Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 6, 1990

УДК 62—50

© 1990 г.

А. А. Белоусов, А. А. Чикрий

ПОЛНАЯ КОНФЛИКТНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Исследуется задача о гарантированном приведении траектории квазилинейного конфликтно управляемого процесса (КУП) на терминальное множество из любых начальных положений. На основе метода разрешающих функций [1—3] получены достаточные условия разрешимости поставленной задачи. Результаты иллюстрируются на модельных примерах.

Управляемость КУП исследована сравнительно слабо; можно указать лишь несколько работ, в частности [4, 5].

1. КУП задан квазилинейным дифференциальным уравнением

$$\dot{z} = Az + \varphi(u, v), \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U, \quad v \in V \tag{1.1}$$

где U и V — непустые компакты в конечномерных пространствах, $\varphi(u, v)$ — непрерывная по совокупности переменных функция. Терминальное множество имеет вид $M^* = M + M^\circ$, где M° — линейное подпространство R^n, M — компакт из ортогонального дополнения L к M°.

Будем говорить, что КУП (1.1) полностью управляем, если для любого начального положения $z^\circ \in R^n$ существует такой момент времени $T(z^\circ) < \infty$ и измеримая функция

$$u(t) = u(z^\circ, v_t(\cdot)) \in U \quad (v_t(\cdot) = \{v(s) \in V\colon\ s \in [0, t]\})$$

что решение уравнения (1.1) попадает на множество M^* не позже момента $T(z^\circ)$ при любых измеримых функциях $v(t) \in V$, $t \in [0, T(z^\circ)]$.

Обозначим через π оператор ортогонального проектирования из R^n на L.

Условие 1°. Существует число $a > 0$, такое, что $\| \pi e^{At} \| \leqslant a$ для всех $t \geqslant 0$.

Введем многозначные отображения

$$\Phi(t, \tau, v) = \pi e^{A(t-\tau)} \varphi(U, v) - M(t, \tau), \quad \Phi(t, \tau) = \bigcap_{v \in V} \Phi(t, \tau, v) \tag{1.2}$$

где $M(\cdot)$ — некоторое многозначное отображение: $R \times R \to 2^L$.

Условие 2°. Существует компактозначное отображение $M(t, \tau)$, измеримое по τ, такое, что

1) $0 \in \Phi(t, \tau), \quad \forall t \geqslant \tau \geqslant 0$

2) $\int_0^t M(t, \tau)\, d\tau \subset M, \quad \forall t \geqslant 0$

3) существует такое число $\mu > 0$, что

$$\int_0^t \| M(t, \tau) \| \, d\tau \leqslant \mu, \quad \forall t \geqslant 0; \quad \| M(t, \tau) \| = \max_{m \in M(t, \tau)} \| m \|$$

Замечание. 1. Если M — выпуклый компакт, то подходящее компактозначное отображение $M(t, \tau)$ удобно искать в виде $\omega(t, \tau) \cdot M$ [2, 3], где $\omega(t, \tau)$ — неотрицательная измеримая по τ функция, такая, что

$$\int_0^t \omega(t, \tau)\, d\tau = 1$$

Такое многозначное отображение автоматически удовлетворяет п. п. 2 и 3 условия 2°.

Если выполнено условие 2°, то определена функция $\rho(t, \tau, v, z) = \max\{\rho \geqslant 0: \rho\cdot z \in \Phi(t, \tau, v)\}$, $t \geqslant \tau \geqslant 0$, $z \in L$, $z \neq 0$ обратная функционалу Минковского множества $\Phi(t, \tau, v)$. Положим

$$\alpha(t, \tau, z) = \inf_{v\in V} \rho(t, \tau, v, z) \tag{1.3}$$

Известно [6], что для любой матрицы A существует разложение пространства R^n в прямую сумму линейных подпространств, инвариантных относительно A, соответствующих собственным значениям с положительными, нулевыми и отрицательными действительными частями: $R^n = R_+ + R_0 + R_-$.

В подпространстве R_0 можно выделить подпространство R_1, натянутое на собственные вектора, соответствующие собственным значениям с нулевой действительной частью. Отметим, что оператор e^{At} равномерно по $t \geqslant 0$ ограничен на инвариантном подпространстве $R_1 + R_-$, а условие 1° влечет включение $R_+ \subset M^\circ$.

Обозначим $S = \{z \in L: \|z\| = 1\}$, $D = \{z \in L: \|z\| \leqslant 1\}$, $S_0 = S \cap \pi R_0$.

Условие 3°. Существуют числа $\varepsilon > 0$, $\theta > 0$, такие, что непусто и неограничено множество

$$T(\varepsilon, \theta) = \left\{t \geqslant 0: \inf_{s\in S} \int_0^\theta \alpha(t, \tau, s)\, d\tau \geqslant \varepsilon\right\}$$

и

$$\sup_{t\in T(\varepsilon,\theta)} \inf_{s\in S_0} \int_0^t \alpha(t, \tau, s)\, d\tau = \infty \tag{1.4}$$

Если множество $S_0 = \varnothing$ (т. е. $R_0 \subset M^\circ$), то формально полагаем, что равенство (1.4) выполняется.

Условие 4°.

$$\lim_{t\to\infty} \sup \inf_{s\in S} \int_0^t \alpha(t, \tau, s)\, d\tau > 0$$

Теорема 1. Если для КУП (1.1) выполнены условия 1°, 2° и 3°, то он полностью управляем.

Доказательство. Для любого начального положения $z^\circ \in R^n$ имеет место однозначное разложение $z^\circ = z_+^\circ + z_0^\circ + z_-^\circ$, где $z_+^\circ \in R_+$, $z_0^\circ \in R_0$, $z_-^\circ \in R_-$.

По определению z_-° существует такой момент $T_1 = T_1(z_-^\circ) < \infty$, что $T_1 \geqslant \theta$ и $\|\pi e^{At} z_-^\circ\| \leqslant \varepsilon$ для всех $t \geqslant T_1$. Из условия 3° следует существование такого момента $T < \infty$, что $T \geqslant T_1$ и

$$\inf_{s\in S} \int_0^\theta \alpha(T, \tau, s)\, d\tau \geqslant \varepsilon \tag{1.5}$$

$$\inf_{s\in S_0} \int_0^T \alpha(T, \tau, s)\, d\tau \geqslant a\|z_0^\circ\| + a\|\varphi(U, V)\| T_1 + \mu \tag{1.6}$$

$$\|\varphi(U, V)\| = \max_{u\in U,\, v\in V} \|\varphi(u, v)\|$$

где μ — число из условия 2°.

Этот момент $T = T(z^\circ)$ как раз и является гарантированным временем приведения траектории КУП (1.1) на терминальное множество M^* из начального положения z°. Докажем это.

Введем обозначение: $\Pi_\xi = \pi e^{AT} z_\xi^\circ$, $\xi = +, 0, -$. Из определения $T_1(z_-^\circ)$ и условия (1.5) следует, что

$$\inf_{s \in S} \int_0^{T_1} \alpha(T, \tau, s)\, d\tau \geqslant \varepsilon \geqslant \| \Pi_- \| \tag{1.7}$$

Для любых $s \in S$ и $t \geqslant \tau \geqslant 0$ выполняются оценки

$$\alpha(t, \tau, s) \leqslant \max_{u \in U,\, v \in V,\, m \in M(t, \tau)} \| \pi e^{A(t-\tau)} \varphi(u, v) - m \| \leqslant$$
$$\leqslant \| \pi e^{A(t-\tau)} \| \| \varphi(U, V) \| + \| M(t, \tau) \|$$

А значит, для всех $s \in S$ и $t \geqslant T_1$

$$\int_0^{T_1} \alpha(t, \tau, s)\, d\tau \leqslant a \| \varphi(U, V) \| T_1 + \mu < \infty$$

Из этой оценки и условия (1.6) следует, что

$$\inf_{s \in S_0} \int_{T_1}^{T} \alpha(T, \tau, s)\, d\tau \geqslant a \| z_0^\circ \| \geqslant \| \Pi_0 \| \tag{1.8}$$

Учитывая очевидное тождество $\lambda\rho(T, \tau, \lambda z, v) = \rho(T, \tau, z, v)$ (для всех $\lambda > 0$, $T \geqslant \tau \geqslant 0$, $z \in L$, $z \neq 0$, $v \in V$) и считая, что $\Pi_0 \neq 0$ и $\Pi_- \neq 0$, из (1.7) и (1.8) получаем

$$\int_0^{T_1} \alpha(T, \tau, -\Pi_-)\, d\tau = \frac{1}{\| \Pi_- \|} \int_0^{T_1} \alpha\left(T, \tau, -\frac{\Pi_-}{\| \Pi_- \|}\right) d\tau \geqslant 1 \tag{1.9}$$

$$\int_{T_1}^{T} \alpha(T, \tau, -\Pi_0)\, d\tau \geqslant 1 \tag{1.10}$$

Для произвольной измеримой функции $v(t) \in V$ будем выбирать управление $u(t) \in U$ и функцию $m(t) \in M(T, t)$ $(t \in [0, T])$ из системы уравнений

$$\pi e^{A(T-t)} \varphi(u(t), v(t)) - m(t) = \begin{cases} \rho(T, t, -\Pi_-, v(t))(-\Pi_-), & t \in [0, \theta_1] \\ \rho(T, t, -\Pi_0, v(t))(-\Pi_0), & t \in [T_1, \theta_2] \\ 0, & t \in (\theta_1, T_1) \cup (\theta_2, T] \end{cases} \tag{1.11}$$

где моменты θ_1 и θ_2, которые существуют в силу неравенств (1.9) и (1.10), определяются из условий

$$\int_0^{\theta_1} \rho(T, t, -\Pi_-, v(t))\, dt = \int_{T_1}^{\theta_2} \rho(T, t, -\Pi_0, v(t))\, dt = 1$$

По теореме Филиппова — Кастена [7] система уравнений (1.11) разрешима в классе измеримых функций $u(t) \in U$, $m(t) \in M(T, t)$, $t \in [0, T]$.

Отметим, что из условия 1° следует, что $\Pi_+ = 0$.

Выбирая измеримое управление $u(t) \in U$ $(t \in [0, T])$ из системы (1.11), получаем

$$\pi z(T) = \Pi_+ + \Pi_0 + \Pi_- + \int_0^T (\pi e^{A(T-t)} \varphi(u(t), v(t)) - m(t))\, dt + \int_0^T m(t)\, dt =$$

$$= \Pi_+ + \int_0^T m(t)\,dt + \Pi_0 + \int_{T_1}^{\theta_2} \rho(T, t, -\Pi_0, v(t))\,dt \cdot (-\Pi_0) +$$

$$+ \Pi_- + \int_0^{\theta_1} \rho(T, t, -\Pi_-, v(t))\,dt \cdot (-\Pi_-) \in \int_0^T M(T, t)\,dt + 0 \subset M \quad (1.12)$$

Для завершения доказательства теоремы укажем, что если $\Pi_- = 0$, то измеримое управление $u(t) \in U$ $(t \in [0, T])$ следует выбирать из уравнения

$$\pi e^{A(T-t)} \varphi(u(t), v(t)) - m(t) = \begin{cases} \rho(T, t, -\Pi_0, v(t))(-\Pi_0), & t \in [T_1, \theta_2] \\ 0, & t \in [0, T_1) \cup (\theta_2, T] \end{cases}$$

а если $\Pi_0 = 0$, то из уравнения

$$\pi e^{A(T-t)} \varphi(u(t), v(t)) - m(t) = \begin{cases} \rho(T, t, -\Pi_-, v(t))(-\Pi_-), & t \in [0, \theta_1] \\ 0, & t \in (\theta_1, T] \end{cases}$$

Тогда, аналогично (1.12), получим доказательство утверждения теоремы.

Следствие 1. Если выполнены условия 2° и 3°, то возможно приведение траектории КУП (1.1) на терминальное множество из любого начального положения $z^\circ \in R_1 \cup R_-$.

Доказательство. Если $z^\circ \in R_1$, то существует такое число $d > 0$, что $\| \pi e^{At} z^\circ \| \leqslant d$ для всех $t \geqslant 0$. А по условию 3° существует момент T, для которого

$$\inf_{s \in S_0} \int_0^T \alpha(T, \tau, s)\,d\tau \geqslant d$$

Если же $z^\circ \in R_-$, то существует момент $T \geqslant \theta$, такой, что $\| \Pi \| \leqslant \varepsilon$ и

$$\inf_{s \in S} \int_0^T \alpha(T, \tau, s)\,d\tau \geqslant \varepsilon$$

Значит, и в том и в другом случае найдется такой момент $T = T(z^\circ)$, что

$$\inf_{v(\cdot) \in V} \int_0^T \rho(T, \tau, -\Pi, v(\tau))\,d\tau \geqslant 1$$

Для произвольной измеримой функции $v(t) \in V$ $(t \in [0, T])$ будем выбирать измеримое управление $u(t) \in U$, решающее задачу приведения траектории КУП (1.1) из начального положения z° на терминальное множество M^* в момент T, из системы уравнений

$$\pi e^{A(T-t)} \varphi(u(t), v(t)) - m(t) = \begin{cases} \rho(T, t, -\Pi, v(t))(-\Pi), & t \in [0, \theta_1] \\ 0, & t \in (\theta_1, T] \end{cases}$$

где момент $\theta_1 \in [0, T]$ определяется равенством

$$\int_0^{\theta_1} \rho(T, \tau, -\Pi, v(\tau))\,d\tau = 1$$

а $m(t)$ — измеримый селектор $M(T, t)$, $t \in [0, T]$.

Завершение доказательства проводится вполне аналогично доказательству теоремы.

Следствие 2. Пусть действительные части всех собственных значений сужения оператора A на подпространство L — отрицательны (т. е. $R_0 + R_+ \subset M^\circ$), а также для КУП (1.1) выполнены условия 2° и 4°.

Тогда процесс (1.1) полностью управляем.

Доказательство. По условию 4°

$$\eta = \limsup_{t\to\infty} \inf_{s\in S} \int_0^t \alpha(t, \tau, s)\, d\tau > 0$$

Значит, существуют сколь угодно большие значения T, для которых

$$\inf_{s\in S} \int_0^T \alpha(T, \tau, s)\, d\tau \geqslant \frac{\eta}{2} \tag{1.13}$$

В то же время по условиям следствия для произвольного начального положения $z^0 \in R^n$ существует число $T_1 = T_1(z^0) < \infty$, такое, что $\| \pi e^{At} z^0 \| \leqslant \eta/2$ для всех $t \geqslant T_1$.

Тогда момент $T = T(z^0) \geqslant T_1$, удовлетворяющий условию (1.13), является искомым моментом гарантированного приведения траектории КУП (1.1) из начального положения на терминальное множество. Это утверждение доказывается аналогично доказательству теоремы 1.

Положим

$$g_1(t, \tau) = \inf_{s\in S} \alpha(t, \tau, s), \quad g_2(t, \tau) = \inf_{s\in S_0} \alpha(t, \tau, s) \tag{1.14}$$

Условие 5°. Существуют числа $\varepsilon > 0$, $\theta > 0$, такие, что непусто и неограничено множество

$$T(\varepsilon, \theta) = \left\{ t \geqslant 0 \colon \int_0^\theta g_1(t, \tau)\, d\tau \geqslant \varepsilon \right\}$$

и

$$\sup_{t\in T(\varepsilon, \theta)} \int_0^t g_2(t, \tau)\, d\tau = \infty$$

Очевидно, что выполнение условия 5° влечет выполнение условия 3°, а значит имеет место следующее утверждение.

Следствие 3. Если для КУП (1.1) выполняются условия 1°, 2° и 5°, то он полностью управляем.

2. Рассмотрим другой подход к исследованию управляемости процесса (1.1).

Введем многозначные отображения

$$W(t, v) = \pi e^{At} \varphi(U, v), \quad W(t) = \bigcap_{v\in V} W(t, v)$$

Условие 6°. $0 \in W(t)$ для всех $t \geqslant 0$.

Положим

$$\sigma(t, z, v) = \max\{\sigma \geqslant 0 \colon \sigma \cdot z \in W(t, v)\} \tag{2.1}$$

$$\beta(t, z) = \inf_{v\in V} \sigma(t, z, v), \quad z \in L, \quad z \neq 0, \quad t \geqslant 0 \tag{2.2}$$

Условие 7°.

$$1)\ \sup_{t\geqslant 0} \inf_{s\in S} \int_0^t \beta(\tau, s)\, d\tau > 0, \qquad 2)\ \sup_{t\geqslant 0} \inf_{s\in S_0} \int_0^t \beta(\tau, s)\, d\tau = \infty.$$

Отметим (так же как и в условии 3°) что если $S_0 = \varnothing$, то формально полагаем п. 2 условия 7° выполненным.

Теорема 2. Если $M^* = m + M^\circ$ — аффинное многообразие и выполнены условия 1°, 6° и 7°, то КУП (1.1) полностью управляем для произвольного вектора $m \in R_+ + R_0$.

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 1, отметим, что для любого начального положения $z^0 \in R^n$ имеется однозначное разложение $z^0 = z_+^0 + z_0^0 + z_-^0$, $z_+^0 \in R_+$, $z_0^0 \in R_0$, $z_-^0 \in R_-$.

Из п. I условия 7° следует существование $\varepsilon > 0$ и $\theta > 0$, таких, что

$$\inf_{s\in S}\int_0^\theta \beta(\tau, s)\,d\tau \geqslant \varepsilon$$

По этим ε, θ и z_-° определим такой момент T_1, что $T_1 \geqslant \theta$ и $\|\Pi_-\| \leqslant \varepsilon$ для всех $t \geqslant T_1$. Тогда из п. 2 условия 7° следует существование такого момента $T = T(z^\circ)$, что

$$\inf_{s\in S_0}\int_0^T \beta(\tau, s)\,d\tau \geqslant a\cdot\|\varphi(U, V)\|\cdot T_1 + \|\pi m\| + a\|z_0^\circ\| \geqslant \inf_{s\in S_0}\int_0^{T_1}\beta(\tau, s)\,d\tau + \|\pi m - \Pi_0\|$$

где во втором неравенстве учитывалась оценка

$$\beta(\tau, s) \leqslant \max_{u\in U,\ v\in V}\|\pi e^{A\tau}\varphi(u, v)\| \leqslant a\|\varphi(U, V)\|, \quad s\in S,\ \tau\geqslant 0$$

Момент $T(z^\circ)$ является гарантированным временем приведения траектории процесса (1.1) на терминальное множество $\{m + M^\circ\}$ из начального положения z°. Докажем это.

Считая, что $\Pi_- \neq 0$ и $\pi m - \Pi_0 \neq 0$, из предыдущих рассуждений получаем

$$\int_0^{T-T_1}\beta(T-\tau,\ \pi m - \Pi_0)\,d\tau = \int_{T_1}^{T}\beta(\tau, \pi m - \Pi_0)\,d\tau \geqslant 1 \tag{2.3}$$

$$\int_{T-T_1}^{T}\beta(T-\tau,\ -\Pi_-)\,d\tau = \int_0^{T_1}\beta(\tau, -\Pi_-)\,d\tau \geqslant 1 \tag{2.4}$$

Для произвольной измеримой функции $v(t)\in V$ будем выбирать измеримое управление $u(t)\in U$ $(t\in[0, T])$ из системы уравнений

$$\pi e^{A(T-\tau)}\varphi(u(\tau), v(\tau)) = \begin{cases}\sigma(T-\tau,\ \pi m - \Pi_0,\ v(\tau))\ (\pi m - \Pi_0), & \tau\in[0, \theta_1]\\ \sigma(T-\tau,\ -\Pi_-,\ v(\tau))\ (-\Pi_-), & \tau\in[T-T_1, \theta_2]\\ 0, & \tau\in(\theta_1,\ T-T_1)\cup(\theta_2, T]\end{cases}$$

где моменты θ_1 и θ_2, которые существуют в силу неравенств (2.3) и (2.4), определяются из условий

$$\int_0^{\theta_1}\sigma(T-\tau,\ \pi m - \Pi_0,\ v(\tau))\,d\tau = \int_{T-T_1}^{\theta_2}\sigma(T-\tau,\ -\Pi_-, v(\tau))\,d\tau = 1$$

Тогда получаем

$$\pi z(T) = \Pi_+ + \Pi_0 + \Pi_- + \int_0^T \pi e^{A(T-\tau)}\varphi(u(\tau), v(\tau))d\tau = \Pi_+ + \Pi_0 +$$
$$+ \int_0^{\theta_1}\sigma(T-\tau, \pi m - \Pi_0, v(\tau))\,d\tau\cdot(\pi m - \Pi_0) + \Pi_- +$$
$$+ \int_{T-T_1}^{\theta_2}\sigma(T-\tau, -\Pi_-, v(\tau))\,d\tau\cdot(-\Pi_-) = \pi m$$

В завершение доказательства укажем, что случаи $\Pi_- = 0$ и $\Pi_0 = \pi m$ исследуются таким же образом, как и в теореме 1.

Положим

$$h_1(t) = \inf_{s\in S}\ \beta(t, s), \quad h_2(t) = \inf_{s\in S_0}\ \beta(t, s). \tag{2.5}$$

Условие 8°.

1) $\sup\limits_{t\geqslant 0}\int_0^t h_1(\tau)\,d\tau > 0$, 2) $\sup\limits_{t\geqslant 0}\int_0^t h_2(\tau)\,d\tau = \infty$.

Следствие 4. Если для конфликтно управляемого процесса (1.1) выполнены условия 1°, 6° и 8°, то он полностью управляем.

Следствие 5. Пусть действительные части всех собственных значений сужения оператора A на подпространство L отрицательны, а также выполнено условие 6° и $0 \in \operatorname{int} M$ (int означает внутренность множества). Тогда КУП (1.1) полностью управляем.

Доказательство. Так как $0 \in \operatorname{int} M$, то $\delta D \subset M$ для некоторого $\delta > 0$. Тогда многозначное отображение $M(t, \tau) = \delta / tD$ $(t > 0)$ удовлетворяет условию 2° и для соответствующей этому отображению функции (1.3) выполняется неравенство $\alpha(t, \tau, s) \geqslant \delta/t$ $(s \in S)$, а значит, выполнено условие 4°. Таким образом, выполнены все предположения следствия 2, а значит процесс (1.1) полностью управляем.

Отметим, что утверждение, подобное следствию 5 (в несколько менее общей ситуации), приводится в работе [5].

3. Указанные выше условия полной управляемости КУП (1.1) обеспечивают выход траектории на терминальное множество в фиксированный момент времени. При этом важную роль играют аналоги условия Л. С. Понтрягина [8] (условия 2° и 6°). Рассмотрим проблему управляемости процесса (1.1) с нефиксированным моментом попадания траектории на терминальное множество, отказавшись при этом от условий 2° и 6°.

Отметим, что для того, чтобы функция (2.2) $\beta(t, s)$ была корректно определена, необязательно требовать выполнения условия 6°. Для этого достаточно, чтобы определена была функция (2.1) $\sigma(t, s, v)$ $(t \geqslant 0,\ s \in S,\ v \in V)$. А функция $\sigma(\cdot)$ может являться корректно определенной и тогда, когда не выполняется условие 6°.

Теорема 3. Пусть для КУП (1.1) выполнено условие 1°, определена функция $\beta(t, s)$ $(t \geqslant 0,\ s \in S)$ и выполнено условие 7°, а также $\pi A = A\pi$ и $0 \in M$. Тогда КУП (1.1) полностью управляем.

Доказательство. По условию 7° существуют $\varepsilon > 0$ и $\theta > 0$, такие, что

$$\inf_{s \in S} \int_0^\theta \beta(\tau, s)\, d\tau \geqslant \varepsilon$$

По этим ε, θ и z_-° определим такой момент T_1, что $T_1 \geqslant \theta$ и $\| \Pi_- \| \leqslant \varepsilon$ для всех $t \geqslant T_1$. Существует также момент $T = T(z^\circ)$ такой, что

$$\inf_{s \in S_0} \int_0^T \beta(\tau, s)\, d\tau \geqslant a \| \varphi(U, V) \| T_1 + a \| z_0^\circ \|$$

Считая, что $\Pi_- \neq 0$ и $\Pi_0 \neq 0$, для произвольной измеримой функции $v(t) \in V$ будем выбирать измеримое управление $u(t) \in U$ $(t \in [0, T])$ из системы уравнений

$$\pi e^{A(T-t)} \varphi(u(t), v(t)) = \begin{cases} \sigma(T-t, -\Pi_0, v(t))\,(-\Pi_0), & t \in [0, \theta_1] \\ \sigma(T-t, -\Pi_-, v(t))\,(-\Pi_-), & t \in (\theta_1, T] \end{cases}$$

где момент θ_1 определяется условием

$$\int_0^{\theta_1} \sigma(T-\tau, -\Pi_0, v(\tau))\, d\tau = 1$$

Определим момент $\theta_2 \in [\theta_1, T]$ условием

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sigma(T-\tau, -\Pi_-, v(\tau))\, d\tau = 1$$

Для этого момента имеем

$$\pi z(\theta_2) = \pi e^{A\theta_2}(z_+^\circ + z_0^\circ + z_-^\circ) + \int_0^{\theta_2} \pi e^{A(\theta_2-\tau)} \varphi(u(\tau), v(\tau))\, d\tau =$$

$$= \pi e^{A\theta_2} z_+^\circ + e^{A(\theta_2 - T)} \Big\{ \Pi_0 + \int_0^{\theta_1} \pi e^{A(T-\tau)} \varphi(u(\tau), v(\tau))\, d\tau +$$

$$+ \Pi_- + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \pi e^{A(T-\tau)} \varphi(u(\tau), v(\tau))\, d\tau \Big\} = 0 \in M$$

что и требовалось доказать. Укажем, что случаи $\Pi_- = 0$ и $\Pi_0 = 0$ рассматриваются аналогично.

Следствие 6. Для КУП (1.1) выполнены условия:

1) $A = \lambda E$, где E — тождественное преобразование R^n, $\lambda \leqslant 0$;

2) $0 \in M$;

3) существует число $\varepsilon > 0$, такое, что

$$\max \{\sigma \geqslant 0: \sigma \cdot s \in \pi\varphi (U, v)\} \geqslant \varepsilon, \quad \forall v \in V, \quad \forall s \in S.$$

Тогда КУП (1.1) полностью управляем.

4. Используем полученные результаты для исследования линейной задачи преследования

$$\dot{x} = Bx + u, \quad \dot{y} = Cy + v, \quad x \in R^n, \quad y \in R^n, \; u \in U, \quad v \in V$$

Терминальным является множество $M^* = \{(x, y) \in R^n \times R^n: x = y\}$, т. е. под поимкой понимается полное совпадение фазовых координат.

Приведем задачу к виду (1.1). Положим $z_1 = x - y$, $z_2 = y$, $z = (z_1, z_2) \in R^{2n}$. Тогда

$$M^* = M^\circ = \{(z_1, z_2): z_1 = 0\}, \quad \pi (z_1, z_2) = z_1$$

$$A = \begin{Vmatrix} B, & B - C \\ 0, & C \end{Vmatrix}, \quad e^{At} = \begin{Vmatrix} e^{Bt}, & e^{Bt} - e^{Ct} \\ 0, & e^{Ct} \end{Vmatrix},$$

$$e^{At} \begin{Vmatrix} u - v \\ v \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} e^{Bt}u - e^{Ct}v \\ e^{Ct}v \end{Vmatrix}$$

$W(t) = e^{Bt}U \overset{*}{-} e^{Ct}V$ ($\overset{*}{-}$ означает геометрическое вычитание множеств [8]), $\pi e^{At}z = e^{Bt}x - e^{Ct}y$.

Условие 9°. Существует непрерывная функция $\gamma(t)$, $0 \leqslant \gamma(t) \leqslant 1$, $t \geqslant 0$, такая, что $e^{Ct}V \subset \gamma(t) e^{Bt}U$.

Следствие 7. Пусть выполнено условие 9°, а также следующие условия:

1) существуют $b > 0$, $c > 0$, такие, что $\| e^{Bt} \| \leqslant b$, $\| e^{Ct} \| \leqslant c$ для всех $t \geqslant 0$;

2) U — выпуклый компакт и $0 \in \operatorname{int} U$;

3) $\limsup\limits_{t\to\infty} \gamma(t) < 1$.

Тогда из любых начальных положений x° и y° преследование может быть закончено за конечное время.

Доказательство. В силу выпуклости U из условия 9° следует

$$W(t) = e^{Bt}U \overset{*}{-} e^{Ct}V \supset (1 - \gamma(t)) e^{Bt}U, \quad t \geqslant 0$$

Условие 1 данного следствия обеспечивает выполнение условия 1°, а также означает, что у оператора B нет собственных значений с положительной действительной частью и все собственные значения с нулевой действительной частью являются простыми, т. е. $R^n = R_1(B) + R_-(B)$.

По условию 2 компакт U содержит шар εD радиуса $\varepsilon > 0$. Тогда по определению функций $h_1(\cdot)$ и $h_2(\cdot)$ (2.5) имеем

$$h_1(t) \geqslant (1 - \gamma(t)) \varepsilon \inf_{\|s\|=1} \| e^{Bt}s \|, \quad h_2(t) \geqslant (1 - \gamma(t)) \varepsilon \inf_{s \in R_1(B),\, \|s\|=1} \| e^{Bt}s \|$$

Для некоторого $d > 0$ имеем

$$\inf_{s \in R_1(B),\, \|s\|=1} \| e^{Bt}s \| = (\sup_{s \in R_1(B),\, \|s\|=1} \| e^{-Bt}s \|)^{-1} \geqslant d$$

а значит, учитывая условие 3, получаем

$$h_1(t) \geqslant \frac{(1 - \gamma(t)) \varepsilon}{\| e^{-Bt} \|} \not\equiv 0, \quad \liminf_{t\to\infty} h_2(t) \geqslant (1 - \limsup_{t\to\infty} \gamma(t)) \varepsilon d > 0.$$

Это означает, что выполнено условие 8°. Тем самым показано, что выполнены все условия следствия 4, что и завершает доказательство.

Следствие 8. Пусть выполнены следующие условия:

1) действительные части всех собственных значений матриц B и C — отрицательны;

2) $0 \in \operatorname{int} W(t)$, $t \geqslant 0$, где $W(t) = e^{Bt}U \overset{*}{-} e^{Ct}V$.

Тогда из любых начальных положений преследование может быть закончено за конечное время.

Теорема 4. Пусть выполнено условие 9°, а также следующие условия:

1) все собственные значения матриц B и C имеют отрицательные действительные части;

2) U — выпуклый компакт и нуль принадлежит относительной внутренности U (т. е. внутренности относительно несущего U подпространства [9]);

3) система $x^{\cdot} = Bx + u$, $u \in U$ вполне управляема [10, 11];

4) непрерывная функция $\gamma(\cdot)$ не равна тождественно единице.

Тогда из любых начальных положений x° и y° преследование может быть закончено за конечное время.

Доказательство. По условию 4 существуют числа $\delta > 0$, $t_2 > t_1 \geqslant 0$ такие, что $1 - \gamma(t) \geqslant \delta$ для всех $t \in [t_1, t_2]$.

Докажем, что существует число $\varepsilon > 0$, такое, что

$$\varepsilon D \subset \int_{t_1}^{t_2} e^{B\tau} U \, d\tau \tag{4.1}$$

Предположим противное. Тогда в силу условия 2, существует вектор $\psi \neq 0$, такой, что

$$\left(\int_{t_1}^{t_2} e^{B\tau} U \, dt, \psi\right) = 0$$

Это условие эквивалентно тождеству $(e^{B\tau}u, \psi) = 0$ для всех $\tau \in [t_1, t_2]$ и $u \in U$. Продифференцировав теперь это тождество в точке $\tau \in (t_1, t_2)$ k раз, умножив на $(t - \tau)^k/k!$ $(t \in R)$ и просуммировав по k, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} (B^k e^{B\tau} u, \psi) \frac{(t-\tau)^k}{k!} = (e^{Bt}u, \psi) = 0$$

для всех $t \in R$ и $u \in U$. Это тождество противоречит условию 3. Значит, выполнено включение (4.1).

Из условия *1* для любых $x^\circ, y^\circ \in R^n$ следует существование такого момента $T \geqslant t_2$, что $\| e^{BT}x^\circ - e^{CT}y^\circ \| \leqslant \varepsilon\delta$. Сопоставляя этот факт с (4.1), получаем, что существует измеримая функция $\eta(\tau) \in U$ $(\tau \in [0, T])$, для которой

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} e^{B\tau} \eta(\tau) \, d\tau = -(e^{BT}x^\circ - e^{CT}y^\circ)$$

Для произвольной измеримой функции $v(t) \in V$ измеримое управление $u(t) = u(x^\circ, y^\circ, v(t)) \in U$ найдем из уравнения

$$e^{B(T-t)} u(t) = \begin{cases} e^{C(T-t)} v(t) + \delta e^{B(T-t)} \eta(T-t), & t \in [T - t_2, T - t_1] \\ e^{C(T-t)} v(t), & t \in [0, T - t_2) \cup (T - t_1, T] \end{cases}$$

которое имеет решение в силу включения

$$e^{Bt} U \overset{*}{-} e^{Ct} V \supset (1 - \gamma(t)) e^{Bt} U$$

Это управление решает задачу преследования из начальных положений x° и y° в момент T:

$$x(T) - y(T) = e^{BT}x^\circ - e^{CT}y^\circ + \int_0^T e^{B(T-t)}u(t) - e^{C(T-t)}v(t)\,dt =$$

$$= e^{BT}x^\circ - e^{CT}y^\circ + \delta\int_{T-t_2}^{T-t_1} e^{B(T-t)}\eta(T-t)\,dt = 0,$$

что и требовалось доказать.

Замечание 2. Если рассматривать задачу приведения траектории КУП (1.1) не точно на терминальное множество, а в его (сколь угодно малую) ε-окрестность, то целый ряд условий на параметры КУП (1.1) может быть существенно ослаблен. В силу утверждений из работы [12] достаточно требовать выполнения соответствующих условий лишь для со $\varphi(U, v)$ (т. е. для выпуклой оболочки). А если, кроме того, для КУП (1.1) выполняется «условие седловой точки в маленькой игре» [13], то построение управления $u(\cdot)$ можно провести в классе позиционных кусочно-постоянных управлений [14].

Пример 1. Рассмотрим линейную задачу преследования, для которой не выполняются условия следствия 7, но применима теорема 2

$$x^\cdot = Bx + Fu,\ y^\cdot = v;\ x, y \in R^2;\ u \in U,\ v \in V \tag{4.2}$$

$$U = V = \{u \in R^2 : \|u\| \leqslant 1\},\ B = \begin{Vmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{Vmatrix},\quad F = \begin{Vmatrix} 2, & 0 \\ 0, & 1 \end{Vmatrix}$$

Оператор e^{Bt} задает вращение R^2 со «скоростью» $(2\pi)^{-1}$, а FU — эллипс с осями длиной 1 и 2. Поэтому $W(t) = e^{Bt}FU \overset{*}{-} V = 0$ для всех $t \geqslant 0$.

Если перейти к полярным координатам (r, ψ) в R^2 и вспомнить уравнение эллипса в полярных координатах, то можно вычислить функцию (2.2):

$$\beta(t, \psi) = \frac{2}{\sqrt{1 + 3\sin^2(t+\psi)}} 1 - \geqslant 0,\ 0 \leqslant \psi < 2\pi$$

Эта функция 2π-периодична по t и почти всюду положительна, а значит, для нее выполнено условие 7°. Используя теперь теорему 2, получаем полную управляемость процесса (4.2).

Пример 2. («Мальчик и крокодил» [8])

$$z_1^\cdot = z_2 - v,\quad z_2^\cdot = u;\quad z_1, z_2, u, v \in R^n,\quad \|u\| \leqslant 1,\quad \|v\| \leqslant 1 \tag{4.3}$$

$$M^* = \{(z_1, z_2) \in R^n \times R^n : \|z_1\| \leqslant {}^1/_2\}$$

Положим

$$\omega(t, \tau) = \begin{cases} 0, & \tau \in [0, t-1] \\ 2(\tau + 1 - t), & \tau \in (t-1, t]\ t \geqslant 1 \end{cases}$$

Можно убедиться, что множество (1.2)

$$\Phi(t, \tau) = ((t-\tau)U - \omega(t, \tau)M) \overset{*}{-} V = (t - \tau + \omega(t, \tau)/2 - 1)D$$

А значит, $0 \in \Phi(t, \tau)$ и функция (1.14) $g_2(t, \tau) = t - \tau - 1 + {}^1/_2\omega(t, \tau)$, поэтому функция

$$\int_0^t g_2(t, \tau)\,d\tau = \frac{(t-1)^2}{2}$$

неограниченно возрастает при неограниченном возрастании t.

Отметим, что в данном примере не выполнено условие 1°, но «крокодил» (u) может остановиться за время $\|z_2^\circ\|$, а уже затем начать преследование «мальчика» (v). Значит, можно считать, что $z_2^\circ = 0$. Комбинируя теперь утверждения следствий 1 и 3, получаем управляемость процесса (4.3).

Пример 3. (Контрольный пример Л. С. Понтрягина [8])

$$z_1^\cdot = z_2,\quad z_2^\cdot = az_2 + \rho u,\qquad z_3^\cdot = z_4,\ z_4^\cdot = bz_4 + \sigma v \tag{4.4}$$

$$z_1, z_2, z_3, z_4, u, v \in R^n;\quad a, b, \sigma, \rho \in R;\quad \|u\| \leqslant 1,\ \|v\| \leqslant 1$$

$$M^* = M^\circ = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) : z_1 = z_3\}$$

Проводя исследование, аналогичное проведенному в работе [8], можно убедиться, что в этом примере функция (2.2) имеет вид

$$\beta(t, z) = \frac{e^{at}-1}{a}\rho - \frac{e^{bt}-1}{b}\sigma, \quad t \geqslant 0$$

Тогда, если $a < 0$, $b < 0$, $\rho \geqslant \sigma$, $\rho/a < \sigma/b$, то применима теорема 2, которая гарантирует полную управляемость процесса (4.4).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григоренко Н. Л.* К линейной задаче преследования несколькими объектами // Докл. АН СССР. 1981. Т. 258. № 2. С. 275—279.
2. *Чикрий А. А.* Групповое преследование при ограниченных координатах убегающего // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 6. С. 906—913.
3. *Чикрий А. А.* Дифференциальные игры с несколькими преследователями // Banach Center Publ. Mathem. Control Theory. W.: PWN. 1985. V. 14. P. 81—107.
4. *Керимов А. К.* К задаче преследования для одного класса линейных дифференциальных игр // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1976. № 2. С. 8—12.
5. *Yong J.* On differential pursuit games // SIAM. J. Control and Optimiz. 1988. V. 26. № 2. P. 478—495.
6. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988. 552 с.
7. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 623 с.
8. *Понтрягин Л. С.* Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. 1980. Т. 112. Вып. 3. С. 307—330.
9. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Наука, 1973. 469 с.
10. *Благодатских В. И.* Линейная теория оптимального управления. М.: Изд-во МГУ, 1978. 95 с.
11. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 574 с.
12. *Kaškosz B.* On a nonlinear evasion problem // SIAM. J. Control and Optimiz. 1977. V. 15. № 4. P. 661—673.
13. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
14. *Чикрий А. А., Белоусов А. А.* Позиционное сближение с терминальным множеством сложной структуры // Негладкие задачи оптимизации и управления. Свердловск: ИММ УрО АН СССР, 1988. С. 81—93.

Киев

Поступила в редакцию
3.X.1989