение на семействе множеств $M_0(\mathbf{c})$ при всех $\mathbf{c}$, достаточно близких к $\mathbf{c}^\circ$, то $M_0(\mathbf{c}^\circ)$ — неустойчивое инвариантное множество.

Замечания. 2.1. В формулировках теорем 2.1 и 2.2 отсутствует условие невырожденности функции V на множестве M_0, поскольку при экстремальных (противоположного знака) значениях функции V и ее полной производной $V^\cdot$ на множестве M_0 инвариантность последнего может быть доказана и без этого условия (см. ниже).

2.2. Инвариантность множества $M_0(\mathbf{c}^\circ)$, о котором идет речь в теореме 2.3, понимается в том смысле, что $M_0(\mathbf{c}^\circ)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.1.

Докажем сначала теорему 2.1. Пусть множество $M_0(\mathbf{c}^\circ)$ доставляет функции $V(\mathbf{x})$ при постоянных значениях $\mathbf{c}^\circ$ интегралов (1.2) минимальное значение $m_0(\mathbf{c}^\circ)$, а функции $V^\cdot$ — максимальное значение. Последнее, очевидно, равно нулю (см. разд. 1).

Рассмотрим произвольное решение $\mathbf{x}^\circ(t)$ системы (1.1) с начальными условиями $\mathbf{x}^\circ(t_0) \subset M_0(\mathbf{c}^\circ)$, удовлетворяющими соотношениям

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}^\circ(t_0)) = \mathbf{c}^\circ \tag{2.1}$$

Очевидно, $\mathbf{U}(\mathbf{x}^\circ(t)) \equiv \mathbf{c}^\circ$, поскольку $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$ — первые интегралы. При этом $V(\mathbf{x}^\circ(t)) \geqslant m_0(\mathbf{c}^\circ)$ согласно предположению о минимальности значения $m_0(\mathbf{c}^\circ)$ функции $V(\mathbf{x})$ при фиксированных значениях $\mathbf{c}^\circ$ постоянных $\mathbf{c}$ интегралов (1.2).

С другой стороны, $V^\cdot(x^\circ(t)) \leqslant 0$ согласно предположению о максимальности (нулевого) значения функции $V^\cdot(\mathbf{x})$, т. е.

$$V(\mathbf{x}^\circ(t)) = V(\mathbf{x}^\circ(t_0)) + \int_{t_0}^{t} V^\cdot(\mathbf{x}^\circ(t))\,dt \leqslant m_0(\mathbf{c}^\circ)$$

Следовательно, $V(\mathbf{x}^\circ(t)) \equiv m_0(\mathbf{c}^\circ)$ и $\mathbf{x}^\circ(t) \subset M_0(\mathbf{c}^\circ)$ $\forall t \geqslant t_0$, поскольку функция $V(\mathbf{x})$ принимает строго минимальное значение $m_0(\mathbf{c}^\circ)$ на множестве $M_0(\mathbf{c}^\circ)$.

Таким образом, $M_0(\mathbf{c}^\circ)$ — инвариантное множество (заметим, что для доказательства этого факта свойство компактности множества $M_0(\mathbf{c}^\circ)$ не использовалось).

Для доказательства устойчивости множества $M_0(\mathbf{c}^\circ)$ рассмотрим множество

$$\operatorname{dist}(\mathbf{x}, M_0(\mathbf{c}^\circ)) = \varepsilon \tag{2.2}$$

где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое (но конечное) число. Поскольку множество $M_0(\mathbf{c}^\circ)$ компактно, множество (2.2) также компактно и непрерывная функция $V(\mathbf{x}) - m_0(\mathbf{c}^\circ)$ на этом множестве всегда ограничена снизу отрицательным числом $-\sigma_1$ $(\sigma_1 > 0)$. Если же переменные $\mathbf{x}$ удовлетворяют соотношениям $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\circ$, то функция $V(\mathbf{x}) - m_0(\mathbf{c}^\circ) \geqslant \sigma_2 > 0$ на этом множестве, поскольку функция $V(\mathbf{x})$ при постоянных значениях $\mathbf{c}^\circ$

интегралов (1.2) достигает строго минимального значения $m_0(\mathbf{c}^\circ)$ на множестве $M_0(\mathbf{c}^\circ)$. По непрерывности существуют положительные числа σ_3 и σ_4, такие, что из неравенства $\|\mathbf{U}-\mathbf{c}^\circ\| < \sigma_3$ следует неравенство $V - m_0(\mathbf{c}^\circ) > \sigma_4$. Тогда, выбирая положительное число $\mu < \sigma_3/\sigma_1$, получим, что функция

$$W = \mu\,(V - m_0(\mathbf{c}^\circ)) + \|\mathbf{U}-\mathbf{c}^\circ\|$$

ограничена снизу положительным числом $\sigma < \min(\sigma_3 - \sigma_1\mu,\ \mu\sigma_4)$ на множестве (2.2). По этому числу σ можно определить число δ такое, что область

$$\operatorname{dist}(\mathbf{x}, M_0(\mathbf{c}^\circ)) < \delta \tag{2.3}$$

целиком будет лежать внутри области $W < \sigma$, которая, в свою очередь, целиком лежит внутри области

$$\operatorname{dist}(\mathbf{x}, M_0(\mathbf{c}^\circ)) < \varepsilon \tag{2.4}$$

Поскольку в этой области функция W не возрастает ($W^\cdot = \mu V^\cdot \leqslant 0$, так как по предположению функция $V^\cdot$ принимает на множестве $M_0(\mathbf{c}^\circ)$ максимальное значение, равное нулю), то любое возмущенное решение системы (1.1) с начальными условиями в области (2.3) не покинет области $W < \sigma$ и, тем самым, области (2.4). Последнее означает, что $M_0(\mathbf{c}^\circ)$ — устойчивое инвариантное множество.

Докажем теорему 2.2. Согласно теореме 2.1 $M_0(\mathbf{c}^\circ)$ — устойчивое инвариантное множество, причем любое действительное решение $\mathbf{x}^\circ(t) \subset M_0(\mathbf{c}^\circ)$ устойчиво по отношению к $\operatorname{dist}(\mathbf{x}, M_0(\mathbf{c}^\circ))$. Таким образом, всякое возмущенное решение $\mathbf{x}(t)$ системы (1.1) целиком лежит в области (2.4), как бы мало ни было положительное число ε, если в начальный момент времени t_0 имеет место неравенство (см. (2.3))

$$\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}^\circ(t_0)\| < \delta = \delta(\varepsilon)$$

Поскольку $V^\cdot(\mathbf{x})$ достигает локально строго максимального значения на семействе множеств $M_0(\mathbf{c})$ при всех $\mathbf{c}$, достаточно близких к $\mathbf{c}^\circ$, и это значение равно нулю, то $\varepsilon > 0$ можно выбрать столь малым (но конечным), что в области (2.4) не будет точек, принадлежащих другим инвариантным множествам $M_1(\mathbf{c}), M_2(\mathbf{c}), \ldots$, отличным от $M_0(\mathbf{c})$, если они вообще существуют (как уже отмечалось, на всех этих множествах $V^\cdot(\mathbf{x})$ обращается в нуль).

В области (2.4) функция $V(\mathbf{x}(t))$, как невозрастающая, необходимо будет стремиться к некоторому пределу v_0, оставаясь все время не меньше этого предела

$$V \geqslant v_0 \tag{2.5}$$

Допустим, что возмущенное решение $\mathbf{x}(t)$ не стремится к $M_0(\mathbf{c})$. Тогда найдется последовательность точек

$$\mathbf{x}^p = \mathbf{x}(t_0 + p\tau) \quad (p = p_1, p_2, \ldots;\ p_1 < p_2 < \ldots;\ \tau = \text{const} > 0) \tag{2.6}$$

такая, что $\operatorname{dist}(\mathbf{x}^p, M_0(\mathbf{c})) \geqslant \gamma > 0$, где γ — некоторое, быть может малое, но конечное число. В ограниченной области (2.4) из последовательности (2.6) можно выбрать подпоследовательность

$$\mathbf{x}^s = \mathbf{x}(t_0 + s\tau) \quad (s = p_{s_1}, p_{s_2}, \ldots;\ s_1 < s_2 < \ldots) \tag{2.7}$$

сходящуюся к некоторой точке $\mathbf{x}^*$, причем (по непрерывности)

$$V(\mathbf{x}^*) = v_0, \quad \operatorname{dist}(\mathbf{x}^*, M_0(\mathbf{c})) \geqslant \gamma$$

Рассмотрим теперь решения $\mathbf{x}^*(t)$ и $\mathbf{x}^s(t)$, исходящие в начальный момент времени соответственно из точек $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{x}^s$. Поскольку $\operatorname{dist}(\mathbf{x}^*, M_0(c)) \geqslant \gamma$ и $V^{\cdot} \equiv 0$ (в области (2.4)) только при $\mathbf{x} \in M_0(\mathbf{c})$, то найдется момент времени $t_1 > t_0$, такой, что

$$V(\mathbf{x}^*(t_1)) = v_1 < v_0 \tag{2.8}$$

Далее, поскольку последовательность $\mathbf{x}^s$ сходится к $\mathbf{x}^*$, то (по непрерывной зависимости решений от начальных условий)

$$\| \mathbf{x}^*(t_1) - \mathbf{x}^s(t_1) \| < \alpha, \quad \forall s > s_*(\alpha)$$

каково бы ни было наперед заданное число $\alpha > 0$.

Тогда (по непрерывности)

$$| V(\mathbf{x}^s, t_1)) - V(\mathbf{x}^*(t_1)) | < \beta, \quad \forall s > s_*(\alpha) \equiv s_*(\alpha(\beta)) \equiv s^*(\beta)$$

каково бы ни было наперед заданное число $\beta > 0$.

Выбирая $\beta > v_0 - v_1$, получим неравенство

$$V(\mathbf{x}^s(t_1)) < v_1 + \beta < v_0$$

которое можно представить в виде

$$V(\mathbf{x}(t_1 + s\tau)) < v_0, \quad \forall s > s^* \tag{2.9}$$

поскольку правые части системы (1.1) не зависят от времени и, следовательно, $\mathbf{x}^s(t_1) \equiv \mathbf{x}(t_1 + s\tau)$.

Очевидно, неравенство (2.9) противоречит неравенству (2.5), т. е. сделанное допущение не справедливо. Последнее означает, что всякое возмущенное решение $\mathbf{x}(t)$, достаточно близкое к инвариантному множеству $M_0(\mathbf{c}^\circ)$ (см. (2.4)), стремится при $t \to \infty$ к множеству $M_0(\mathbf{c})$, отвечающему возмущенным значением постоянных первых интегралов (1.2): $\mathbf{c} = \mathbf{U}(\mathbf{x}(t_0))$.

Если же постоянные интегралов (1.2) не возмущаются, то, повторяя изложенную процедуру, заключаем, что возмущенное решение стремится при $t \to \infty$ к множеству $M_0(\mathbf{c}^\circ)$.

Наконец, докажем теорему 2.3, предполагая, что функция $V(\mathbf{x})$ не принимает на множестве $M_0(\mathbf{c}^\circ)$ даже нестрого минимального значения, а функция $V^{\cdot}(\mathbf{x})$ принимает на семействе множеств $M_0(\mathbf{c})$ локально строго максимальное значение. При этом функция $V(\mathbf{x}) - m_0(\mathbf{c}^\circ)$ может принимать отрицательные значения в окрестности множества $M_0(\mathbf{c}^\circ)$.

Рассмотрим возмущенное решение $\mathbf{x}(t)$ с начальными условиями, удовлетворяющие соотношениям (2.1) и

$$V(\mathbf{x}(t_0)) < m_0(\mathbf{c}^\circ), \quad \| \mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}^\circ(t_0) \| < \delta$$

где $\delta > 0$ — сколь угодно мало ($\mathbf{x}^\circ(t_0) \in M_0$). При этом, очевидно,

$$\operatorname{dist}(\mathbf{x}(t_0), M_0(\mathbf{c}^\circ)) > 0 \tag{2.10}$$

так как иначе $\mathbf{x}(t_0) \in M_0(\mathbf{c}^\circ)$ и $V(\mathbf{x}(t_0)) = m_0(\mathbf{c}^\circ)$.

Допустим, что $\mathbf{x}(t)$ все время принадлежит области (2.4), где $\varepsilon > 0$ — некоторое достаточно малое, но конечное) число. По-прежнему выбираем ε столь малым, чтобы область (2.4) не содержала точек, принадлежащих другим инвариантным множествам M_1 (c), M_2 (c), . . ., если они вообще существуют. Тогда $V^{\cdot}(\mathbf{x}(t)) < 0$.

Функция $V(\mathbf{x}(t))$ ограничена в области (2.4) и, как убывающая, необходимо будет стремиться к некоторому пределу, оставаясь все время не меньше этого предела (см. неравенство (2.5)). Посклькy $\mathbf{x}(t) \not\subset M_0(\mathbf{c}^\circ)$ (см. (2.10)), существует последовательность вида (2.6), удовлетворяющая соотношению $\operatorname{dist}(\mathbf{x}^p, M_0(\mathbf{c}^\circ)) \geqslant \gamma > 0$, где γ — некоторое, быть может малое, но конечное число; в ограниченной области (2.4) из этой последовательности может выделить подпоследовательность вида (2.7), сходящуюся к некоторой точке $\mathbf{x}^*$, причем, по непрерывности

$$\operatorname{dist}(\mathbf{x}^*, M_0(\mathbf{c}^\circ)) \geqslant \gamma \qquad V(\mathbf{x}^*) = v_0.$$

Рассмотрим теперь решения $\mathbf{x}^*(t)$ и $\mathbf{x}^s(t)$, исходящие в начальный момент времени соответственно из точек $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{x}^s$. Поскольку $\mathbf{x}^* \notin M_0(\mathbf{c}^\circ)$, найдется момент времени $t_1 > t_0$ такой, что будет выполнено неравенство (2.8). Повторяя затем процедуру, изложенную при доказательстве теоремы 2.2, придем к соотношению (2.9), которое противоречит неравенству (2.5). Это означает, что сделанное допущение не справедливо, т. е. инвариантное множество $M_0(\mathbf{c}^\circ)$ неустойчиво.

При этом, очевидно, неустойчиво всякое решение $\mathbf{x}^\circ(t) \subset M_0(\mathbf{c}^\circ)$, для которого найдется момент времени t_*, такой, что сколь угодно малая окрестность точки $\mathbf{x}^\circ(t_*) \in M_0(\mathbf{c}^\circ)$, будет содержать точки $\mathbf{x} \in R^n$, удовлетворяющие соотношению $V(\mathbf{x}) - m_0(\mathbf{c}^\circ) < 0$ (в частности, если функция $V(\mathbf{x})$ принимает на множестве $M_0(\mathbf{c}^\circ)$ максимальное (минимальное) значение (при постоянных $\mathbf{c}^\circ$), то при выполнении остальных условий теоремы 2.3 все решения $\mathbf{x}^\circ(t) \subset M_0(\mathbf{c}^\circ)$ неустойчивы).

3. Очевидно, приведенные выше результаты распространяются на системы вида (1.1), не допускающие первых интегралов. Точнее, справедливы следующие теоремы.

Теорема 3.1. Если какая-либо функция $V(\mathbf{x}) \in C^2$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^1$ принимает стационарное значение на некотором множестве $M_0 \subset R^n$, причем $\operatorname{rank}(\partial^2 V/\partial \mathbf{x}^2) = n - \dim M_0$, а ее полная производная по времени в силу системы (1.1) $V^{\cdot} = \langle \operatorname{grad} V, \mathbf{f} \rangle$ принимает стационарное значение на множестве N_0 и $M_0 \subseteq N_0$, то M_0 — инвариантное множество рассматриваемой системы.

Теорема 3.2. Если какая-либо функция $V(\mathbf{x})$ принимает локально строго минимальное (максимальное) значение на некотором компактном множестве M_0, а ее полная производная по времени в силу системы (1.1) принимает на этом множестве [строго] локально максимальное (минимальное) значение, то M_0 — [асимптотически] устойчивое инвариантное множество (при этом любое стационарное решение $\mathbf{x}^\circ(t) \subset M_0$ [асимптотически] устойчиво по отношению к $\operatorname{dist}(\mathbf{x}, M_0)$).

Теорема 3.3. Если какая-либо функция $V(\mathbf{x})$ не принимает даже нестрого минимального (максимального) значения на компактном инвариантном множестве M_0, а ее полная производная по времени в силу системы (1.1) принимает локально строго максимальное (минимальное) значение на множестве M_0, то M_0 — неустойчивое инвариантное множество.

Замечания. 3.1. Теорема 3.2, в частности, утверждает, что теорема (об устойчивости) прямого метода Ляпунова дает не только условия устойчивости заданных решений, но и условия существования устойчивых решений динамических систем; аналогичное замечание справедливо в отношении теорем 2.1 и 2.2 для систем с известными первыми интегралами.

3.2. Если функции V и $V^{\cdot}$ принимают равномерно экстремальные значения на множестве M_0 (соответствующего знака), то условие компактности этого множества в формулировке теорем 3.2 и 3.3 можно опустить.

Пример. Рассмотрим движение твердого тела вокруг центра масс. Пусть $\mathbf{I} = \operatorname{diag}(I_1, I_2, I_3)$ — главный центральный тензор инерции, $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$ — вектор кинетического момента. Все векторные и тензорные величины даны в проекциях на главные оси инерции. Уравнения движения тела вокруг центра масс под действием сил с моментом $\mathbf{Q}$ имеют вид

$$M^{\cdot} = M \times \partial H/\partial M + Q \ (H = {}^1/_2\,(I_1^{-1}M_1^2 + I_2^{-1}M_2^2 + I_3^{-1}M_3^2)) \qquad (3.1)$$

Пусть $\mathbf{Q} = (M_1 q,\ p,\ M_2 q)$, где $q(\mathbf{M})$ и $p(\mathbf{M})$ — гладкие функции, $I_1 < I_2 < I_3$, $F = (I_1^{-1} - I_2^{-1})\, M_1^2 + (I_3^{-1} - I_2^{-1})\, M_3^2$.

Функция $V = {}^1/_2 F^2$ определяет инвариантное множество $M_0 \equiv \{F = 0\}$, не являющееся многообразием. Если в его окрестности функция $q \leqslant 0$, то инвариантное множество M_0 устойчиво по Ляпунову; если $q < 0$ или $q > 0$, причем $\lim q(\mathbf{M}) \neq 0$ при $F \to 0$, то M_0 асимптотически устойчиво или неустойчиво соответственно.

4. Пусть $F_i(\mathrm{x})$ $(i = 0, \ldots, l)$ — первые интегралы из (1.2), такие, что функции F_i обобщенно-однородны:

$$(\partial F_i/\partial x)\cdot Kx \equiv \chi_i F_i, \quad \forall x \in R^n, \quad K = \operatorname{diag}(k_1, \ldots, k_n) \qquad (4.1)$$

Рассмотрим также систему уравнений

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{K}\mathbf{x}\varphi(\mathbf{x}) \qquad (4.2)$$

где φ: $R^n \to R$ — произвольная непрерывная функция. Справедливо

Утверждение 4.1. Области $\{F_i > 0\}$, $\{F_i < 0\}$ и поверхности $\{F_i = 0\}$ инварианты под действием потока (4.2).

Система уравнений (4.2) допускает l общих первых интегралов, не зависящих от времени. Если $\varphi(\mathrm{x}) \not\equiv \varphi(F_0, \ldots, F_l)$, то эта система допускает также условный первый интеграл, зависящий явно от времени.

Доказательство. Продифференцируем функции F_i в силу системы (4.2). Функции F_i — первые интегралы уравнений (1.1) и выполнены соотношения (4.1). Тогда

$$dF_i/dt = (\partial F_i/\partial x)\cdot(\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{K}\mathbf{x}\varphi(\mathbf{x})) \equiv \chi_i F_i \varphi(\mathrm{x}) \qquad (4.3)$$

Следовательно,

$$F_i(\mathrm{x}(t)) = F_i(\mathrm{x}(0)) \exp\left[\int_0^t \varphi(x(\tau))\, d\tau\right]$$

и функции F_i сохраняют знак на любом решении уравнений (4.2). Поэтому области $\{F_i > 0\}$, $\{F_i < 0\}$ и поверхности $\{F_i = 0\}$ инвариантны относительно потока (4.2). Первая часть утверждения доказана.

На множестве $G_{pq} = \{F_p(\mathrm{x}) \neq 0\} \cap \{F_q(\mathrm{x}) \neq 0\}$ рассмотрим функцию

$$J_{pq} = |F_p|^{\chi_q}/|F_q|^{\chi_p}, \quad p, q = 0, \ldots, l \qquad (4.4)$$

На траекториях системы (4.2) в силу соотношения (4.3)

$$dJ_{1q}/dt = (\chi_q \operatorname{sign} F_p\, |F_p|^{\chi_q - 1}\, dF_1/dt\, |F_q|^{\chi_p} -$$
$$- \chi_p \operatorname{sign} F_q\, |F_q|^{\chi_p - 1} dF_q/dt\, |F_p|^{\chi_q})\, |F_q|^{-2\chi_p} \equiv 0$$

и функции J_{pq} — первые интегралы в областях G_{pq}. Функции F_i — первые интегралы на поверхностях $\{F_i = 0\}$. Следовательно, если $\mathbf{L} =$

$= \{0, \ldots, l\}$ и α — любое подмножество из $\mathbf{L}$, то на множестве

$$\Gamma_{\alpha\beta} = \bigcap_{i\in\alpha} \{F_i = 0\} \bigcap \bigcap_{j\in\beta} \{F_j \neq 0\} \quad \beta = \mathbf{L} \setminus \alpha$$

функции F_i $(i \in \alpha)$ и $J_{j\sigma}$, где σ — наименьший элемент из β, $j \in \beta \setminus \{\sigma\}$, образуют набор из l независимых первых интегралов $I_1(\Gamma_{\alpha\beta}), \ldots, I_l(\Gamma_{\alpha\beta})$. Вторая часть утверждения доказана.

Зафиксируем совместный уровень первых интегралов $I_p(\Gamma_{\alpha\beta})$

$$J = \{\mathbf{x}\colon F_i = 0, \ i \in \alpha; \quad J_{j\sigma} = q_j, \ j \in \beta \setminus \{\sigma\} \tag{4.5}$$

Тогда, разрешая уравнения (4.5) при $j \in \beta \setminus \{\sigma\}$ относительно F_j, имеем $F_j = V_j(F_q, q_j)$. Следовательно, на $\Gamma_{\alpha\beta}$

$$\varphi(F_0, \ldots, F_l) \equiv \Phi(F_\sigma, q_j), \quad j \in \beta \setminus \{\sigma\}$$
$$dF_\sigma/dt = \chi_\sigma F_\sigma \Phi(F_\sigma, q_j) \tag{4.6}$$

Функция

$$J_\sigma(F_\sigma(\mathbf{x}), t, q_j) = 0 \tag{4.7}$$

представляющая собой общий интеграл (4.6), определяет условный первый интеграл уравнений (4.2), зависящий явно от времени, что и требовалось доказать.

Утверждение 4.2. Пусть функция $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ — правая часть уравнений (1.1) — удовлетворяет соотношению

$$f_i(\delta_1 x_1, \ldots, \delta_n x_n) = \delta_1^{\gamma_{i1}} \cdot \ldots \cdot \delta_n^{\gamma_{in}} f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad \forall \mathbf{x} \in R^n$$

Тогда, если

$$\sum_{j=1}^{n} k_j \gamma_{ij} - k_i \equiv \alpha = \text{const}, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

то заменой переменных и времени уравнения (4.2) приводятся к виду (1.1) в области $R^n \setminus \{\mathbf{x}\colon F_i = 0, \ i = 0, \ldots, l\}$.

Доказательство. Пусть F_i — любой из первых интегралов уравнений (1.1), удовлетворяющих соотношению (4.1), например, F_0. В области $\{F_0 > 0\}$ будем искать замену переменных в виде

$$x_i = \Lambda_i F_0^{\alpha_i} y_i, \quad i = 1, \ldots, n \tag{4.8}$$

где Λ_i, α_i — неизвестные постоянные. На решениях уравнений (4.2) в силу (4.3)

$$x_i^{\cdot} = \Lambda_i \alpha_i y_i \chi_0 F_0^{\alpha_i} \varphi + \Lambda_i y_i^{\cdot} F_0^{\alpha_i} \tag{4.9}$$

Подставим (4.8), (4.9) в (4.2). В силу условий на правые части уравнений (1.1) имеем

$$\Lambda_i \alpha_i y_i \chi_0 F_0^{\alpha_i} \varphi + \Lambda_i y_i^{\cdot} F_0^{\alpha_i} =$$
$$= (\Lambda_1 F_0^{\alpha_1})^{\gamma_{i1}} \ldots (\Lambda_n F_0^{\alpha_n})^{\gamma_{in}} f_i(y_1, \ldots, y_n) + k_i \Lambda_i y_i F_0^{\alpha_i} \varphi \tag{4.10}$$

Тогда, если $\alpha_i = k_i \chi_0^{-1}$, $\Lambda_i = \exp \alpha_i$, то из условий следует, что уравнения (4.10) представимы в виде

$$y_i^{\cdot} = \beta f_i(y_1, \ldots, y_n), \quad \beta = \exp(\alpha / \chi_0) F_0^{\alpha/\chi_0} \tag{4.11}$$

После замены времени $t \to \tau$, удовлетворяющей условию

$$d\tau = \beta dt$$

уравнения (4.11) запишутся в виде (1.1). Проводя аналогичные рассуждения для области $\{F_0 < 0\}$, а также для функций $F_1, \ldots, F_l$, получим совокупность замен переменных и времени всюду на $R^n \setminus \{\mathbf{x}\colon F_i = 0, i = 0, \ldots, l\}$, что и требовалось доказать.

Следствие. Если $\alpha = 0$, то система (4.2) приводится к виду (1.1) одной лишь заменой переменных.

Пример. Вновь рассмотрим движение твердого тела вокруг центра масс. Пусть силы, действующие на тело, имеют момент, равный нулю. Тогда уравнения (3.1) допускают интегралы $F_0 = H$, $F_1 = \mathbf{M}^2$ и являются вполне интегрируемыми.

Пусть теперь $\mathbf{Q} = \mathbf{M}\varphi\,(M_1, M_2, M_3)$, где $\varphi\,(\mathbf{M})$ — непрерывная функция. Уравнения (3.1) в этом случае допускают не зависящий от времени первый интеграл

$$J_1 = H/F_1$$

На фиксированном уровне этого интеграла $\{J_1 = q_1\}$ в случае, когда выполнено соотношение $\varphi\,(\mathbf{M}) = \Phi\,(F_0, F_1)$, можно указать также условный первый интеграл, зависящий явно от времени. Этот интеграл получается из общего решения уравнения

$$F_1^{\cdot} = 2F_1\Phi\,(F_1 q_1, F_1)$$

Замена переменных и времени

$$\mathbf{M} = \mathbf{K}\sqrt{\mathbf{M}^2}, \quad d\tau = dt\sqrt{\mathbf{M}^2}$$

приводит уравнения движения к уравнениям Эйлера

$$d\mathbf{K}/d\tau = \mathbf{K} \times \mathbf{I}^{-1}\mathbf{K}$$

Уравнения (3.1) с моментами такого вида возникают в задаче о движении тела под действием сил сопротивления. В случае, когда $\varphi \equiv \mathrm{const}$, эти уравнения исследованы ранее ([2], п. 147).

В идейном отношении метод исследования уравнений (4.2) близок к использованному Эллиотом ([14], с. 508), рассмотревшим близкую задачу о приведении уравнений движения точки, испытывающей сопротивление среды, к каноническому виду уравнений Гамильтона.

Авторы выражают признательность А. А. Косову за полезное обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Routh E. J.* A treatise on the stability of a given state of motion. L.: MacMillan, 1877. 108 p.
2. *Раус Э. Дж.* Динамика системы твердых тел. Т. 2. М.: Наука, 1983. 544 с.
3. *Ляпунов А. М.* О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости. Харьков: Изд. Харьк. Мат. о-ва. 1888. 54 с.
4. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. Харьков: Изд. Харьк. Мат. о-ва. 1892. 250 с.
5. *Salvadori L.* Un osservazione su di un criterio di stabilità del Routh // Rend. Accad sci. fis. e mat. Soc. naz. sci. lett. ed arti. Napoli. 1953. V. 20. P. 269—272.
6. *Salvadori L.* Sulla stabilità del movimento // Mathematiche. Catania, 1969. V. 24. № 1. P. 218—239.
7. *Барбашин Е. А., Красовский Н. Н.* Об устойчивости движения в целом // Докл. АН СССР. 1952. Т. 86. № 3. С. 453—456.
8. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз. 1959. 211 с.
9. *Матросов В. М.* Об устойчивости множеств неизолированных положений равновесия неавтономных систем // Тр. Казан. авиац. ин-та. 1965. Вып. 39. С. 20—32.
10. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика, физика, астрономия. 1957. № 4. С. 9—16.
11. *Румянцев В. В.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости движения по отношению к части переменных // ПММ. 1971. Т. 35, № 1. С. 138—143.
12. *Карапетян А. В., Рубановский В. Н.* О модификации теоремы Рауса об устойчивости стационарных движений систем с известными первыми интегралами // Сборник научно-методических статей по теоретической механике. М.: Высш. шк., 1986. № 17. С. 91—99.
13. *Карапетян А. В.* Теорема Рауса и ее модификации // Тр. Тбил. ун-та. 1988. Сер. Математика, Механика, физика, астрономия. Т. 25. С. 76—92.
14. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. I. М.: Наука, 1960. 515 с.

Москва

Поступила в редакцию
27.II.1989