Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 6, 1990

УДК 531.36 : 62—50

Ф. Л. Черноусько

ДЕКОМПОЗИЦИЯ И СУБОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Рассматривается нелинейная управляемая динамическая система, описываемая уравнениями Лагранжа. Исследуется задача о построении ограниченных управляющих сил, приводящих систему в заданное состояние за конечное время. Указаны достаточные условия разрешимости задачи, причем исходная система при этих условиях разбивается на подсистемы с одной степенью свободы каждая. На основе декомпозиции и игрового подхода предложен закон управления по обратной связи, решающий поставленную задачу и близкий к оптимальному по быстродействию. Показано, что при построении управления важно учитывать максимально возможные значения нелинейных членов и возмущений в уравнениях движения. Игнорировать возмущения допустимо, лишь если отношение максимальных уровней возмущения и управления не превышает отношения «золотого сечения».

1. Постановка задачи. Рассматривается система, динамика которой описывается уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_k^{\cdot}}-\frac{\partial T}{\partial q_k}=Q_k'(q,q^{\cdot},t)+Q_k \tag{1.1}$$

Здесь $q=(q_1, \ldots, q_n)$ — обобщенные координаты системы, n — число ее степеней свободы, точкой обозначены производные по времени t, обобщенные силы состоят из управляющих сил Q_k, которые предстоит определить, и из сил Q_k', включающих все остальные внешние и внутренние силы, в том числе неконтролируемые возмущения; выше и всюду далее $k=1, \ldots, n$. Кинетическая энергия системы равна

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}(q)\,q_i^{\cdot}q_j^{\cdot} \tag{1.2}$$

где A_{ij} — элементы симметрической положительно-определенной матрицы $A(q)$ размером $n\times n$. Подставляя (1.2) в (1.1), приведем уравнения движения к виду

$$A(q)\,q^{\cdot\cdot}=Q+S(q,q^{\cdot},t) \tag{1.3}$$

Здесь $Q=(Q_1, \ldots, Q_n)$ — вектор управляющих сил, $S=(S_1, \ldots, S_n)$ — вектор-функция с компонентами

$$S_k=Q_k'-\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial A_{ki}}{\partial q_j}-\frac{1}{2}\frac{\partial A_{ij}}{\partial q_k}\right)q_i^{\cdot}q_j^{\cdot} \tag{1.4}$$

На управляющие силы наложены ограничения

$$|Q_k|\leqslant Q_k^{\circ} \tag{1.5}$$

где $Q_k^{\circ}>0$ — заданные постоянные.

Начальные условия для системы (1.3) в начальный момент времени t_0 имеют вид

$$q(t_0)=q^{\circ},\quad q^{\cdot}(t_0)=(q^{\cdot})^{\circ} \tag{1.6}$$

и лежат в некоторой области D в $2n$-мерном пространстве: $\{q^{\circ},(q^{\cdot})^{\circ}\}\in D$.

Сформулируем задачу управления.

Задача 1. Найти управление по принципу обратной связи $Q = Q(q, q^{\cdot})$, удовлетворяющее ограничениям (1.5) и переводящее систему (1.3) из произвольного начального состояния (1.6) в области D в заданное состояние с нулевыми скоростями

$$q(t_1) = q^1, \quad q^{\cdot}(t_1) = 0 \tag{1.7}$$

за конечное время (момент $t_1 > t_0$ не фиксирован).

2. Упрощающие предположения. Представим матрицу $A(q)$ в виде

$$\begin{gathered} A(q) = B(q) A_1, \quad B(q) = E + L = \\ = A(q) A_1^{-1}, \quad L = [A(q) - A_1] A_1^{-1} \end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь A_1 — некоторая постоянная симметрическая положительно-определенная матрица размера $n \times n$, E — единичная матрица размера $n \times \eta$. Матрица $B(q)$ — неособенная, поэтому $B^{-1}(q)$ существует. Умножая обе части уравнения (1.3) на $B^{-1}(q)$ и используя (2.1), получим

$$A_1 q^{\cdot\cdot} = Q + R(q, q^{\cdot}, t, Q) \tag{2.2}$$

$$\begin{gathered} R = R' + R'', \quad R' = B^{-1}(q) S(q, q^{\cdot}, t) \\ R'' = [B^{-1}(q) - E] Q \end{gathered} \tag{2.3}$$

Уравнение (2.2) эквивалентно исходному уравнению (1.3).

Ниже будет предполагаться, что компоненты вектора R из (2.3) ограничены неравенствами

$$|R_k(q, q^{\cdot}, t, Q)| \leqslant R_k^{\circ} < Q_k^{\circ} \tag{2.4}$$

при всех $t \geqslant t_0$, для всех $\{q, q^{\cdot}\} \in D$ и всех Q, удовлетворяющих неравенствам (1.5).

Следующая лемма позволяет проверить выполнение условия (2.4).

Лемма. Пусть для любого n-мерного вектора z при всех $t \geqslant t_0$, $\{q, q^{\cdot}\} \in D$ выполнены условия

$$\begin{gathered} |A_1 z| \geqslant \mu_1 |z|, \quad |[A(q) - A_1] z| \leqslant \mu |z| \\ |S_k(q, q^{\cdot}, t)| \leqslant \nu Q_k^0, \quad 0 < \mu < \mu_1, \quad \nu > 0 \end{gathered} \tag{2.5}$$

где μ_1, μ, ν — постоянные. Тогда для компонент вектора R из (2.3) при всех $t \geqslant t_0$, $\{q, q^{\cdot}\} \in D$ и всех Q, удовлетворяющих (1.5), справедливы оценки

$$\begin{gathered} |R_k(q, q^{\cdot}, t, Q)| \leqslant \nu Q_k^0 + \chi(1 + \nu) Q^0 \\ \chi = \mu(\mu_1 - \mu)^{-1}, \quad Q^0 = [\Sigma (Q_k^0)^2]^{1/2} \end{gathered} \tag{2.6}$$

Отметим, что в силу положительной определенности матрицы A_1 в качестве μ_1 в (2.5) можно принять любое положительное число, не превосходящее ее наименьшего собственного значения.

Доказательство. Из первого неравенства (2.5) имеем

$$|A_1^{-1} z| \leqslant \mu_1^{-1} |z| \tag{2.7}$$

Здесь и далее z — любой n-мерный вектор.

Из (2.7) и второго неравенства (2.5) имеем, с учетом обозначения (2.1)

$$|Lz| \leqslant \lambda |z|, \quad \lambda = \mu\mu_1^{-1} \tag{2.8}$$

Соотношение (2.1) для B перепишем в виде

$$Bz = z + Lz \tag{2.9}$$

Из (2.9), (2.8) следует оценка

$$|Bz| \geqslant |z| - |Lz| \geqslant (1 - \lambda) |z| \tag{2.10}$$

Из условия леммы (2.5) следует, что $\lambda < 1$. Полагая $z = B^{-1}z'$ в (2.10), получим

$$|B^{-1}z'| \leqslant (1-\lambda)^{-1}|z'| \tag{2.11}$$

Неравенства (2.8), (2.11) дают

$$|LB^{-1}z| \leqslant \chi |z|, \quad \chi = \lambda(1-\lambda)^{-1} = \mu(\mu_1-\mu)^{-1} \tag{2.12}$$

Перепишем равенство (2.9), полагая в нем $z = B^{-1}S$. Используя полученное соотношение, запишем равенство (2.3) для R'

$$R_k' = (B^{-1}S)_k = S_k - (LB^{-1}S)_k \tag{2.13}$$

Нижние индексы обозначают компоненты векторов. Из (2.13) при помощи условия (2.5) и неравенства (2.12) имеем

$$|R_k'| \leqslant \nu Q_k^0 + |LB^{-1}S| \leqslant \nu Q_k^0 + \chi|S| \leqslant \nu Q_k^0 + \chi\nu Q^0 \tag{2.14}$$

Здесь использовано обозначение (2.6) для Q^0. В соотношение (2.3) для вектора R'' подставим величину $B^{-1}Q$, полученную из равенства (2.9) при $z = B^{-1}Q$

$$R_k'' = (B^{-1}Q - Q)_k = -(LB^{-1}Q)_k$$

Отсюда при помощи неравенства (2.12), (1.5) получим

$$|R_k''| \leqslant |(LB^{-1}Q)_k| \leqslant |LB^{-1}Q| \leqslant \chi|Q| \leqslant \chi[\Sigma(Q_k^0)^2]^{1/2} = \chi Q^0$$

Из последнего неравенства и (2.14) следует (2.6). Лемма доказана.

Следствие. Если в условиях леммы $\nu < 1$, а μ достаточно мало, то выполняются условия (2.4).

В связи с наложенным условием (2.4) возникают вопросы: как выбрать матрицу A_1 и как проверить это условие для заданной системы (1.3)? Эти вопросы взаимосвязаны, так как вектор R в условии (2.4) зависит от матрицы A_1 посредством формул (2.1), (2.3). Из формулы (2.6) и приведенного следствия вытекает, что μ следует брать как можно меньшим. Значит, матрица A_1 должна как можно меньше отличаться от $A(q)$ в области D. Другими словами, следует взять матрицу A_1 равной некоторому «среднему» для области D значению $A(q)$, например, равной $A(q^1)$, $A(q^0)$ или $A[(q^0+q^1)/2]$. Число μ_1 следует взять равным (или близким) наименьшему собственному значению матрицы A_1 (см. замечание выше). Если при сделанном выборе матрицы A_1 условие (2.4) не выполнено для данной системы (1.3), то следует, во-первых, повысить возможности управления, т. е. увеличить Q_k^0 в (1.5), чтобы имело место условие $\nu < 1$, и, во-вторых, уменьшить область D так, чтобы $A(q)$ мало отличалось от A_1.

3. Декомпозиция. В системе (2.2) сделаем замену переменных

$$A_1(q-q^1) = y \tag{3.1}$$

где q^1 введено в (1.7). Тогда система (2.2) примет вид

$$y_k^{\cdot\cdot} = Q_k + R_k \tag{3.2}$$

Предположим, что выполнено условие (2.4) и все рассматриваемые движения системы лежат в области D. Тогда при учете (1.5) имеем ограничения

$$|Q_k| \leqslant Q_k^0, \quad |R_k| \leqslant R_k^0 < Q_k^0 \tag{3.3}$$

Начальные условия (1.6) и граничные условия (1.7) после замены (3.1) примут вид

$$\begin{gathered} y(t_0) = A_1(q^0-q^1), \ y^{\cdot}(t_0) = A_1(q^{\cdot})^0 \\ y(t_1) = 0, \ y^{\cdot}(t_1) = 0 \end{gathered} \tag{3.4}$$

В системе (3.2), которая распадается на n подсистем, R_k можно рассматривать как ограниченные независимые возмущения. В результате можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть выполнено условие (2.4) и все рассматриваемые движения системы (1.3) лежат в области D. Тогда для решения задачи 1 достаточно решить n задач управления для линейных подсистем (3.2) с одной степенью свободы каждая. В каждой из этих задач требуется построить скалярное управление $Q_k(y_k, y_k^\bullet)$, удовлетворяющее ограничению (3.3) и переводящее k-ю подсистему (3.2) из произвольного начального состояния в начало координат за конечное время при любых допустимых возмущениях R_k, удовлетворяющих ограничению (3.3).

Отметим, что иной подход к построению управления механическими системами на основе декомпозиции предложен в работах [1, 2].

4. Решение игровой задачи. Рассмотрим k-ю подсистему (3.2) и положим в ней

$$y_k = Q_k^0 x, \quad Q_k = Q_k^0 u, \quad R_k = Q_k^0 v \tag{4.1}$$

Тогда эта подсистема вместе с ограничениями (3.3) и условиями (3.4) примет стандартный вид

$$x^{\bullet\bullet} = u + v, \ |u| \leqslant 1, \ |v| \leqslant \rho < 1 \tag{4.2}$$

$$x(0) = \xi, \ x^\bullet(0) = \eta, \ x(\tau) = x^\bullet(\tau) = 0 \tag{4.3}$$

Здесь

$$\begin{gathered}\rho = R_k^0/Q_k^0 < 1, \ \xi = y_k(t_0)/Q_k^0 = \\ = [A_1(q^0 - q^1)]_k/Q_k^0, \ \eta = y_k^\bullet(t_0)/Q_k^0 = \\ = [A_1(q^\bullet)^0]_k/Q_k^0, \ \tau = t_1 - t_0\end{gathered} \tag{4.4}$$

причем начальный момент времени в (4.3) без нарушения общности принят равным нулю.

Воспользуемся подходом теории дифференциальных игр и найдем управление по обратной связи $u(x, x^\bullet)$, приводящее систему (4.2) в начало координат (4.3) за минимальное гарантированное время τ при любых допустимых возмущениях v. Данная задача представляет собой простую линейную дифференциальную игру однотипных объектов [3]. Ее решение, как известно, сводится к решению задачи оптимального управления для системы

$$x^{\bullet\bullet} = (1 - \rho) u, \ |u| \leqslant 1, \ \tau \to \min \tag{4.5}$$

при граничных условиях (4.3). Искомое управление $u(x, x^\bullet)$ и минимальное гарантированное время τ в игровой задаче (4.2), (4.3) совпадает с синтезом оптимального управления и временем быстродействия для задачи (4.5), (4.3). Отметим, что система (4.5) получается из (4.2) при возмущении, равном $v = -\rho u$, которое представляет собой оптимальное управление «противника», выбирающего возмущение v.

Решение задачи оптимального быстродействия (4.5), (4.2) хорошо известно [4]. Приведем соотношения, нужные для дальнейшего решения.

Оптимальное программное управление в задаче (4.5), (4.2) принимает предельные значения $u = \pm 1$ и имеет не более одной точки переключения. Из общего решения системы (4.5) при $u = \mathrm{const}$ получим уравнения фазовых траекторий в плоскости $x, x^\bullet$

$$x = B' + [2(1 - \rho) u]^{-1} (x^\bullet)^2, \ B' = \mathrm{const} \tag{4.6}$$

Единственными траекториями, входящими при росте t в начало координат, являются параболы (4.6) при $B' = 0$ и $u = \pm 1$. На этих параболах имеем

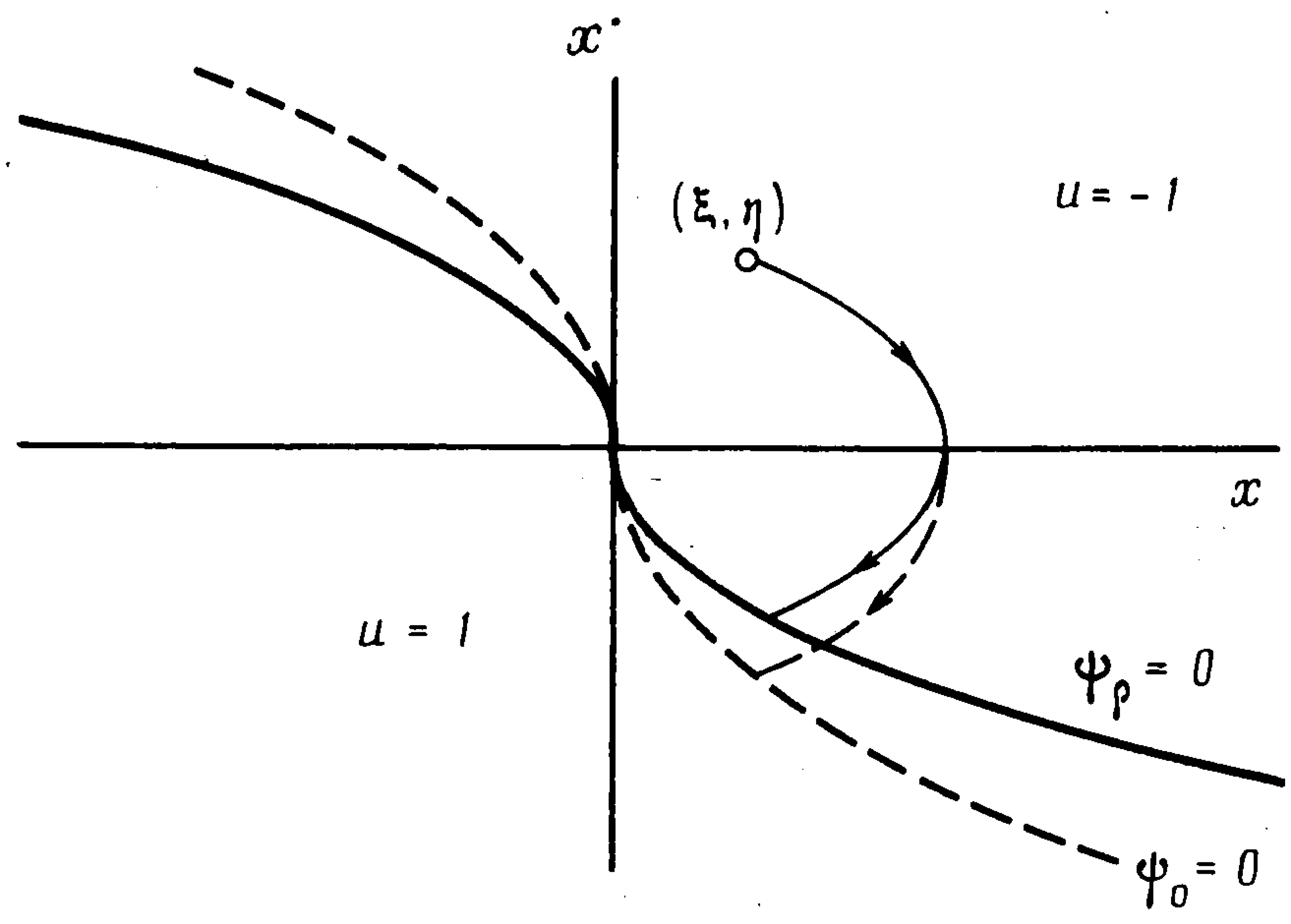
$$\begin{gathered}x = (1 - \rho) u (t - \tau)^2/2, \ x^\bullet = (1 - \rho) u (t - \tau) \\ (u = \pm 1)\end{gathered} \tag{4.7}$$

Две ветви парабол (4.7) при $t \leqslant \tau$ образуют кривую переключений (КП). Синтез оптимального управления имеет вид

$$u(x, x^{\bullet}) = \operatorname{sign} \psi_\rho(x, x^{\bullet}) \text{ при } \psi_\rho \neq 0$$
$$u(x, x^{\bullet}) = \operatorname{sign} x = -\operatorname{sign} x^{\bullet} \text{ при } \psi_\rho = 0 \tag{4.8}$$
$$\psi_\rho(x, x^{\bullet}) = -x - x^{\bullet} \, | x^{\bullet} | \, [2(1-\rho)]^{-1} \tag{4.9}$$

Уравнение КП может быть представлено в виде равенства нулю функции переключений $\psi_\rho(x, x^{\bullet}) = 0$. Все оптимальные фазовые траектории в плоскости x, $x^{\bullet}$ состоят из двух отрезков парабол (4.6) при $u = \pm 1$, причем второй отрезок совпадает с отрезком КП (4.7) и заканчивается в начале координат. Первый отрезок отсутствует, если начальная точка $\{\xi, \eta\}$ лежит на КП.

На фиг. 1 сплошной жирной линией изображена КП $\psi_\rho = 0$, а сплошной тонкой линией — оптимальная траектория, начинающаяся в точке $\{\xi, \eta\}$ из области $\psi_\rho < 0$. На первом отрезке этой траектории $u = -1$, а на втором $u = +1$. Стрелками показано направление роста времени t. Поле оптимальных фазовых траекторий обладает центральной симметрией относительно начала координат.



Фиг. 1

Подсчитаем время быстродействия τ, необходимое для попадания в начало координат по оптимальной траектории из произвольной начальной точки $\{\xi, \eta\}$. Пусть, для определенности, $\psi_\rho(\xi, \eta) < 0$. Обозначим через s момент переключения, $s \in [0, \tau]$. Точка $x(s)$, $x^{\bullet}(s)$ лежит, с одной стороны, на параболе, отвечающей общему решению системы (4.5) при $u = -1$ и проходящей при $t = 0$ через начальную точку $\{\xi, \eta\}$, а с другой стороны — на КП (4.7) для $u = 1$. Приравнивая соответствующие выражения, получим

$$x(s) = \xi + \eta s - (1-\rho) s^2/2 = (1-\rho)(s-\tau)^2/2$$
$$x^{\bullet}(s) = \eta - (1-\rho) s = (1-\rho)(s-\tau)$$

Определяя s и τ из этих равенств, найдем

$$\tau(\xi, \eta) = (1-\rho)^{-1} \{2 [\eta^2/2 - (1-\rho) \xi\gamma]^{1/2} - \eta\gamma\}$$
$$\gamma = \operatorname{sign} \psi_\rho(\xi, \eta) \tag{4.10}$$

Здесь учтено свойство симметрии фазовых траекторий. Функция ψ_ρ определена в (4.9). На КП ($\psi_\rho = 0$) в качестве γ в (4.10) можно взять любое из чисел $\gamma = \pm 1$, значение $\tau(\xi, \eta)$ будет одним и тем же.

Соотношения (4.8)—(4.10) определяют синтез оптимального управления и минимальное гарантированное время в игровой задаче (4.2), (4.3). Отметим, что если возмущение v отличается от оптимального ($v \neq -\rho u$), то фазовые траектории будут также отличаться от оптимальных. Однако время приведения системы в начало координат будет не превышать τ из (4.10). Заметим, что, попав на КП, движение будет проходить по этой кривой вплоть до начала координат при любых допустимых возмущениях. При этом, если $v \neq -\rho u$, то реализуется скользящий режим движения по КП. Так, если $v = 0$ на КП, то управление принимает значения $u = \pm 1$ с бесконечно частыми сменами знака, так что «в среднем» $u = 1 - \rho$ или $u = -(1 - \rho)$ для соответствующих ветвей КП.

5. Синтез управления. Перейдем к решению исходной задачи 1. Синтез управления в этой задаче получим на основе соотношений (4.1), (3.1):

$$
\begin{gathered}
Q_k(q, q^{\cdot}) = Q_k^0 u(x, x^{\cdot}) \\
x = y_k/Q_k^0 = [A_1(q - q^1)]_k/Q_k^0 \\
x^{\cdot} = y_k^{\cdot}/Q_k^0 = (A_1 q^{\cdot})_k/Q_k^0
\end{gathered} \tag{5.1}
$$

Функция $u(x, x^{\cdot})$ дана соотношениями (4.8), (4.9), в которых параметр ρ для каждого k определен равенством (4.4). Построенное управление (5.1) является релейным и принимает предельно допустимые значения $Q_k = \pm Q_k^0$.

Опишем характер движения при управлении (5.1). Сначала предположим, что возмущения R_k в системе (2.2) или (3.2) принимают в каждый момент времени оптимальные «наихудшие» значения, максимально задерживающие приведение системы в конечное состояние. В терминах системы (4.2) это означает, что $v = -\rho u$, а в терминах системы (3.2) при учете равенств (4.1), (4.4), (5.1) имеем

$$
R_k = -R_k^0 u(x, x^{\cdot}) = -R_k^0 Q_k(q, q^{\cdot})/Q_k^0 \tag{5.2}
$$

При возмущении (5.2) движение системы (3.2) по каждой координате y_k происходит по траекториям оптимального быстродействия системы (4.5). Переход от исходных координат q к координатам y_k и к переменным x, $x^{\cdot}$ дается соотношениями (3.1), (4.1) или (5.1).

Если же возмущения отличаются от оптимальных (5.2), как это обычно имеет место, то фазовые траектории для каждой k-й степени свободы в плоскости x, $x^{\cdot}$ отклоняются от оптимальных, как это описано в разд. 4. При этом движения по КП происходят в скользящем режиме.

Время t_1 приведения системы (1.3) (или (2.2)) в заданное состояние (1.7) не превосходит максимального из времен оптимального быстродействия для каждой из подсистем (3.2), (4.2) или (4.5). С учетом (4.4) имеем

$$
\begin{gathered}
t_1 \leqslant t_0 + \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \tau(\xi_k, \eta_k) \\
\xi_k = [A_1(q^0 - q^1)]_k/Q_k^0, \quad \eta_k = [A_1(q^{\cdot})^0]_k/Q_k^0
\end{gathered} \tag{5.3}
$$

Функция $\tau(\xi, \eta)$ дана равенством (4.10), в котором ρ определено согласно (4.4).

Подытожим результаты в виде теоремы.

Теорема 2. Пусть выполнено условие (2.4) и все рассматриваемые двидения лежат в области D. Тогда синтез управления $Q(q, q^{\cdot})$, решающий задачу 1, дается соотношениями (5.1), где функция $u(x, x^{\cdot})$ определена равенствами (4.8), (4.9), а параметр ρ для каждой степени свободы дан соотношением (4.4). Это управление приводит систему (1.3) в заданное состояние (1.7) не позже, чем в момент времени t_1, определяемый равенствами (5.3), (4.10).

Построенное управление можно назвать субоптимальным, так как оно близко к оптимальному по быстродействию и превращается в него при «наихудших» возмущениях.

6. Сравнение двух способов управления. Предложенный выше способ управления учитывает наличие возмущений R_k в системе (2.2) или (3.2) и зависит от отношения уровней возмущения и управления (см. (4.4), параметр $\rho < 1$). Возможен и другой, довольно распространенный подход к построению управления, при котором возмущения вообще игнорируются, и управление строится без их учета.

Затем полученный таким образом закон управления применяется для исходной системы при наличии возмущений. Такой подход применялся, например, при построении управления манипуляционными роботами [5, 6].

Сравним оба способа управления применительно к системе (4.2), (4.3), к которой сводятся после декомпозиции уравнения движения, и выясним, насколько оправдано игнорирование возмущений при построении управления.

При отсутствии возмущений ($v = 0$) система (4.2) принимает вид (4.5), причем $\rho = 0$. Для нее синтез оптимального быстродействия в начало координат дается прежними соотношениями (4.8), (4.9) при $\rho = 0$. Имеем

$$\psi_0(x, x^\cdot) = -x - x^\cdot \mid x^\cdot \mid / 2 \tag{6.1}$$

КП $\psi_0 = 0$ для случая $\rho = 0$ изображена на фиг. 1 жирной штриховой линией. Она состоит из двух ветвей парабол, отличающихся от ветвей КП $\psi_\rho = 0$ для $\rho > 0$ лишь коэффициентом.

Рассмотрим движение системы (4.2) при управлении, задаваемом соотношениями (4.8), (6.1). Чтобы оценить влияние возмущений, решим следующую задачу.

Задача 2. Найти функцию $v(t)$, удовлетворяющую ограничению $\mid v \mid \leqslant \rho$ и такую, что фазовая траектория системы (4.2) при управлении (4.8), (6.1) и начальном условии (4.3) первый раз пересекает КП $\psi_0 = 0$ как можно дальше от начала координат, т. е. при максимально возможном $\mid x^\cdot \mid$, или, что то же, при максимальном $\mid x \mid$.

Примем для определенности, что начальная точка $\{\xi, \eta\}$ лежит в области $\psi_0 < 0$. Фазовая траектория системы при этом впервые пересекает ту ветвь КП $\psi_0 = 0$, на которой $x > 0$, $x^\cdot < 0$. Согласно (4.8), при этом имеем $u = -1$ на всей траектории. В итоге задача 2 сводится к следующей задаче оптимального управления:

$$\begin{gathered} x_1^\cdot = x_2, \ x_2^\cdot = -1 + v, \ \mid v \mid \leqslant \rho < 1 \\ x_1(0) = \xi, \ x_2(0) = \eta, \ 0 \leqslant t \leqslant \theta \\ 2x_1(\theta) = x_2^2(\theta), \ x_2(\theta) \to \min \end{gathered} \tag{6.2}$$

Здесь θ — пока неизвестный момент окончания процесса. Применяя принцип максимума [4], составим функцию Гамильтона

$$H = p_1 x_2 + p_2 (v - 1) - (v - 1), \ \mid v \mid \leqslant \rho \tag{6.3}$$

Здесь p_1, p_2 — сопряженные переменные, удовлетворяющие системе $p_1^\cdot = 0$, $p_2^\cdot = -p_1$. Интегрируя сопряженную систему, получим

$$p_1 = C_1, \ p_2 = C_2 - C_1 t \tag{6.4}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Из принципа максимума при учете соотношений (6.3), (6.4), найдем

$$v = \rho \operatorname{sign}(p_2 - 1) = \rho \operatorname{sign}(C_2 - C_1 t - 1) \tag{6.5}$$

Следовательно, оптимальное управление $v(t) = \pm\rho$ имеет на интервале $(0, \theta)$ не более одной точки переключения. Условия трансверсальности для задачи (6.2) имеют вид

$$\begin{gathered} p_1(\theta)\, x_2(\theta) + p_2(\theta) = 0 \\ H_\theta = p_1(\theta)\, x_2(\theta) + \rho\, | p_2(\theta) - 1 | - p_2(\theta) + 1 = 0 \end{gathered} \tag{6.6}$$

Здесь использовано равенство (6.5). Исключая $p_1(\theta)$ из соотношений (6.6), получим

$$\rho\, | p_2(\theta) - 1 | = 2p_2(\theta) - 1 \tag{6.7}$$

Предположим сначала, что $p_2(\theta) \geqslant 1$. Тогда из (6.7) найдем

$$p_2(\theta) = (1 - \rho)(2 - \rho)^{-1} < 1$$

что противоречит сделанному предположению. Следовательно, $p_2(\theta) < 1$ и, согласно (6.5), имеем $v(\theta) = -\rho$. Таким образом, функция $v(t)$ согласно (6.5) имеет вид

$$\begin{gathered} v(t) = \rho, \quad t \in (0, \sigma), \quad 0 \leqslant \sigma < \theta \\ v(t) = -\rho, \quad t \in (\sigma, \theta) \end{gathered} \tag{6.8}$$

где σ — момент переключения. Подставим управление (6.8) в систему (6.2) и проинтегрируем ее при начальных условиях (6.2). Получим

$$\begin{gathered} x_1(t) = \xi + \eta t - (1 - \rho)\, t^2/2 \\ x_2(t) = \eta - (1 - \rho)\, t, \quad t \in [0, \sigma] \\ x_1(t) = \xi + \eta\sigma - (1 - \rho)\, \sigma^2/2 + \\ + [\eta - (1 - \rho)\, \sigma]\, (t - \sigma) - (1 + \rho)\, (t - \sigma)^2/2 \\ x_2(t) = \eta - (1 - \rho)\, \sigma - (1 + \rho)\, (t - \sigma), \quad t \in [\sigma, \theta] \end{gathered} \tag{6.9}$$

Положим в решении (6.9) $t = \theta$ и обозначим $x_2(\theta) = Y$. Из последнего равенства (6.9) получим

$$\theta - \sigma = (1 + \rho)^{-1}\, [\eta - (1 - \rho)\, \sigma - Y] \tag{6.10}$$

Подставим равенство (6.10) в соотношение (6.9) для $x_1(\theta)$ и воспользуемся граничным условием (6.2) при $t = \theta$. После упрощений получим

$$\begin{gathered} x_1(\theta) = \xi + \eta\sigma - (1 - \rho)\, \sigma^2/2 + \\ + (1 + \rho)^{-1} \{[\eta - (1 - \rho)\, \sigma]^2 - Y^2\}/2 = Y^2/2 \end{gathered}$$

Из полученного равенства определим

$$(2 + \rho)\, Y^2 = 2\, (1 + \rho)\, \xi + \eta^2 + 2\rho\, [2\eta\sigma - (1 - \rho)\, \sigma^2] \tag{6.11}$$

Теперь осталось выбрать момент переключения σ так, чтобы величина $| Y |$ была максимальной. В силу (6.11) имеем

$$\sigma = 0 \text{ при } \eta \leqslant 0, \quad \sigma = (1 - \rho)^{-1}\, \eta \text{ при } \eta > 0 \tag{6.12}$$

Подсчитаем оптимальные значения функционала $x_2(\theta) = Y$ в задаче 2. Подставляя σ из (6.12) в (6.11), получим

$$\begin{gathered} Y = -(2 + \rho)^{-1/2}\, 2[(1 + \rho)\, \xi + \eta^2]^{1/2}, \quad \eta \leqslant 0 \\ Y = -(1 + \rho)^{1/2}\, (2 + \rho)^{-1/2}\, [2\xi + (1 - \rho)^{-1}\, \eta^2]^{1/2}, \quad \eta > 0 \end{gathered} \tag{6.13}$$

Время движения найдем из (6.10), (6.12)

$$\begin{aligned} \theta &= (1+\rho)^{-1}(\eta - Y), \quad \eta \leqslant 0 \\ \theta &= (1-\rho)^{-1}\eta - (1+\rho)^{-1} Y, \quad \eta > 0 \end{aligned} \tag{6.14}$$

Соотношения (6.8), (6.9), (6.12)—(6.14) определяют решение задачи 2.

Итак, если движение начинается в области $\psi_0 < 0$, $\eta \leqslant 0$, то $\sigma = 0$, и на всей траектории $v = -\rho$. Если же начальная точка $\{\xi, \eta\}$ лежит в области $\psi_0 < 0$, $\eta > 0$, то согласно (6.12), (6.9) имеем $x_2(\sigma) = 0$, т. е. переключение происходит в момент пересечения оси x_1. Учитывая симметрию поля фазовых траекторий относительно начала координат, представим синтез оптимального управления в задаче 2 в форме

$$v(x, x^{\cdot}) = \rho \operatorname{sign}(x^{\cdot}) \tag{6.15}$$

На фиг. 1 тонкой штриховой кривой показана одна из оптимальных траекторий, начинающаяся в точке $\{\xi, \eta\}$ в области $\psi_0 < 0$, $\eta > 0$. Она состоит из двух дуг различных парабол, гладко сопрягающихся на оси x. Первая из этих дуг совпадает с дугой оптимальной траектории, построенной выше для оптимального синтеза при $\rho > 0$.

Пусть начальная точка лежит на КП $\psi_0 = 0$, причем $\eta > 0$. Тогда $\xi = -\eta^2/2$, и из (6.13) найдем

$$|Y/\eta| = \varkappa = [\rho(1+\rho)]^{1/2}[(2+\rho)(1-\rho)]^{-1/2} \tag{6.16}$$

Траекторию, начавшуюся в произвольной точке (6.2), можно продолжить и после пересечения с КП в момент θ. Для этого нужно принять точку $\{x(\theta), x^{\cdot}(\theta)\}$ за начальную и продолжить движение в силу системы (4.2), в которой управление u взято из (4.8), (6.1), а возмущение v — из (6.15). Полученная таким образом траектория бесконечное число раз пересекает обе ветви КП $\psi_0 = 0$. При этом значения ординат для двух соседних точек пересечения КП находятся в отношении $\varkappa$, даваемом формулой (6.16).

Как видно, движение существенно зависит от величины $\varkappa$. Из (6.16) следует, что $\varkappa = 1$ при $\rho = \rho_*$, равном отношению «золотого сечения»

$$\rho_* = (5^{1/2} - 1)/2 \approx 0.618 \tag{6.17}$$

Значениям $\rho < \rho_*$ отвечают $\varkappa < 1$, а при $\rho > \rho_*$ имеем $\varkappa > 1$.

Опишем характер возможных движений системы (4.2) при синтезе управления (4.8), (6.1), соответствующем $\rho = 0$, и при произвольных допустимых возмущениях $|v(t)| \leqslant \rho$.

Если $\rho < \rho_*$, $\varkappa < 1$, то траектория движения стремится к началу координат. Это следует из того, что ординаты $|x^{\cdot}|$ точек пересечения этой траектории с КП убывают не медленнее, чем в геометрической прогрессии со знаменателем $\varkappa < 1$ (см. (6.16)). При этом движение попадает в начало координат за конечное время T_0. Для оценки этого времени заметим, что в промежутках между переключениями управления u имеем, согласно (4.2),

$$|\Delta x^{\cdot}| \geqslant (1-\rho)\Delta t \tag{6.18}$$

Здесь Δt — промежуток времени между переключениями управления u, $\Delta x^{\cdot}$ — соответствующее приращение $x^{\cdot}$. Приращение $|\Delta x^{\cdot}|$ от начала движения до первого переключения не превосходит $|\eta| + |Y|$, от первого до второго, согласно (6.16),— величины $|Y|(1+\varkappa)$, и т. д. Продолжая эти оценки и пользуясь неравенством (6.18), получим

$$T_0(\xi,\eta) \leqslant (1-\rho)^{-1}[|\eta| + |Y| + |Y|(1+\varkappa) \times$$
$$\times (1+\varkappa+\varkappa^2+\ldots)] = (1-\rho)^{-1}[|\eta| + 2|Y|(1-\varkappa)^{-1}]$$

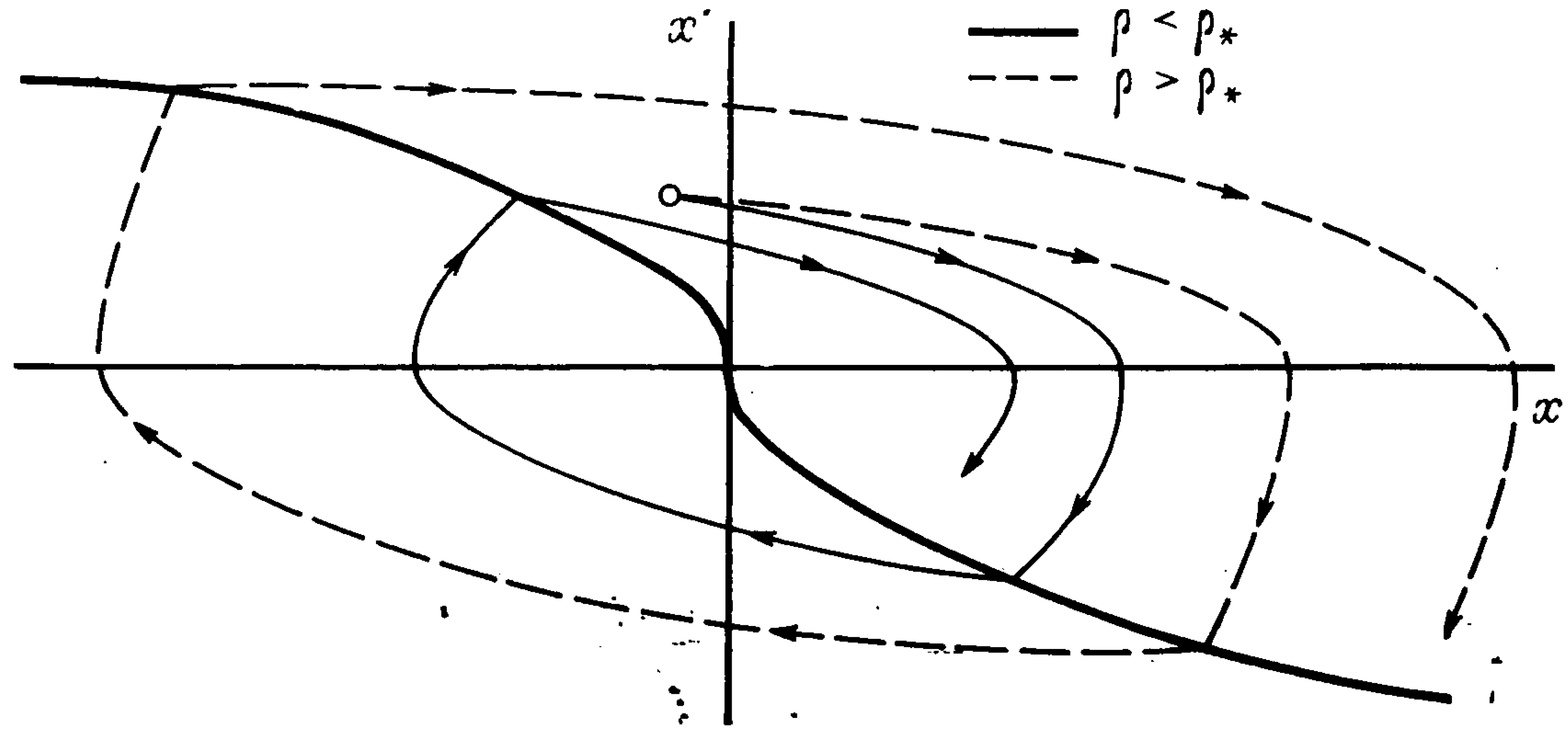
Величина $|Y|$ определена равенствами (6.13).

Если $\rho = \rho_*$, $\varkappa = 1$, то траектория при оптимальном (наихудшем) возмущении (6.15) будет периодической. Она проходит через одни и те же точки фазовой плоскости через равные промежутки времени T_*. Для определения T_* положим $Y = -\eta$, $\rho = \rho_*$ в (6.14). Получим

$$T_* = 2\theta = 4(1-\rho_*^2)^{-1}|\eta| = 4\rho_*^{-1}|\eta| \approx 6{,}464|\eta|$$

Если же возмущение v не является «наихудшим», то траектория попадет в начало координат.

Если $\rho > \rho_*$, $\varkappa > 1$, то траектория может уходить на бесконечность при соответствующих возмущениях, например при возмущении (6.15).



Фиг. 2

На фиг. 2 построены фазовые траектории системы (4.2) при управлении (4.8), (6.1) и при «наихудшем» возмущении (6.15). Жирные линии изображают КП $\psi_0 = 0$ (см. (6.1)), а тонкие линии — фазовые траектории, причем сплошные линии отвечают случаю $\rho < \rho_*$, штриховые — случаю $\rho > \rho_*$.

Итак, закон управления (4.8), (6.1), игнорирующий возмущения, приводит систему (4.2) в начало координат за конечное время при любых допустимых возмущениях $|v(t)| \leqslant \rho$ лишь в случае $\rho < \rho_*$. В то же время закон управления (4.8), (4.9), построенный с учетом действия возмущений, приводит ту же систему в начало координат за конечное время при любых возмущениях $|v(t)| \leqslant \rho$ для всех $\rho < 1$.

Итак, отношение $\rho = \rho_*$ из (6.17) является критическим. При построении управления системой (4.2) можно игнорировать наличие возмущения v, лишь если отношение ρ максимально возможных уровней возмущения v и управления u не превосходит отношения «золотого сечения»: $\rho < \rho_* \approx$ $\approx 0{,}618$.

Предложенный в работе способ управления достаточно прост и не требует точного знания нелинейных членов и возмущающих сил в уравнениях движения. Должны быть известны лишь максимальные значения этих возмущений. Этот метод мало чувствителен к небольшим вариациям параметров системы и дополнительным возмущениям: для их учета достаточно увеличить параметр ρ, создав некоторый запас по этому параметру.

Отметим в заключение, что предложенный способ управления может быть использован для управления движением манипуляционных роботов, так как их динамика описывается системой уравнений вида (1.3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пятницкий Е. С.* Синтез управления манипуляционными роботами на принципе декомпозиции. // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1987. № 3. С. 92—99.
2. *Пятницкий Е. С.* Принцип декомпозиции в управлении механическими системами. // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300. № 2. С. 300—303.
3. *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
4. *Понтрягин Л. С.*, *Болтянский В. Г.*, *Гамкрелидзе Р. В.*, *Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.
5. *Акуленко Л. Д.*, *Болотник Н. Н.* Синтез оптимального управления транспортными движениями манипуляционных роботов. // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 4. С. 21—29.
6. *Аветисян В. В.*, *Акуленко Л. Д.*, *Болотник Н. Н.* Оптимальное управление электроприводами промышленных роботов. М.; 1986. 72 с. АН СССР, Ин-т проблем механики. Препринт № 283.

Москва

Поступила в редакцию
22.II.1990