$K(T)$ (зависящего, в частности, от начального состояния системы x_0) нельзя гарантировать движение к глобальному экстремуму. Поэтому автором был использован следующий эвристический алгоритм: сначала выбирается произвольный единичный вектор g^0 и для него по методу Грама — Шмидта строится система из $n-1$ ортонормированного вектора. Далее к этим n ортогональным векторам добавляется столько же противоположно направленных, и все эти $2n$ векторов последовательно используются в качестве начальных (иллюстрация для плоского случая дана на фиг. 5). В цифровых экспериментах для $n = 2$ не было обнаружено случаев, когда полученный таким образом набор локальных максимумов не содержал бы глобального. Алгоритм сходится к локальному максимуму за 2—4 итерации, независимо от размерности системы (в экспериментах — до $n = 6$), что по крайней мере в 2 раза быстрее, чем для родственных методов [2] поиска минимума функционала.

В заключение отметим, что предлагаемый алгоритм может быть перенесен и на нелинейные системы, в том числе и на случай с невыпуклым множеством достижимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демьянов В. Ф.* К построению оптимальной программы в линейной системе // Автоматика и телемеханика. 1964. Т. 25. № 1. С. 3—11.
2. *Ткачев А. М.* Геометрический метод численного решения терминальной задачи оптимального управления // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1984. № 1. С. 73—78.

Челябинск

Поступила в редакцию 23.VIII.1989

УДК 539.3

А. Э. Пуро

О ПОСТРОЕНИИ ОБЩИХ РЕШЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ

Проводится разделение уравнений теории упругости в случае, когда модуль сдвига — функция одной декартовой координаты, а коэффициент Пуассона — функция трех координат. При трансверсальной изотропии такое разделение возможно, когда оба коэффициента сдвига зависят только от координаты нормальной плоскости изотропии. Предполагается, что массовые силы потенциальны.

Разделение уравнений теории упругости изотропного тела путем выделения деформации нормального вращения [1] в дальнейшем было обобщено на случай трансверсально-изотропного тела [2]. Для одномерной неоднородности, когда коэффициенты упругости зависят от одной декартовой координаты, такое разделение было выполнено для изотропного тела [3] и для трансверсально-изотропного тела [4] [1].

1. Трансверсально-изотропное тело отнесено к прямоугольной декартовой системе координат, ось z перпендикулярна плоскости изотропии тела.

Будем считать, что оба коэффициента сдвига $c_{44} = c^{-1}$, $(c_{11} - c_{12})/2 = G$ в обобщенном законе Гука

$$\sigma_{xx} = c_{11}\varepsilon_{xx} + c_{12}\varepsilon_{yy} + c_{13}\varepsilon_{zz}, \quad \sigma_{xy} = (c_{11} - c_{12})\varepsilon_{xy}$$
$$\sigma_{yy} = c_{12}\varepsilon_{xx} + c_{11}\varepsilon_{yy} + c_{13}\varepsilon_{zz}, \quad \sigma_{xz} = 2c_{44}\varepsilon_{xz}$$
$$\sigma_{zz} = \sigma = c_{13}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{xy}) + c_{33}\varepsilon_{zz}, \quad \sigma_{yz} = 2c_{44}\varepsilon_{yz}$$

— дифференцируемые функции только координаты z, а остальные коэффициенты упругости c_{ik} — функции трех координат. Предполагается также, что вектор массовых сил **M** и вектор перемещений **u** разлагаются на потенциальную и соленоидальную составля-

[1] См. также *Пуро А. Э.* Некоторые точные частные решения уравнений статики неоднородной среды: Дис. канд. физ.-мат. наук. Таллинн, 1975, 134 с.

ющие в плоскости изотропии и выражаются соответственно через потенциалы

$$\mathbf{M}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\frac{\partial\chi}{\partial z}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{u}=\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mathbf{j}+w\mathbf{k}$$

Подставляя $\mathbf{M}$ и $\mathbf{u}$ в уравнение равновесия $\operatorname{div}\sigma+\mathbf{M}=0$, получаем систему трех уравнений, которая разделяется на уравнение относительно потенциала нормального вращения N (решение второго рода)

$$\left[G\Delta_{+}+\frac{\partial}{\partial z}c_{44}\frac{\partial}{\partial z}\right]N=-\Omega \tag{1.1}$$

и систему двух связанных уравнений (решение первого рода) относительно w и F

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[c_{44}\left(w+\frac{\partial F}{\partial z}\right)\right]+c_{13}\frac{\partial w}{\partial z}+c_{11}\Delta_{+}F=-\varphi \tag{1.2}$$

$$\Delta_{+}\left[c_{44}\left(w+\frac{\partial F}{\partial z}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[c_{33}\frac{\partial w}{\partial z}+c_{13}\Delta_{+}F\right]=-\frac{\partial\chi}{\partial z} \tag{1.3}$$

$$(\Delta_{+}F=(\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2)F)$$

Метод разделения уравнений идентичен указанному ранее [2, 3] (см. также работу, упомянутую в сноске) и поэтому здесь приводиться не будет.

Аналогичное разделение уравнений возможно в динамическом случае, если плотность среды — функция только координаты z.

Приведем вывод других видов разрешающих уравнений решений первого рода. Для этого введем функцию $L(x, y, z)$, полагая

$$w=-(c\partial L/\partial z+\partial F/\partial z) \tag{1.4}$$

$$\sigma_{zz}=c_{33}\partial w/\partial z+c_{13}\Delta_{+}F=-\Delta_{+}L-\chi \tag{1.5}$$

Уравнение (1.3) удовлетворится тождественно. Подставляя соотношение (1.4) в (1.2), (1.5), исключим w из этих уравнений. Полученную систему относительно разрешающих функций запишем в виде

$$\partial^2F/\partial z^2+(c-b)\,\partial^2L/\partial z^2+c'\partial L/\partial z+a\Delta_{+}L=a\chi-b\varphi \tag{1.6}$$

$$\Delta_{+}F-d\partial^2L/\partial z^2+b\Delta_{+}L=b\chi-d\varphi \tag{1.7}$$

$$(\beta_{11}=d=c_{33}\rho,\ \beta_{13}=-b=c_{13}/\rho,\ \beta_{33}=c_{11}/\rho,\ \rho=c_{11}c_{33}-c_{13}{}^2)$$

Здесь ради краткости приведенные упругие постоянные β_{ik} [4] обозначены указанным выше образом.

Система (1.6), (1.7) — смешанная в том смысле, что неизвестными являются функция напряжений L и потенциал смещений F.

Рассмотрим более подробно случай однородных уравнений $\varphi=\chi=0$ (массовые силы отсутствуют). Компоненты напряжений решения первого рода при учете уравнений (1.6), (1.7) выражаются формулами

$$\sigma_{xx}=\partial^2L/\partial z^2-\partial^2\Phi/\partial y^2,\quad \sigma_{yy}=\partial^2L/\partial z^2-\partial^2\Phi/\partial x^2,\quad \sigma_{zz}=\Delta_{+}L$$

$$\sigma_{xy}=\partial^2\Phi/\partial x\partial y,\ \sigma_{xz}=-\partial^2L/\partial x\partial z,\ \sigma_{yz}=-\partial^2L/\partial y\partial z\quad (\Phi=[c_{11}-c_{12}]\,F) \tag{1.8}$$

Из соотношений (1.8) следует [5], что L и Φ — диагональные элементы тензора функций напряжений ψ, в то время как остальные его элементы равны нулю: $\psi=\operatorname{diag}\{L, L, -\Phi\}$. Таким образом, уравнения (1.6), (1.7) можно получить из уравнений совместности для тензора напряжений, выраженного по формулам (1.8). Уравнение относительно L получим, исключая F из (1.6), (1.7)

$$\Delta_{+}\left(a\Delta_{+}+\frac{c-2b}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)L+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(d\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{c-2b}{2}\Delta_{+}\right)L-c''\Delta_{+}L=0 \tag{1.9}$$

Рассмотрим связь функций L, F с ранее полученными общими решениями.

Если b и d зависят только от z, то подстановкой $L=\Delta_{+}L_0$ находим из (1.7)

$$F=d^2L_0/\partial z^2-b\Delta_{+}L_0$$

Подставляя F в (1.6), приходим к уравнению (1.9) относительно L_0 [4, 5], а w находим из (1.4)

$$w=\partial[b\Delta_{+}L_0-d\partial^2L_0/\partial z^2]/\partial z-c\partial\Delta_{+}L_0/\partial z$$

Если d и b не зависят от z, а $c(z)=c_1+c_2z$ — линейная функция z, то подстановкой $L=\partial^2L_{+}/\partial z^2$ находим F из (1.6)

$$F=(b-c)\,\partial^2L_{+}/\partial z^2+c'\partial L_{+}/\partial z-a\Delta_{+}L_{+}$$

Подставляя F в (1.7), снова приходим к уравнению (1.9) относительно L_+, причем

$$w = [a\Delta_+ - b\partial^2/\partial z^2]\partial L/\partial z$$

В двух последних случаях компоненты смещения выражаются посредством производных третьего порядка от разрешающей функции, если же c_{ik} не зависят от z, то порядок производных можно понизить до второго.

В этом случае систему (1.6), (1.7) можно разрешить относительно $\partial^2 L/\partial z^2$, $\Delta_+ L$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = \left[b^0 \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - a^0\Delta_+ F\right], \quad \Delta_+ L = \left[d^0 \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - (b^0 - c^0)\,\Delta_+ F\right] \qquad (1.10)$$

$$(a^0 = c_{11}/\tau, \quad b^0 = -c_{13}/\tau, \quad d^0 = -c_{33}/\tau, \quad c^0 = -\rho\,\tau, \quad \tau = 1 + c_{33}/c)$$

Определяя $F = \partial L_*/\partial z$ и подставляя F в первое соотношение (1.10), находим

$$\frac{\partial L}{\partial z} = \left[b^0 \frac{\partial^2 L_*}{\partial z^2} - a^0\Delta_+ L_*\right]$$

Разрешающее уравнение относительно L_* получим, дифференцируя второе соотношение (1.10) по z и подставляя в это выражение F и $\partial L/\partial z$. По виду оно совпадает с (1.9), только все коффициенты a, b, c, d заменяются на соответствующие коэффициенты с нулевым индексом и последнее слагаемое отсутствует (коэффициент c в этом случае считается постоянной). Компоненты вектора перемещений соответственно равны

$$u_{x,y} = \frac{\partial}{\partial x, \partial y}\left(\frac{\partial}{\partial z}\, L_*\right), \quad w = \frac{-1}{c_{44} + c_{33}}\left[c_{44}\,\frac{\partial^2 L_*}{\partial z^2} + c_{11}\Delta_+ L_*\right]$$

Такое представление для однородной среды в аксиально симметрическом случае впервые было получено С. Г. Лехницким и обобщено в [2].

Запишем систему уравнений в симметричном виде, используя замену $F = F_0 - cL/2$

$$2\Delta_1 F_0 = -\sqrt{D}\,\Delta_1 L + c''L, \quad 2\Delta_2 F_0 = \sqrt{D}\,\Delta_2 L + c''L \qquad (1.11)$$

Здесь

$$\Delta_i F_0 = (m_i^2\Delta_+ + \partial^2/\partial z^2)\, F_0, \quad i = 1, 2$$

$$m_{1,2}^2 = [(c - 2b) \pm \sqrt{D}]/(2d), \quad dm^4 - (c - 2b)\, m^2 + a = 0, \quad D = (c - 2b)^2 - 4ad$$

причем $m_{1,2}$ — корни характеристического уравнения, D — дискриминант этого уравнения.

При $c'' = 0$ и $D = \text{const}$ общее решение можно выразить через сумму двух функций L_1, L_2 удовлетворяющих соответственно уравнениям $\Delta_i L_i = 0$. Действительно, уравнениям (1.11) удовлетворяет выражение

$$L\,(x,\, y,\, z) = L_1/\sqrt{D} + L_2/\sqrt{D}; \quad F_0\,(x,\, y,\, z) = L_1/2 - L_2/2$$

Полученное представление общего решения с точностью до постоянных совпадает с известным [6], используемым в случае однородной среды. Таким образом, в зависимости от вида неоднородности разрешающие уравнения первого рода удобнее использовать в той или иной форме, но в любом случае фактически решается уравнение (1.9).

2. Приведем основные соотношения для случая вырождения корней характеристического уравнения $m_1^2 = m_2^2 = m_0^2$. Из условия $D = 0$ получаем связь между коэффициентами $c_{13} = \sqrt{c_{11}c_{33}} - 2c_{44}$, причем $m_0^2 = \sqrt{c_{11}/c_{33}} = \sqrt{a/d}$.

Так как в этом случае уравнения (1.12) совпадают, то в качестве второго разрешающего уравнения выберем (1.7):

$$2\Delta_0 F_0 = c''L, \quad \Delta_+ F_0 = d\Delta_0 L \qquad (2.1)$$

$$(\Delta_0 F = (m_0^2\Delta_+ + \partial^2/\partial z^2)F_0)$$

Если коэффициенты d, m_0 зависят только от z, то путем введения функций $L = \Delta_+ L_0$, $F_0 = d\Delta_0 L_0$ удовлетворяем второму уравнению (2.1), а первое уравнение (2.1) определяет разрешающую функцию L_0

$$2\Delta_0\,(d\Delta_0 L_0) - c''\Delta_+ L_0 = 0 \qquad (2.2)$$

Если $c'' \neq 0$, то L находится из первого уравнения (2.1)

$$L = 2\,(c'')^{-1}\Delta_0 F_0 \qquad (2.3)$$

а второе уравнение (2.1) переходит в разрешающее относительно F_0

$$2d\Delta_0[(c'')^{-1}\Delta_0 F_0] - \Delta_+ F_0 = 0 \qquad (2.4)$$

Уравнения изотропной среды получаются как частный случай из вышеприведенных формул при $c_{11} = c_{33} = \lambda + 2\mu$, остальные коэффициенты принимают значения $m_0^2 = 1$, $d = c(1 - \nu)$, $c^{-1} = c_{44} = \mu$.

3. Рассмотрим некоторые законы неоднородностей, при которых решения разрешающего уравнения (1.9) можно получить в явном виде.

При условии $c'' = 0$, а коэффициенты a, $(c - 2b)$, d пропорциональны $\exp(\alpha x + \beta y + \gamma z)$, (1.9) сводится к уравнению с постоянными коэффициентами, решение которого можно получить в явном виде.

Если $c_{11} = c_{11}(z)/n^2(x, y)$, $c_{33} = c_{33}(z)\, n^2(x, y)$, а остальные коэффициенты зависят только от z, то переменные в уравнении (1.9) частично разделяются введением $L(x, y, z) = L(z, s)\, \psi(x, y, s)$. Относительно $\psi(x, y, s)$ получаем двумерное уравнение Гельмгольца

$$\Delta_+\psi(x, y, s) + s^2 n^2(x, y)\,\psi(x, y, s) = 0 \tag{3.1}$$

а относительно $L(z, s)$ — обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\left\{\frac{d^2}{dz^2}\left[d\,\frac{d^2}{dz^2} - \frac{c-2b}{2}\,s^2\right] - s^2\left[\frac{c-2b}{2}\,\frac{d^2}{dz^2} - as^2 - \frac{c''}{2}\right]\right\} L = 0 \tag{3.2}$$

Для полного разделения переменных необходимо, чтобы разделились переменные в (3.1). Для исследования этого вопроса запишем уравнение (3.1) в криволинейной ортогональной системе координат α, β

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + s^2\left|\frac{d\zeta}{d\gamma}\right|^2 n^2(\alpha, \beta)\right]\psi(\alpha, \beta) = 0 \tag{3.3}$$

Здесь $\zeta = x + iy$ — аналитическая функция комплексной переменной $\gamma = \alpha + i\beta$. Условием разделения переменных является возможность представления [7]

$$|d\zeta/d\gamma|^2 n^2(\alpha, \beta) = n_0(\alpha) + n_1(\beta) \tag{3.4}$$

Решение (3.3) в этом случае представлено в виде $\psi(\alpha, \beta, s) = \psi_1(\alpha, s, k)\,\psi_2(\beta, s, k)$, где каждое из слагаемых удовлетворяет уравнению (k — константа)

$$\psi''_{1,2} + (s^2 n_{0,1} \pm k^2)\,\psi_{1,2} = 0 \tag{3.5}$$

Рассмотрим случай, когда (3.5) сводится к известным уравнениям. Заменой $\psi_1(\alpha) = y(t)/\sqrt{t'}$ уравнение (3.5) преобразуется к нормальной форме [8] ($t(\alpha)$ — новая переменная)

$$d^2y(t)/dt^2 + |t'|^{-2}\,[s^2 n_0(t) + k^2 - D(t', \alpha)/2]\,y(t) = 0 \tag{3.6}$$

$$D(t', \alpha) = -2\,(t')^{1/2} d^2 (t')^{-1/2}/dt^2$$

($D(t', \alpha)$ — производная Шварца). Выбирая известные уравнения в нормальной форме, из (3.6) определяем $t(\alpha)$ и $n_0(\alpha)$, при которых уравнения (3.5) сводятся к (3.6). В свою очередь по известным $n_0(\alpha)$, $n_1(\beta)$ и $\zeta(\gamma)$ из (3.4) находится $n^2(\alpha, \beta)$, при которых решения уравнения (3.3) выражаются через решения ранее выбранных уравнений.

Так, (3.6) сводится к уравнению $y'' + m^2 y = 0$ при $t = \alpha$, $n_0(\alpha) = n_0$, $s^2 n_0 + k^2 = m^2$, к уравнению Бесселя $y'' + [\lambda + (1/4 - \mu^2)/t^2]\,y = 0$ при $t = \alpha + c$, $n_0(\alpha) + n_1/\alpha^2$ и при $t = \exp(\alpha c + c_1)$, $n_0(\alpha) = n_0 + n_1 \exp(2\alpha c)$.

Можно указать случай, когда (3.6) сводится к уравнению Уиттекера, гипергеометрическому уравнению.

Применение этого метода к решению аналогичных задач электродинамики более подробно рассмотрено в [7].

Теперь остановимся на тех законах неоднородности, при которых можно получить явное решение уравнения (3.2).

Для неоднородностей вида $a(z) = az^n$, $b(z) = bz^{n+2}$, $c(z) = cz^{n+2}$, $d(z) = dz^{n+4}$ уравнение (3.2) переходит в уравнение Эйлера, причем $c_{11} \approx z^{-(n+4)}$, $c_{33} \approx z^{-n}$, $c_{13} \approx z^{-(n+2)}$. Решение выражается через степенные функции

$$L(z, s) = \sum_{j=1}^{4} L_j(s)\, z^{\lambda_j}$$

$$\lambda_j = -1/2\,(n+1) \pm \{[d(n^2 + 4n + 5) + 2s^2(c - 2b) \pm 2\sqrt{D_1}]/(4d)\}^{1/2}$$

$$D_1 = s^4 D + (n+2)\,d\,[2s^2(c - 2b(n+2)) + (n+2)d]$$

В частности, при $n = -2$ корни

$$\lambda_j = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + s^2 m_i^2} \tag{3.7}$$

Для неоднородности вида $a(z) = (az + a_0) e^{\alpha z}$, $b(z) = (bz + b_0) e^{\alpha z}$, $c(z) = (cz + c_0) e^{\alpha z}$, $d(z) = (dz + d_0) e^{\alpha z}$ (3.2) — уравнение Лапласа [8]. Его решение можно представить в виде определенного интеграла

$$L(z, s) = L(s) \int e^{zt} \varphi(t)\, dt$$

где пределы интегрирования определяются известным способом [8]. Относительно $\varphi(t)$ получаем уравнение первого порядка. Так, при $a_0 = b_0 = c_0 d_0 = 0$ решение

$$\varphi(t) = \Pi (t - t_i)^{a_i}, \quad t_i = -\alpha/2 \pm (s^2 (c - 2b) \pm (s^4 D - 4 s^2 \alpha b)^{1/2})^{1/2}$$

где a_i — коэффициенты, получаемые при интегрировании.

В частности, при $\alpha = 0$ все $a_i = -1/2$ и $\varphi(t) = [(t^2 - s^2 m_1)(t^2 - s^2 m_2)]^{-1/2}$. Другой частный случай этого уравнения, когда все коэффициенты c_{ik} — экспоненциальные функции z, уже рассматривался [4].

Заметим также, что уравнение (1.9), а значит, и его решение инвариантно относительно замены $c_1(z) = c(z) + 2(c_0 + c_1 z)$, $b_1(z) = b(z) + (c_0 + c_1 z)$. Это позволяет, исходя из известных решений, получить новые, используя указанную выше замену.

В случае вырождения корней характеристического уравнения $m_1^2 = m_2^2 = m_0^2$ к рассмотренным законам неоднородности добавляются новые, при которых решение можно получить в явном виде.

При $c' = 0$ решение можно находить последовательно, сначала F_0 из (2.1), потом L_0 из (2.2).

При $m_0 = \text{const}$ замена $x_1 = m_0 x_1$, $y = m_0 y_1$ приводит систему уравнений (2.1), (2.2) в уравнения изотропной среды с переменными z, x_1, y_1, причем параметры среды таковы: $\mu = c^{-1}$, $c(1 - \nu) = m_0^2 d$. Поэтому все ранее найденные решения для изотропной среды [5, 9] будут справедливы и в данном случае.

Покажем, что использованный ранее метод [9, 10] позволяет найти точные решения с переменным m_0. Воспользуемся системой (1.2), (1.3). Решение будем разыскивать в виде

$$F = F(z, s)\, s^{-1} \psi(x, y, z), \quad w = w(z, s)\, \psi(x, y, s)$$

где $\psi(x, y, s)$ удовлетворяет уравнению (3.1).

Относительно $F(z, s)$, $w(z, s)$ получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которую запишем в матричном виде (E — единичная матрица)

$$\left[E \frac{d^2}{dz^2} - G \frac{d}{dz} - H\right] \left\| \begin{matrix} F \\ w \end{matrix} \right\| = 0 \tag{3.8}$$

$$G = -\left\| \begin{matrix} \dfrac{c_{44}'}{c_{44}} & \dfrac{c_{13} + c_{44}}{c_{44}} s \\ -\dfrac{c_{13} + c_{44}}{c_{33}} s & \dfrac{c_{33}'}{c_{33}} \end{matrix} \right\|, \quad H = \left\| \begin{matrix} \dfrac{c_{11} s^2}{c_{44}} & -\dfrac{c_{44}'}{c_{44}} s \\ \dfrac{c_{13}'}{c_{33}} s & \dfrac{c_{44}}{c_{33}} s^2 \end{matrix} \right\|$$

Матричное уравнение (3.8) факторизуется

$$\left[E \frac{d}{dz} - A\right] \left[E \frac{d}{dz} - B\right] \left\| \begin{matrix} F \\ w \end{matrix} \right\| = 0, \quad A = G - B, \quad \left[E \frac{d}{dz} - A\right] \psi_a = 0 \tag{3.9}$$

если матрица B удовлетворяет уравнению Риккати $B' - GB + B^2 = H$. В этом случае фундаментальная система решений уравнения (3.8) ψ_b, $\psi_b \int \psi_b^{-1} \psi_a dz$ выражается через фундаментальные решения ψ_b, ψ_a соответствующих уравнений. Учитывая, что $G = G_0 + G_1 s$, $H = H_1 s + H_2 s^2$, решение будем разыскивать в виде $B = B_1 s + B_0$ (разложение по обратным степеням s обрывается). Получаем, как и в случае изотропной среды [9], систему $-G_1 B_1 + B_1^2 = H_2$, $B_0 B_1 - (G_1 - B_1) B_0 = H_1 + G_0 B_1$

$$B_0' - G_0 B_0 + B_0^2 = 0$$

Если выбрать решение B_1 первого уравнения так, что корни B_1 и $G_1 - B_1$ совпадают,

$$B_1 = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ m_0^2 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad G_1 - B_1 = \left\| \begin{matrix} 0 & -m_0^2 \dfrac{c_{33}}{c_{44}} \\ -\dfrac{c_{44}}{c_{33}} & 0 \end{matrix} \right\|, \quad m_0^2 = \sqrt{\frac{c_{11}}{c_{33}}}$$

то второе уравнение сводится к системе (b_{ik} — элементы матрицы B_0)

$$c_{44} b_{12} + c_{33} b_{21} = 0, \quad c_{44} b_{11} + m_0^2 c_{33} b_{22} = -2 c_{44}' \tag{3.10}$$

Третье уравнение имеет решение $B_0^{-1} = \{K + \int M^{-1} dz\} M$, выражающееся через матрицу произвольных постоянных K и диагональную матрицу $M = \operatorname{diag}\{c_{44}, c_{33}\}$

Из первого уравнения (3.10) следует, что K — антисимметрическая матрица. Второе уравнение определяет связь между c_{11}, c_{33}, c_{44}, при которой указанное решение имеет место ($\det K = A$, K_{ij} — элементы матрицы K)

$$m_0^2 = [k_{11}\alpha + 2c_{44}' (\Delta + k_{11}\alpha + k_{22}\beta + \alpha\beta)]/(k_{11} + \beta)$$
$$\alpha = \int c_{33}^{-1} dz, \quad \beta = \int c_{44}^{-1} dz$$

Таким образом, можно заключить, что 1) при $c_{44} = \mathrm{const}$ имеем решение $B_0 = 0$ (все коэффициенты, кроме c_{44}, произвольные функции), 2) случай, когда $b_{11} = -2c_{44}'/c_{44}$, остальные c_{ik} — произвольные функции, 3) случай, когда $b_{22} = c_{33}^{-1} [k_{22} + \alpha]^{-1}$, оостальные $b_{ik} = 0$, соответствует зависимости $c_{33} = x^2/x$; здесь $x = 2c_{44}'/m_0^2$.

Можно выделить и другие простые решения B_0. Полученная факторизация позволяет найти, как и в случае изотропной среды, явные решения уравнения (3.8).

Рассмотрим это на примере зависимости $b_{22} = -x'/x = c_{33}^{-1} [k_{22} + \alpha]^{-1}$ (третий случай) [10].

Решение $\psi_b (F, w)$ находится из уравнения $(Ed/dz - B) \psi_b = 0$, которое сводится к системе

$$F' = sw; \quad w' = m_0^2 sw - x'w/x$$

Исключая w, получаем $F'' + x'F'/x - m^2s^2F = 0$. Заменой $F = \varphi/\sqrt{x}$ приводим уравнение к нормальной форме

$$\varphi'' - [m_0^2 s^2 - D (1/x, z)/2] \varphi = 0 \tag{3.11}$$

Решение $\varphi = \eta (\zeta)(\zeta_z')^{-1/2}$ связано с решением $\eta (\zeta)$ уравнения $\eta'' + P (\zeta) = 0$ (здесь $\zeta (z)$, $P (\zeta) = P_1 (\zeta) + P_2 (\zeta)$) при

$$-s^2 m_0^2 (z)(z_\zeta')^2 = P_1 (\zeta) \tag{3.12}$$

$$\left[\frac{d^2}{d\zeta^2} + P_2 (\zeta)\right] \left[\frac{(c_{44})_z'}{m_0^2 (z) (z_\zeta')}\right]^{1/2} = 0 \tag{3.13}$$

Задаваясь функцией $P (\zeta)$, соответствующей известным уравнениям (Бесселя, Уиттекера), и представляя ее в виде суммы $P_1 (\zeta)$, $P_2 (\zeta)$, находим $m_0 (z)$ и c_{44}, для которых решения уравнения (3.11) выразятся через решения наперед выбранного уравнения [10].

Подставляя $P_1 (\zeta)$ в (3.12) и решая это уравнение, находим $\zeta (z)$ как функцию $m_0 (z)$ и $P_1 (\zeta)$, а из (3.13) определяем соответствующее значение $c_{44} (z)$.

Так, решение выражается через экспоненциальную функцию при $P_1 (\zeta) = -s^2$,

$$\zeta = \int m_0 (z)\, dz + c, \quad P_2 (\zeta) = -n^2, \quad c_{44} = (A_1 e^{n\zeta} + A_2 e^{-n\zeta})^2 + A_3$$

Для нахождения фундаментальной системы решений необходимо также найти $\psi_a (\varphi_1, \varphi_2)$ из системы уравнений (3.9). Можно показать, что система (3.9) сводится к уравнению (3.11) относительно $\varphi = \varphi_2 c_{33}/\sqrt{x}$, т. е. фактически ψ_a и ψ_b находится из одного уравнения (3.11).

В качестве примера рассмотрим задачу Буссинеска при c_{44}, c_{13} — const, $c_{11} (z) = c_{11}z^2$, $c_{33} (z) = c_{33}z^2$. Решение будем разыскивать в пространстве трансформант Ганкеля

$$L (r, z) = \int_0^\infty L (z, s) J_0 (r, s)\, ds; \quad F_0 (r, z) = \int_0^\infty F_0 (z, s) J_0 (r, s)\, ds.$$

Граничные условия $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$; $\sigma_{zz} = -P\delta (r) (2\pi r)^{-1}$ на поверхности полупространства при $z = z_0$ выражается посредством L (1.8) и в пространстве трансформант Ганкеля соответственно равны $L (z_0, s) = P/(2\pi s)$, $L' (z, s) = 0$. Здесь P — сосредоточенная сила, $\delta (r)$ — дельта-функция.

Уравнение (3.2) при рассматриваемой неоднородности переходит в уравнение Эйлера ($n = -2$). Решение этого уравнения при учете условий на бесконечности $L (z, s) = L_1 (s) z^{\lambda_1} + L_2 (s) z^{\lambda_2}$ определяется корнями (3.7).

Подставляя $L (z, s)$ в граничные условия, определим $L_1 (s)$, $L_2 (s)$ и соответственно

$$L (z, s) = \frac{P}{2\pi s (\lambda_2 - \lambda_1)} \left[\lambda_2 \left(\frac{z}{z_0}\right)^{\lambda_1} - \lambda_1 \left(\frac{z}{z_0}\right)^{\lambda_2}\right]$$

Так как для рассматриваемого закона неоднородности c, D — const, из уравнений (1.11) находим

$$F_0(z, s) = \frac{P\sqrt{D}}{4\pi s(\lambda_2 - \lambda_1)}\left[\lambda_2\left(\frac{z}{z_0}\right)^{\lambda_1} + \lambda_2\left(\frac{z}{z_0}\right)^{\lambda_2}\right]$$

Задача полностью определяется двумя функциями $L(z, s)$, $F_0(z, s)$. Так, из (1.4) находим

$$w(z, r) = -\left[\frac{1}{2c_{44}}\frac{\partial L}{\partial z} + \frac{\partial F_0}{\partial z}\right] = \int_0^\infty w(z, s) J_0(r, s)\, ds$$

$$w(z, s) = \frac{P}{4\pi}\frac{\lambda_1\lambda_2}{s(\lambda_1 - \lambda_2) z_0}\left[\left(\frac{z}{z_0}\right)^{\lambda_1 - 1}(\sqrt{D} + c) + \left(\frac{z}{z_0}\right)^{\lambda_2 - 1}(\sqrt{D} - c)\right]$$

При вычислении интеграла надо учитывать, что $w(z_0, s)$ стремится к постоянной при $s \to \infty$, т. е. при $r \to 0$

$$w(z_0, r) = P m_1 m_2 \sqrt{D}\,[2\pi(m_1 - m_2) r]^{-1} + \ldots$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гутман С. Г.* Общее решение задачи теории упругости в обобщенных цилиндри ческих координатах // Изв. ВНИИ гидротехники. 1948. № 37. С. 89—101.
2. *Hu Hai-Chang.* On the three-dimensional problems of the theory of elasticity of a transversely isotropic body Acta Sci. Sinica. 1953. V. 2. N 2. P. 145—151.
3. *Плевако В. П.* К теории упругости неоднородных сред // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 5. С. 853—860.
4. *Раппопорт Р. М.* О построении общих решений уравнений теории упругости трансверсально изотропных тел // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 5. С. 956—958.
5. *Ломакин В. А.* Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1976. 367 с.
6. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
7. *Светов Б. С., Губатенко В. П.* Аналитические решения электродинамических задач. М.: Наука, 1988. 343 с.
8. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
9. *Пуро А. Э.* Напряженное состояние неоднородного по глубине полупространства // Прикл. механика. 1988. Т. 24. Вып. 11. С. 3—9.
10. *Пуро А. Э.* О решении уравнений теории упругости неоднородной среды // Прикл. механика. 1975. Т. 11. Вып. 3. С. 50—55.

Таллинн

Поступила в редакцию
22.V.1989