Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 6, 1990

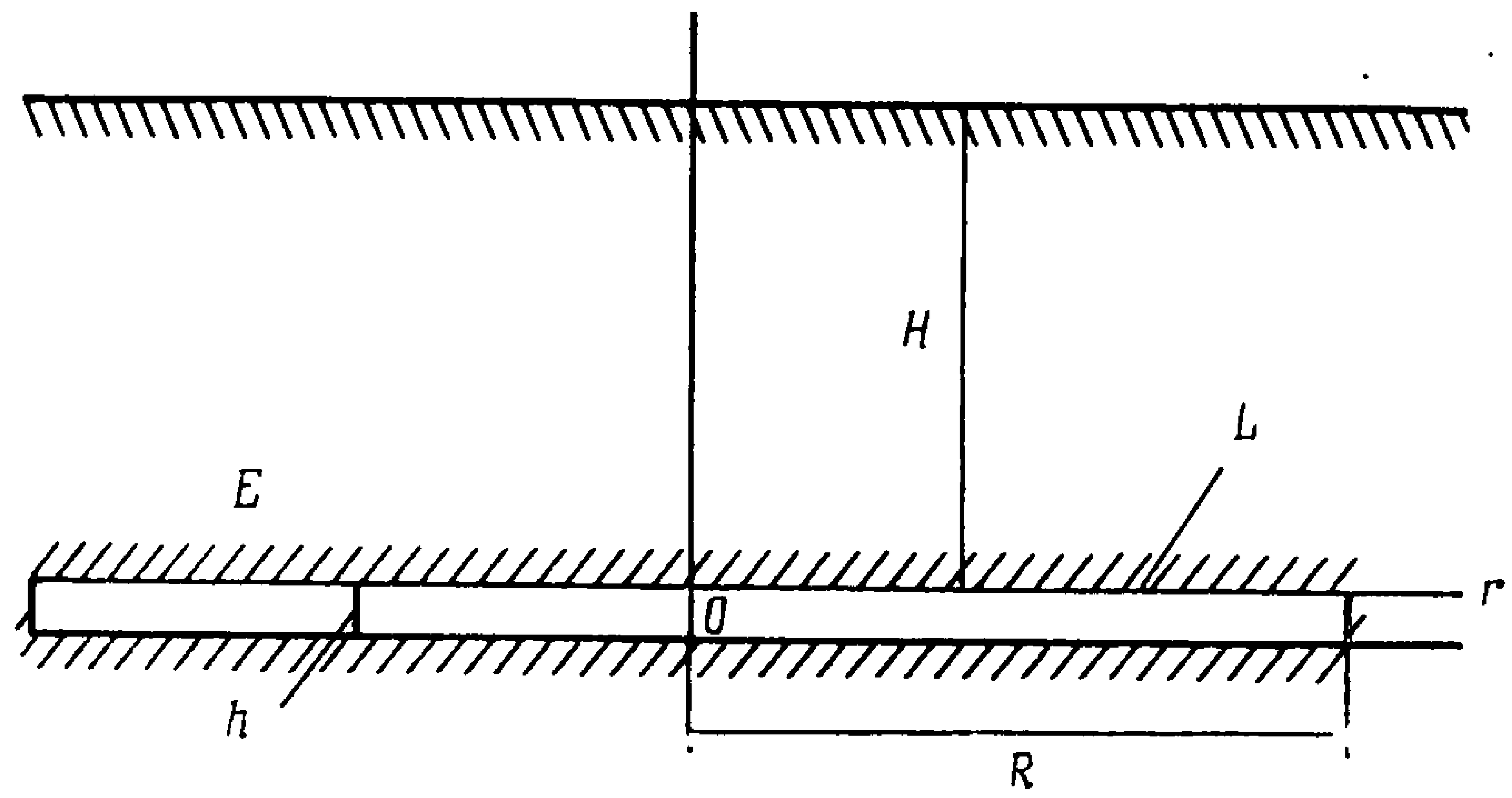
УДК 539.3 : 622.3

В. С. Анциферов, Ю. П. Желтов

О ДЕФОРМАЦИИ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ТОНКОЙ ЩЕЛЬЮ ПРИ СМЕШАННЫХ УСЛОВИЯХ НА ЕЕ ГРАНИЦЕ

Методом Кельвина [1] решается задача о напряженно-деформированном состоянии в упругом полупространстве с вырезом в виде круглой щели. Условия на щели удовлетворяются подходящим выбором скалярного и векторного потенциалов массовой силы как обобщенных функций, сосредоточенных на щели. Задача сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода на полубесконечном интервале. В конечном виде получено решение в предельном случае упругого пространства с вырезом, что позволяет дать оценку величины проседания поверхности Земли в результате разработки нефтяного или газового месторождений.

1. Постановка задачи. Рассматривается осесимметричная задача о распределении напряжений и деформаций в упругом полупространстве E, содержащем вырез L в виде бесконечно тонкой круглой щели радиуса R, расположенной параллельно границе полупространства на глубине H (фигура). Цилиндрическая система координат r, z, θ выбрана с началом



в центре щели, причем ось z направлена в сторону свободной поверхности перпендикулярно ей. Граница полупространства свободна от напряжений, а на бесконечности перемещения равны нулю.

Исходим из полной системы уравнений осесимметричной теории упругости, описывающих деформированное состояние тела [2]

$$(\lambda + \mu)\,\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\mathbf{u}) + \mu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{q} = 0$$
$$\sigma = \frac{\lambda}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_1) + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_2}{\partial z}, \quad \tau = \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_2}{\partial r}\right) \tag{1.1}$$

где λ, μ — постоянные Ламе, $\mathbf{u}$ — вектор перемещений, $u_1 = u_r$, $u_2 = u_z$, $\sigma = \sigma_z$ — нормальное, $\tau = \tau_{rz}$ — кассательное напряжения. Вектор массовой силы $\mathbf{q}$ представляет собой обобщенную функцию, сосредоточенную на L (и равную нулю в $E \setminus L$) [3]. Граничные условия на свободной поверхности и на бесконечности

$$\sigma = 0,\ \tau = 0,\ z = H;\ u_1 \to 0,\ u_2 \to 0,\ z \to -\infty \tag{1.2}$$

Множество всех решений системы (1.1), удовлетворяющих условиям (1.2), может быть выражено (при помощи интегралов типа преобразования Ганкеля) через две произвольные функции одного аргумента. Поэтому задача (1.1), (1.2) при любой паре независимых граничных условий на поверхности щели приводится к системе интегральных уравнений для этих функций.

Продемонстрируем этот метод, взяв в качестве модели задачу с заданным распределением на поверхности щели касательного напряжения τ и линейной комбинации нормального напряжения σ и скачка осевого перемещения

$$\tau = \tau_0(r), \ \sigma + \alpha [u_2] = \sigma_0(r), \ z = +0, \ r < R \tag{1.3}$$

где $\tau_0(r)$, $\sigma_0(r)$ — заданные непрерывные функции, $[u_2] = u_2(r; +0) - u_2(r; -0)$, α — постоянный коэффициент.

Ищем множество квазирегулярных [4] решений задачи (1.1), (1.2) методом Кельвина [1]. Пусть $\mathbf{q} = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \mathbf{f}$, $\mathbf{f} = f\mathbf{e}_\theta$ (φ, $\mathbf{f}$ — скалярный и векторный потенциалы вектора $\mathbf{q}$, $\mathbf{e}_\theta$ — угловой орт).

Положим

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad} \varphi_1 + \operatorname{rot} \mathbf{f}_1, \ \mathbf{f}_1 = f_1 \mathbf{e}_\theta \tag{1.4}$$

где $\varphi_1(r, z)$, $f_1(r, z)$ — новые неизвестные функции. Тогда [1]

$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2\varphi_1 + \varphi = 0, \ \mu\nabla^2\mathbf{f}_1 + \mathbf{f} = 0$$

Так как [5] $\nabla^2\mathbf{f}_1 = (\nabla^2 f_1 - r^{-2} f_1)\mathbf{e}_\theta$, то система уравнений для определения φ_1, f_1 (при заданных φ, f) принимает вид (вместо (1.1))

$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2\varphi_1 + \varphi = 0, \ \mu(\nabla^2 f_1 - r^{-2} f_1) + f = 0 \tag{1.5}$$

Применим преобразования Ганкеля по аргументу r. Обозначим Φ, Φ_1, U_2, S (функции от ξ, r) трансформанты Ганкеля нулевого порядка для φ, φ_1, u_2, σ [2]. Аналогично, пусть F, F_1, U_1, T—трансформанты Ганкеля первого порядка для f, f_1, u_1, τ. Применяя соответствующие преобразования Ганкеля к уравнениям (1.5), второму уравнению (1.1), (1.4), к условиям (1.2), получим

$$\Phi_1'' - \xi^2\Phi_1 = -\Phi/(\lambda + 2\mu), \ F_1'' - \xi^2 F_1 = -F/\mu \tag{1.6}$$

$$\begin{gathered} S = \lambda\xi U_1 + (\lambda + 2\mu)U_2', \ T = \mu(U_1' - \xi U_2) \\ U_1 = -(\xi\Phi_1 + F_1'), \ U_2 = \Phi_1' + \xi F_1 \end{gathered} \tag{1.7}$$

$$S = 0, \ T = 0, \ z = H; \ U_1 \mapsto 0, \ U_2 \mapsto 0, \ z \mapsto -\infty \tag{1.8}$$

(штрих означает дифференцирование по z в пространстве обобщенных функций).

2. Решение задачи. Положим

$$\begin{gathered} \Phi = P_1(\xi)\delta(z) + \xi P_2(\xi)e^{-\xi|z|} + \xi P_3(\xi)e^{\xi z} \\ F = \xi P_2(\xi)e^{-\xi|z|}\,|z|' - \xi P_3(\xi)e^{\xi z} \end{gathered} \tag{2.1}$$

($\delta(z)$ — обобщенная дельта-функция). Легко проверяется, что массовая сила $\mathbf{q} = 0$ в $E \setminus L$ при выполнении необходимых и достаточных условий

$$\int_0^\infty P_i \xi^2 J_1(r\xi)\, d\xi = 0, \quad r > R, \quad i = 1, 2 \tag{2.2}$$

В остальном функции $P_i(\xi)$ ($i = 1, 2, 3$) пока произвольны. Внося (2.1) в уравнения (1.6), находя общие решения этих уравнений в пространстве обобщенных функций, определяя затем по (1.7) U_1, U_2, S, T и удовлетворяя условям (1.8), можно выразить P_3 через P_1, P_2. Переходя к безразмерным величинам по формулам

$$t = R\xi, \quad \rho = \frac{r}{R}, \quad b = \frac{H}{R}, \quad P_1 + P_2 = \frac{\lambda+2\mu}{\mu}\frac{p_0R^2}{\xi}g_1(t)$$
$$\frac{\mu}{\lambda+2\mu}P_1 + P_2 = \frac{p_0R^2}{\xi}g_2(t), \quad \sigma_0^*(\rho) = \frac{\sigma_0}{p_0}, \quad \tau_0^*(\rho) = \frac{\tau_0}{p_0} \tag{2.3}$$

(p_0 — характерная постоянная, имеющая размерность напряжения), можно при помощи формул обратного преобразования Ганкеля выразить компоненты тензора напряжений и вектора смещений через две произвольные функции $g_1(t)$, $g_2(t)$. В частности

$$u_z(\rho;\, b) = -p_0Q\int e^{-bt}\left((1+2bt)g_1 - btg_2\right)J_0(\rho t)dt$$
$$Q = R(\lambda+2\mu)\mu^{-1}(\lambda+\mu)^{-1} \tag{2.4}$$

(Здесь и далее интегрирование по t ведется от 0 до $+\infty$). Удовлетворяя условиям (1.3), получим, учитывая (2.3),

$$\int tg_1J_0(\rho t)\,dt = \int te^{-2bt}\left(A^+(t)\,g_1 - B(t)\,g_2\right)J_0(\rho t)\,dt +$$
$$+\,\alpha Q\int\left(g_1 - \frac{\mu}{\lambda+2\mu}g_2\right)J_0(\rho t)\,dt + \sigma_0^*(\rho), \quad \rho<1; \quad \int g_1J_0(\rho t)\,dt = 0, \quad \rho>1 \tag{2.5}$$

$$\int tg_2J_1(\rho t)dt = \int te^{-2bt}\left(A^-(t)g_2 - B(t)g_1\right)J_1(\rho t)dt +$$
$$+\,\tau_0^*(\rho),\ \rho<1; \quad \int tg_2J_1(\rho t)dt = 0,\ \rho>1 \tag{2.6}$$
$$A^\pm(t) = 1 \pm 2bt + 2b^2t^2,\ B(t) = 2b^2t^2$$

Возникла система интегральных уравнений для функций $g_1(t)$, $g_2(t)$

3. Частный случай бесконечного пространства с заданными касательным и нормальным напряжениями на поверхности щели. При $H \to +\infty$ ($b \to +\infty$), $\alpha = 0$ система (2.5), (2.6) упрощается

$$\int tg_1J_0(\rho t)dt = \sigma_0^*(\rho),\ \rho<1; \quad \int g_1J_0(\rho t)\,dt = 0,\ \rho>1 \tag{3.1}$$
$$\int tg_2J_1(\rho t)dt = \tau_0^*(\rho),\ \rho<1; \quad \int tg_2J_1(\rho t)\,dt = 0,\ \rho>1 \tag{3.2}$$

Система дуальных уравнений (3.1) решена в [2]

$$g_1(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 x\sin tx\,dx\int_0^1\frac{\rho\sigma_0^*(\rho x)}{\sqrt{1-\rho^2}}\,d\rho \tag{3.3}$$

Система (3.2) решается по формулам обращения Ганкеля

$$g_2(t) = \int_0^1\tau_0^*(\rho)\,\rho J_1(t\rho)\,d\rho \tag{3.4}$$

Если $\sigma_0(r) \equiv p_0$, $\tau_0(r) \equiv \tau_0$ (p_0, τ_0 — заданные постоянные), то по (3.3), (3.4)

$$g_1(t) = -\frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{t}\right), \quad g_2(t) = \frac{\tau_0}{p_0}\int_0^1 xJ_1(tx)\,dx \tag{3.5}$$

Находя при $H \to +\infty$ формулу

$$u_z(\rho;\,+0) = -\frac{1}{2}p_0Q\int\left(g_1 - \mu(\lambda+2\mu)^{-1}g_2\right)J_0(\rho t)\,dt$$

подставляя выражение (3.5) и упрощая, находим

$$u_z(\rho;\,+0) = \pi^{-1}p_0Q\sqrt{1-\rho^2} + \frac{1}{2}\tau_0R(\lambda+\mu)^{-1}(1-\rho), \quad \rho<1$$

При $\tau_0 = 0$ эта формула сводится к известной [2].

4. Общий случай. Сведение к системе интегральных уравнений Фредгольма. Система двух уравнений (2.5) может быть сведена к одному уравнению методом, которым была решена система (3.1). Подразумевая под $\sigma_0{}^*$ в формуле (3.3) всю правую часть первого из уравнений (2.5), меняя порядок интегрирования и упрощая, можно получить

$$g_1(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 x \sin tx\, dx \int_0^1 \frac{\rho\sigma_0{}^*(\rho x)}{\sqrt{1-\rho^2}}\, d\rho +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{x \sin t \cos x - t \sin x \cos t}{t(t^2 - x^2)} \left[te^{-2bx}(A^+(x)\, g_1(x) - B(x)\, g_2(x)) -\right.$$

$$\left. - \alpha Q(g_1(x) - \mu(\lambda + 2\mu)^{-1} g_2(x))\right] dx \qquad (4.1)$$

Аналогично из второго уравнения (2.5)

$$g_2(t) = \int_0^1 \tau_0{}^*(\rho)\, \rho J_1(t\rho)\, d\rho + \int_0^\infty \frac{tJ_1(t)\, J_0(x) - xJ_0(t)\, J_1(x)}{t^2 - x^2}\, e^{-2bx}(A^-(x)\, g_2(x) -$$

$$- B(x)\, g_1(x))\, dx \qquad (4.2)$$

Таким образом, решение задачи свелось к проблеме интегрирования системы двух интегральных уравнений Фредгольма второго рода с непрерывными ядрами, где искомые функции $g_1(t)$, $g_2(t) \in C\, [0; +\infty[$.

5. Приложение к задаче о проседании дневной поверхности в процессе разработки нефтяного или газового месторождений. При разработке нефтяных и газовых месторождений с изменяющимся во времени пластовым давлением деформация горных пород достигает дневной поверхности, вызывая ее опускание. Поэтому весьма важным является создание методов количественной прогнозирующей оценки этой деформации.

Пусть в результате разработки некоторого месторождения пластовое давление изменилось на величину Δp, после чего возникло равновесное состояние в пласте и горных породах. В силу сравнительно малых деформаций можно предположить, что окружающие пласт породы деформируются линейно упруго. Пласт имеет форму тонкого круглого цилиндра радиуса R и толщиной h, причем $h \ll R$, так что пласт заменяется щелью радиуса R (фигура). На дневной поверхности ($z = H$) напряжения σ и τ равны нулю.

В породе вблизи пласта положим в первом приближении $\tau = 0$, а нормальное напряжение σ выразим через перемещения, принимая следующую схему деформации пород пласта. Пласт предполагается сложенным из гранулярных или трещиноватых пород с широко развитой трещиноватостью. На элементы пласта действует вертикальная составляющая горного давления σ_1, в скелете породы напряжение равно σ_2, в поровом пространстве находится жидкость или газ с давлением p, причем

$$\sigma_1 = \sigma_2 + p, \quad \Delta\sigma_2 = \Delta\sigma_1 - \Delta p \qquad (5.1)$$

Объем цилиндрического кольца высотой h с внутренним радиусом r и внешним $r + dr$ равен $V = 2\pi rhdr$, его изменение (если пренебречь радиальными смещениями) $\Delta V = 2\pi rdr\, [u_2]$. Следовательно, $\Delta V/V = [u_2]/h$. С другой стороны, $\Delta V/V = m_0\beta_2\Delta\sigma_2 + (1 - m_0)\beta\Delta p$, где m_0 — начальная пористость пласта, β_2, β — коэффициенты сжимаемости пор и скелета. Исключая из этих соотношений $\Delta V/V$ и $\Delta\sigma_1$, с помощью (5.1), получим, полагая $\sigma = \Delta\sigma_1$ при $z = 0$

$$\sigma - \frac{[u_2]}{hm_0\beta_2} = p_0, \quad z = 0, \quad r < R; \quad p_0 = \left(1 - \frac{(1-m_0)\beta}{m_0\beta_2}\right)\Delta p$$

Таким образом, возникли условия (1.3) с $\sigma_0(r) \equiv p_0$, $\tau_0(r) \equiv 0$, $\alpha = -(hm_0\beta_2)^{-1}$.

Величины m_0, β, β_2, Δp считаем постоянными. Задача сводится к решению систем (2.5), (2.6) с $\tau_0^* \equiv 0$, $\sigma_0^* \equiv 1$.

Для верхней оценки максимального (т. е. при $r = 0$) прогиба дневной поверхности отметим, что он тем больше, чем меньше H (т. е. чем меньше b). Можно показать, анализируя уравнения (2.5), (2.6) (с $\tau_0^* \equiv 0$, $\sigma_0^* \equiv 1$), что

$$g_2 \to 0, \ \int g_1 J_0(\rho t)dt \to -hm_0\beta_2 Q^{-1}, \ \rho < 1, \ b \to 0$$

Подставляя в (2.4), получим при $b \to 0$

$$u_z(r; H) = p_0 hm_0\beta(\lambda + 2\mu)(\lambda + \mu)^{-1}, \ r < R$$

Итак, при любом H (т. е. при любом b)

$$|u_z(r; H)| < 2(1 - \nu)|p_0|hm_0\beta_2, \ \nu = {}^1/_2\lambda(\lambda + \mu)^{-1} \tag{5.2}$$

При числовых данных [6] $\Delta p = -40$ МПа, $h = 600$ м, $R = 10^4$ м, $\beta_2 = 2\cdot10^{-3}$ (МПа)$^{-1}$, $\beta = 1{,}5\cdot10^{-5}$ (МПа)$^{-1}$, $m_0 = 0{,}05, \nu = 0{,}34$ получим $p_0 = -34{,}3$ МПа, откуда по (5.2) $|u_z(r; H)| < 2{,}74$ м, что совпадает с приближенной оценкой, полученной в [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Снеддон И. Н., Берри Д. С.* Классическая теория упругости. М.: Физматгиз, 1961. 219 с.
2. *Снеддон И. Н.* Преобразования Фурье. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 668 с.
3. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
4. *Копец А. С.* Построение разрывных решений плоской теории упругости методом обобщенных функций. // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 1013—1021.
5. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1977. 831 с.
6. Справочник по физическим свойствам минералов и горных пород при высоких термодинамических параметрах / Под ред. М. П. Воларовича. М.: Недра, 1978. 237 с.
7. *Желтов Ю. П., Анциферов В. С.* Прогнозирование деформации массива горных пород при разработке месторождений // Нефтяное хозяйство. 1990. Т. I. С. 37—39, 41.

Москва

Поступила в редакцию
18.XII.1989