

УДК 62—50

© 1990 г.

А. М. Ткачев

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МАКСИМИЗАЦИИ
НОРМЫ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ НА КОНЕЧНОМ
ИНТЕРВАЛЕ УПРАВЛЕНИЯ**

Рассматривается задача построения управлений, максимизирующих норму вектора состояния линейной системы на правом конце фиксированного интервала управления. Предлагается численный метод поиска максимумов, основанный на геометрическом подходе. Доказывается локальная сходимость алгоритма, обсуждается направление поиска глобального максимума. Приводятся результаты цифрового моделирования.

Рассматриваемая задача максимизации выпуклого функционала J на выпуклом множестве достижимости не может быть решена традиционными методами (например, методом минимальной невязки и его модификациями [1, 2]), поскольку для эквивалентной задачи минимизации функционал $-J$ не выпуклый. Это приводит, в частности, к разрушению теорем единственности оптимального управления. Действительно (фиг. 1), может существовать более одной точки из выпуклого множества достижимости $K(T)$, максимально удаленной от начала координат. В то же время существует единственная точка из $K(T)$, расстояние которой r^* от начала координат минимально.

1. Постановка задачи. Требуется найти управление $u(t)$, переводящее на фиксированном интервале $(0, T)$ линейную систему

$$x' = A(t)x + B(t)u, \quad x \in E^n, \quad u \in \Omega_u \subset E^m \quad (1.1)$$

(Ω_u — ограничивающее множество) из известного начального состояния $x(0) = x_0$ в точку $x(T)$ на правом конце траектории, максимально удаленную от начала координат O .

По крайней мере одна такая точка существует. Действительно, множество $K(T)$ ограничено (более того, компактно), т. е. целиком содержится внутри некоторого шара. Уменьшая его радиус, в конце концов получим сферу радиуса R^* , имеющую по крайней мере одну общую точку с границей ∂K множества достижимости (фиг. 1). Из этого ясно, что оптимальные, т. е. максимизирующие функционал $J = \|x(T)\|$, траектории заканчиваются в точках из ∂K , а значит, оптимальное управление нужно искать среди экстремальных. Из сказанного выше вытекает, что максимизирующее управление не единственно. В рамках этой работы будем считать задачу решенной, если найдено хотя бы одно из таких управлений.

2. Локальный максимум. Заметим предварительно, что точка x' касания K опорной гиперплоскости Γ с нормальным вектором g определяется решением задачи $x' = \operatorname{argmax}(x, g)$ (здесь и всюду далее максимум берется по всем $x \in K(T)$).

Действительно, рассмотрим скалярное произведение

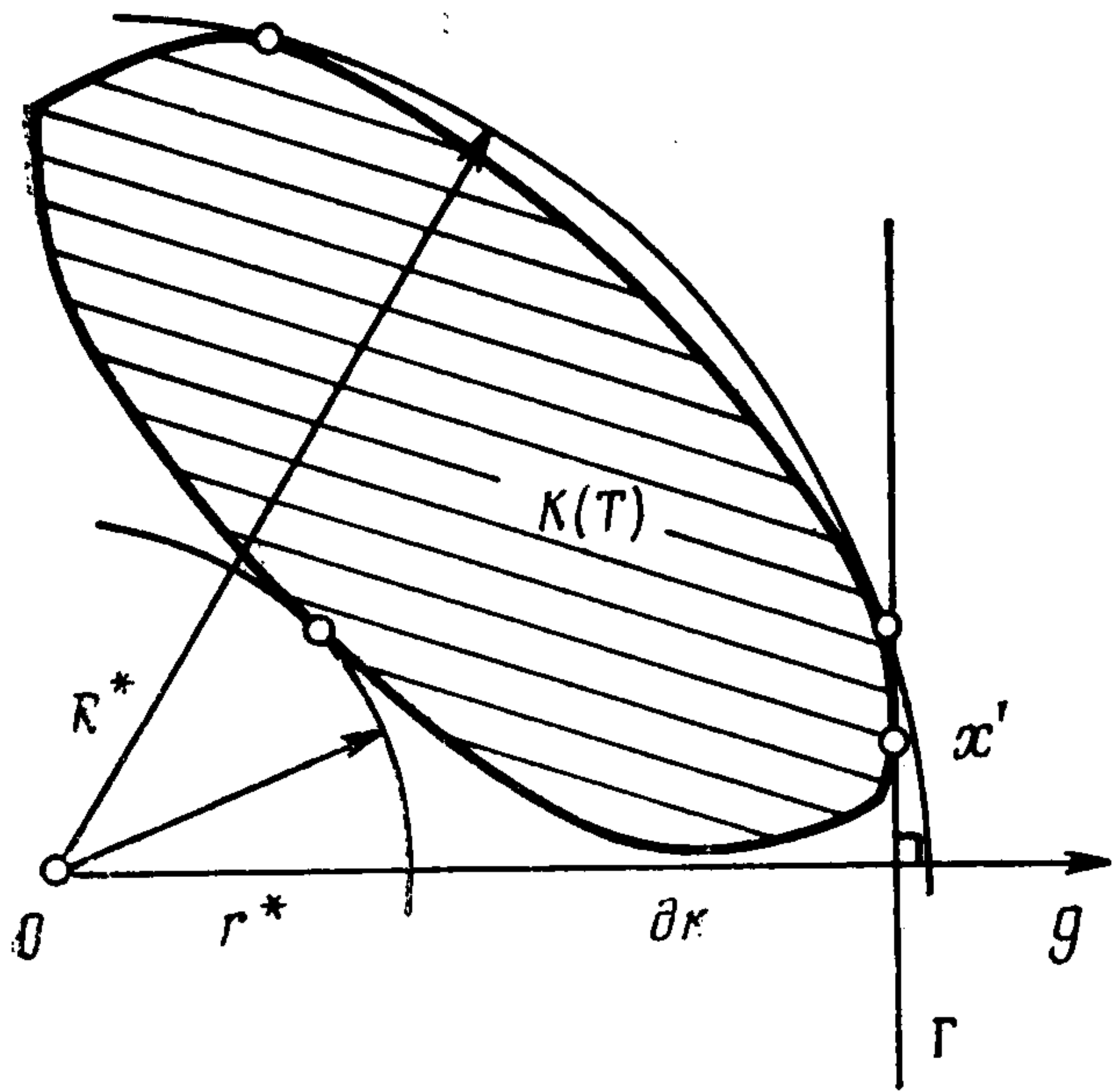
$$(x, g) = g^T \Phi(T) x_0 + \int_0^T g^T \Phi(T, t) B(t) u(t) dt \quad (2.1)$$

где $\Phi(T, t)$ — фундаментальное матричное решение однородной системы. Если Ω_u — гиперкуб, т. е. $|u_i(t)| \leq 1$ ($i = 1, 2, \dots, m$), то экстремальное управление, максимизирующее (2.1), имеет вид

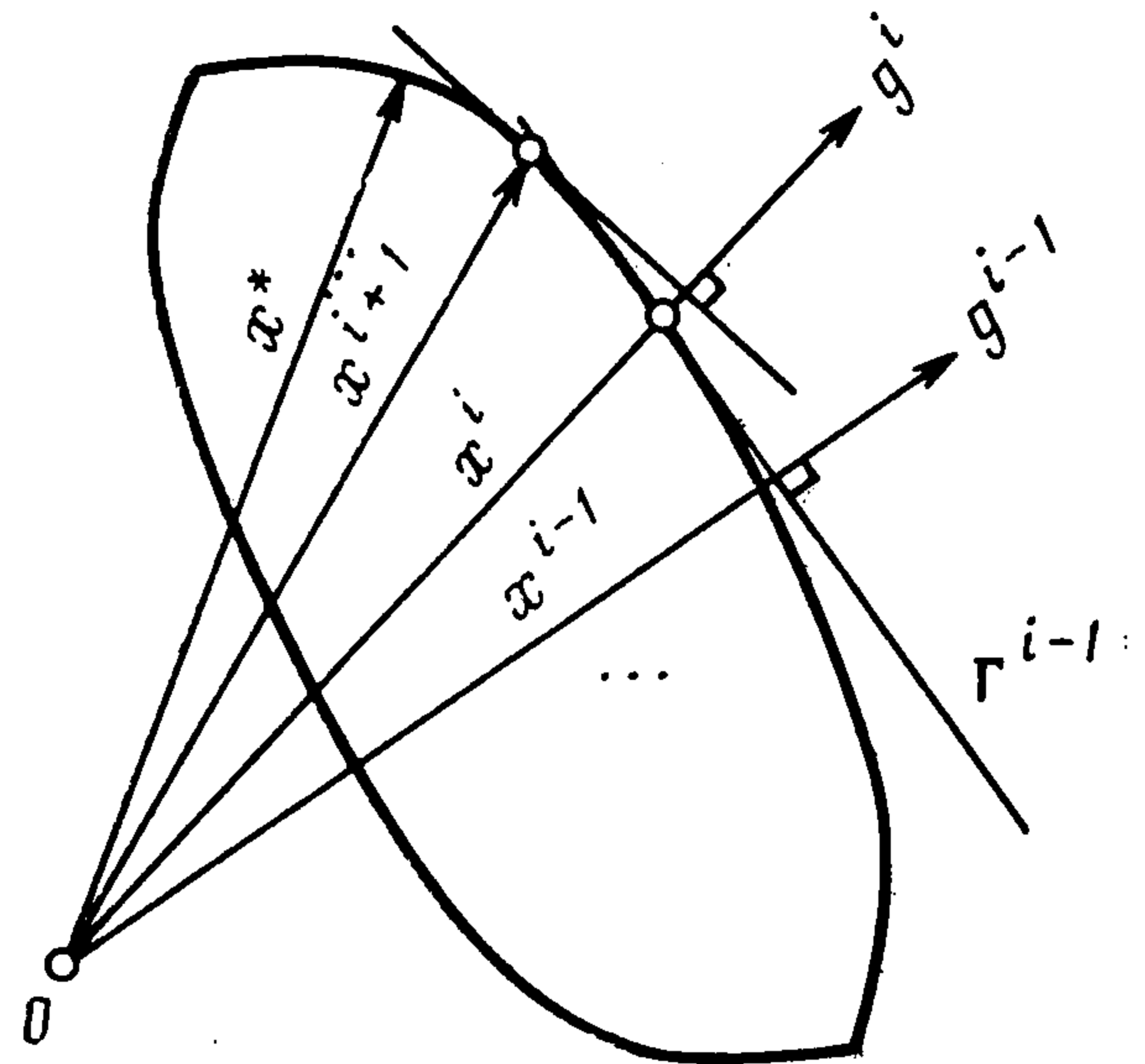
$$u(t) = \operatorname{sgn} [g^T \Phi(T, t) B(t)] \quad (2.2)$$

Ясно, что это управление порождает точку x' , так как именно вектор, проведенный в точку касания гиперплоскости и границы множества достижимости, имеет максимальную проекцию на ось единичного вектора g (фиг. 1).

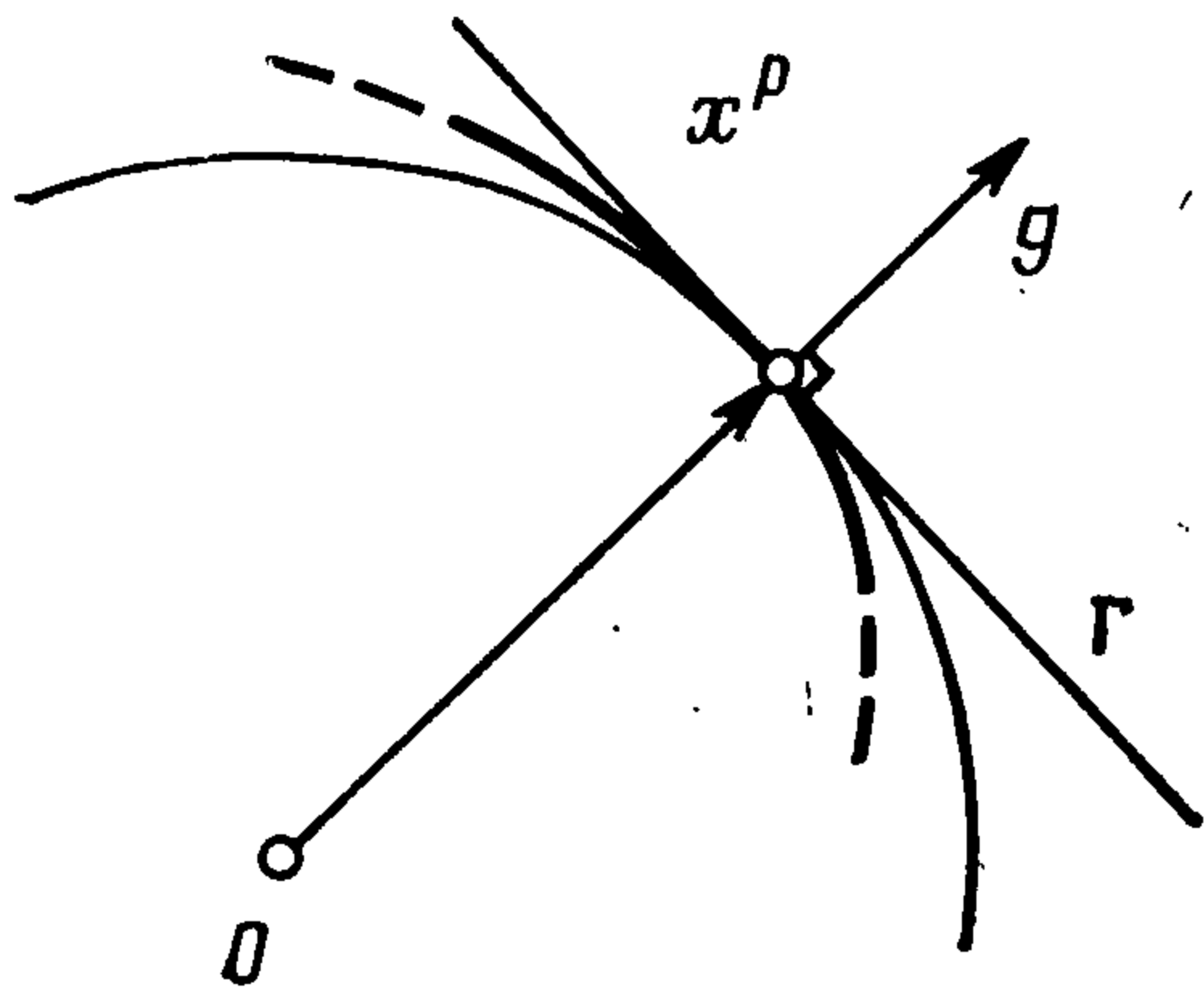
Предлагаемый алгоритм состоит в следующем: 1) произвольно выбирается вектор g^0 (верхний индекс означает номер итерации), 2) строится вектор $x^i = \operatorname{argmax}(x, g^{i-1})$, 3) строится вектор $g^i = x^i / \|x^i\|$ и повторяется шаг 2 алгоритма, 4) критерием оста-



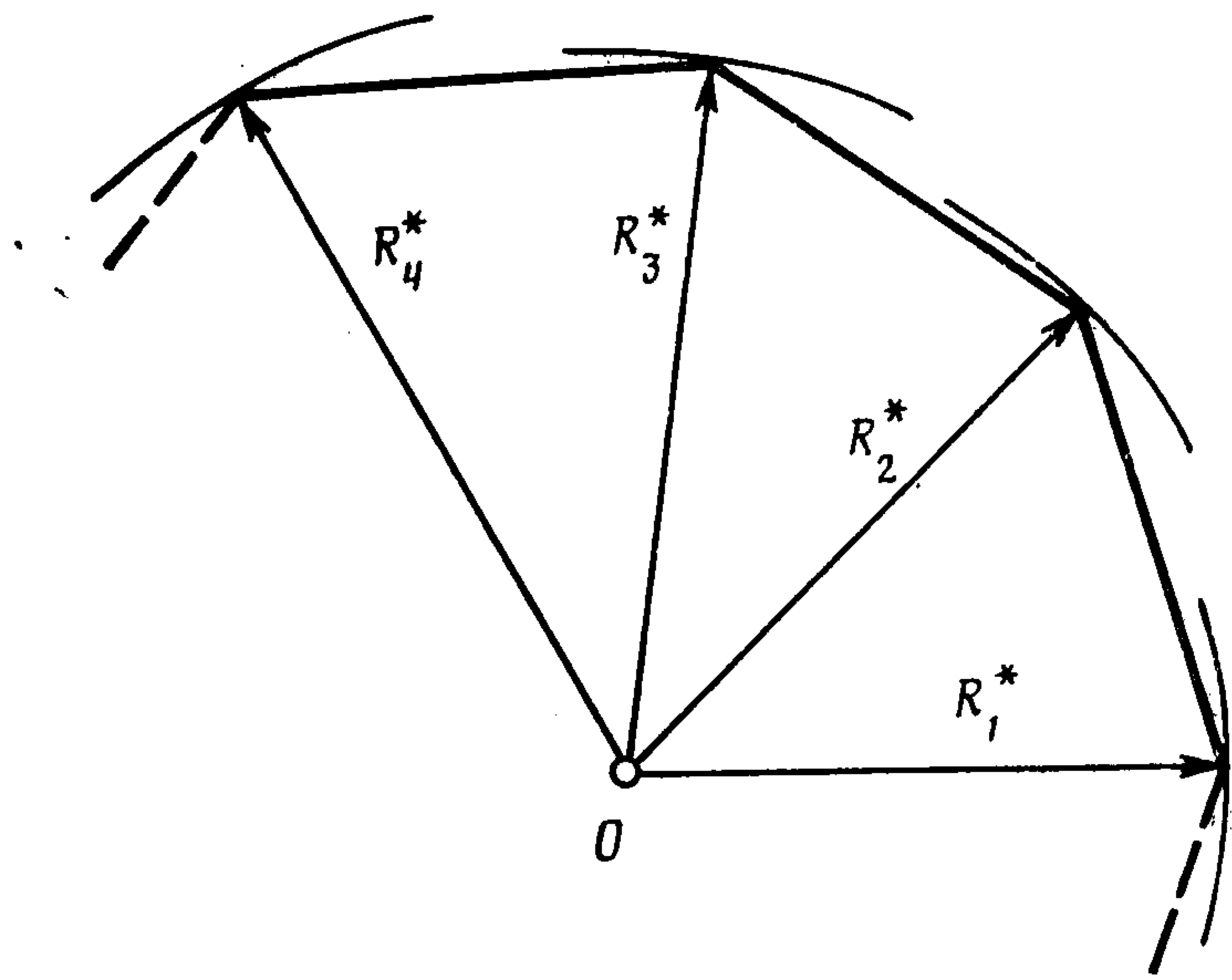
Фиг. 1



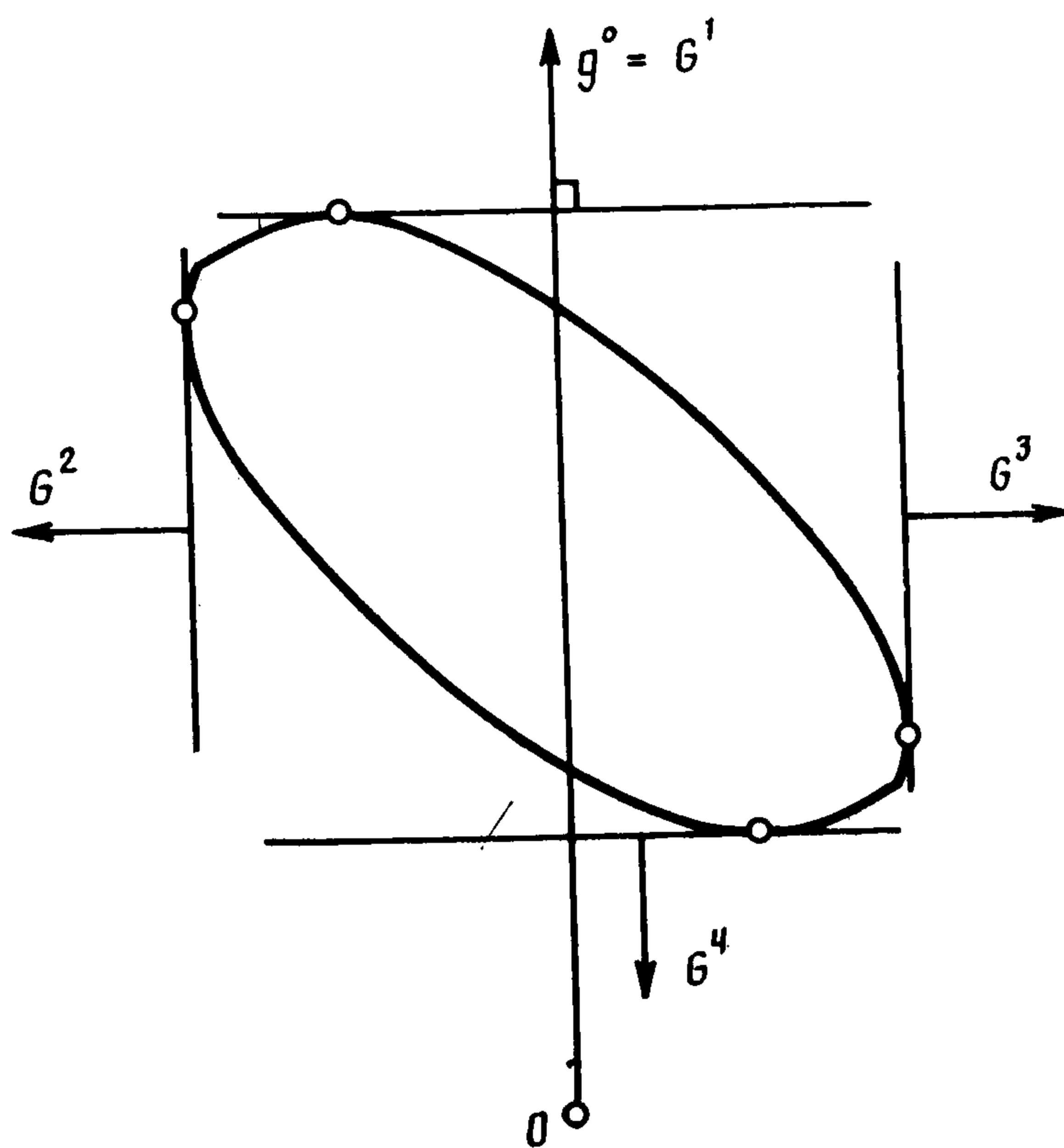
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

новки служит выполнение] неравенства $\|x^i\| - \|x^{i-1}\| \leq \varepsilon$, где ε — заданная погрешность. Шаг 2 выполняется вычислением $u(t)$ по формуле (2.2) и последующим интегрированием системы (1.1) с этим управлением.

Геометрическое содержание метода очевидно: для вектора x^{i-1} строится (фиг. 2) нормальная гиперплоскость Γ^{i-1} , точка ее касания к ∂K дает вектор x^i для следующей итерации. Ниже проводится строгое обоснование алгоритма.

Лемма 1. Описанный выше процесс порождает последовательность векторов $\{x^i\}$, сходящуюся по норме.

Покажем сначала, что

$$\|x^i\| \geq \|x^{i-1}\|. \quad (2.3)$$

Действительно,

$$x^i = \operatorname{argmax}(x, g^{i-1}) = \operatorname{argmax}(x, x^{i-1}/\|x^{i-1}\|) = \operatorname{argmax}(x, x^{i-1}) \quad (2.4)$$

Рассмотрим скалярное произведение (x^i, x^{i-1}) . Если взять $x^i = x^{i-1}$, то это произведение дает $\|x^{i-1}\|^2 = C_0$. Предположим теперь, что $\|x^i\| \leq \|x^{i-1}\|$. Тогда $(x^i, x^{i-1}) < C_0$ по определению скалярного произведения, а значит, x^i не может удовлетворять условию (2.4). Это противоречие и доказывает неравенство (2.3). Заметив теперь, что величина $\|x^i\|$ ограничена сверху ввиду ограниченности $K(T)$, получаем утверждение леммы.

Построенную описанным способом последовательность будем далее называть A -последовательностью.

Очевидно (фиг. 2), что алгоритм сходится к точке x^* , в которой касательная гиперплоскость нормальна вектору x^* . Дополнительные итерации из точки x^* дают ту же точку x^* . Естественно было бы предположить, что x^* и есть локальный максимум. Однако на самом деле это не всегда так. Можно построить пример (фиг. 3), когда точка x^p , к которой алгоритм сошелся «справа», в любой своей ε -окрестности содержит точки, для которых $\|x\| > \|x^p\|$ («левая» от точки x^p часть ∂K). В этом случае x^p неустойчивая предельная точка алгоритма (назовем ее точкой проскальзывания), поскольку любая точка «слева» от x^p и как угодно близкая к x^p , взятая в качестве очередного шага итерации, «уведет» алгоритм из x^p . Для того чтобы точка x^p была действительно локальным максимумом, очевидно, необходимо, чтобы и из любой точки слева алгоритм сходился к x^p .

Теорема 1. Точка x^* есть точка локального максимума тогда и только тогда, когда существует ε -окрестность $S_\varepsilon(x^*)$ точки x^* , такая, что из любой точки множества $Q_\varepsilon = \partial K \cap S_\varepsilon(x^*)$, взятой в качестве начальной, алгоритм сойдется к x^* .

Предположим сначала, что x^* — локальный максимум, т. е. существует ε -окрестность x^* , такая, что

$$\|x\| < \|x^*\|, \quad \forall x \in P_\varepsilon = K(T) \cap S_\varepsilon(x^*) \quad (2.5)$$

Выберем произвольную точку $x \in Q_\varepsilon$ и построим из нее A -последовательность, сходящуюся к некоторой точке x^{p1} . Если $x^{p1} \neq x^*$, то x^{p1} — точка проскальзывания и $\|x^{p1}\| < \|x^*\|$. Возьмем $\varepsilon_1 < \varepsilon$ так, чтобы $x^{p1} \notin Q_{\varepsilon_1}$, и снова построим A -последовательность. Продолжим этот процесс; тогда либо на i -м шаге получим $x^{pi} = x^*$, и прямое утверждение теоремы доказано для $\varepsilon = \varepsilon_i$, либо будет построена сходящаяся к x^* бесконечная последовательность

$$\|x\| \leq \|x^{p1}\| \leq \|x^{p2}\| \leq \dots \leq \|x^*\|.$$

Равенства здесь соответствуют ситуации, когда Q_ε представляет собой часть сферы $S_{\|x^*\|}(0)$, что невозможно ввиду строгости неравенства (2.5). Бесконечная же последовательность строгих неравенств здесь также невозможна, так как ввиду произвольной малости ε ее существование означало бы, что расстояние от точки 0 до точек проскальзывания как угодно близко, т. е. поверхность Q_ε как угодно близка к той же сфере.

Для доказательства утверждения в другую сторону возьмем любую точку $x \in Q_\varepsilon$ и построим для нее A -последовательность $\{x^i\}$. В силу неравенства (2.3) и того, что $\|x^i\| \rightarrow \|x^*\|$, сразу получим $\|x\| \leq \|x^*\|$, т. е. x^* — локальный максимум.

Заметим, что доказанная теорема не дает возможности установить, имеется ли в точке x^p экстремум или же это точка проскальзывания, поскольку невозможно проверить все точки любой ε -окрестности на «увод» из x^p . Однако из следующего раздела будет ясно, что отличать локальный максимум от точки проскальзывания нет необходимости.

3. Глобальный максимум. Уже упоминалось о том, что максимизирующее управление не единственно (фиг. 1). Более того, можно построить выпуклую кривую (ломаная на фиг. 4), содержащую как угодно много локальных экстремумов, к каждому из которых алгоритм сойдется при соответствующем выборе начального вектора g^0 . Ясно, что несостоятельной будет попытка построить алгоритм поиска всех максимумов (с последующим выбором глобального). Более приемлемой была бы организация движения от одного локального максимума к другому с большим значением функционала; однако и здесь ввиду произвольного взаимного расположения точки 0 и множества

$K(T)$ (зависящего, в частности, от начального состояния системы x_0) нельзя гарантировать движение к глобальному экстремуму. Поэтому автором был использован следующий эвристический алгоритм: сначала выбирается произвольный единичный вектор g^0 и для него по методу Грама — Шмидта строится система из $n - 1$ ортонормированного вектора. Далее к этим n ортогональным векторам добавляется столько же противоположно направленных, и все эти $2n$ векторов последовательно используются в качестве начальных (иллюстрация для плоского случая дана на фиг. 5). В цифровых экспериментах для $n = 2$ не было обнаружено случаев, когда полученный таким образом набор локальных максимумов не содержал бы глобального. Алгоритм сходится к локальному максимуму за 2—4 итерации, независимо от размерности системы (в экспериментах — до $n = 6$), что по крайней мере в 2 раза быстрее, чем для родственных методов [2] поиска минимума функционала.

В заключение отметим, что предлагаемый алгоритм может быть перенесен и на нелинейные системы, в том числе и на случай с невыпуклым множеством достижимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демьянов В. Ф. К построению оптимальной программы в линейной системе // Автоматика и телемеханика. 1964. Т. 25. № 1. С. 3—11.
2. Ткачев А. М. Геометрический метод численного решения терминальной задачи оптимального управления // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1984. № 1. С. 73—78.

Челябинск

Поступила в редакцию
23.VIII.1989

УДК 539.3

А. Э. Пуро

О ПОСТРОЕНИИ ОБЩИХ РЕШЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ

Проводится разделение уравнений теории упругости в случае, когда модуль сдвига — функция одной декартовой координаты, а коэффициент Пуассона — функция трех координат. При трансверсальной изотропии такое разделение возможно, когда оба коэффициента сдвига зависят только от координаты нормальной плоскости изотропии. Предполагается, что массовые силы потенциальны.

Разделение уравнений теории упругости изотропного тела путем выделения деформации нормального вращения [1] в дальнейшем было обобщено на случай трансверсально-изотропного тела [2]. Для одномерной неоднородности, когда коэффициенты упругости зависят от одной декартовой координаты, такое разделение было выполнено для изотропного тела [3] и для трансверсально-изотропного тела [4]¹.

1. Трансверсально-изотропное тело отнесено к прямоугольной декартовой системе координат, ось z перпендикулярна плоскости изотропии тела.

Будем считать, что оба коэффициента сдвига $c_{44} = c^{-1}$, $(c_{11} - c_{12})/2 = G$ в обобщенном законе Гука

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= c_{11}\varepsilon_{xx} + c_{12}\varepsilon_{yy} + c_{13}\varepsilon_{zz}, & \sigma_{xy} &= (c_{11} - c_{12})\varepsilon_{xy} \\ \sigma_{yy} &= c_{12}\varepsilon_{xx} + c_{11}\varepsilon_{yy} + c_{13}\varepsilon_{zz}, & \sigma_{xz} &= 2c_{44}\varepsilon_{xz} \\ \sigma_{zz} &= \sigma = c_{13}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + c_{33}\varepsilon_{zz}, & \sigma_{yz} &= 2c_{44}\varepsilon_{yz}\end{aligned}$$

— дифференцируемые функции только координаты z , а остальные коэффициенты упругости c_{ik} — функции трех координат. Предполагается также, что вектор массовых сил M и вектор перемещений u разлагаются на потенциальную и соленоидальную составля-

¹ См. также Пуро А. Э. Некоторые точные частные решения уравнений статики неоднородной среды: Дис. канд. физ.-мат. наук. Таллинн, 1975, 134 с.