Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 6, 1990

УДК 539.375
© 1990 г.

А. Н. Бородачев

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ КРУГОВОЙ ТРЕЩИНЫ

В общей постановке рассматривается статическая задача для линейно-упругого тела, содержащего внутреннюю круговую трещину нормального отрыва. Показано, что соответствующая весовая функция, позволяющая непосредственно вычислять величину коэффициента интенсивности напряжений при произвольных условиях нагружения, равна произведению осесимметричной весовой функции и ядра Пуассона. В качестве примера на основе известного осесимметричного решения [1] построена весовая функция для круговой трещины в неограниченном неоднородном теле с периодическим законом изменения величины коэффициента Пуассона. Выполнен асимптотический анализ полученного решения для материала с быстроосциллирующими упругими характеристиками.

Некоторые задачи неоднородной теории упругости для тел с переменным коэффициентом Пуассона исследованы в [1—4].

1. Исходные соотношения и основные обозначения. Пусть линейно-упругое тело занимает область Ω трехмерного евклидова пространства $\mathbf{R}^3$, ограниченную поверхностью $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$, причем $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$ не имеют общих внутренних точек. Объемные силы отсутствуют; на $\partial\Omega_1$ задаются однородные кинематические, а на $\partial\Omega_2$ — однородные статические граничные условия. Тело содержит внутреннюю круговую трещину с радиусом a, поверхности которой в цилиндрической системе координат описываются соотношениями $S^{\pm} = \{r, \theta, z\colon 0 \leqslant r \leqslant a,\ -\pi \leqslant \theta < \pi,\ z = 0^{\pm}\}$.

Ограничимся (наиболее важным с прикладной точки зрения) случаем нормального отрыва, когда в точках плоскости $z = 0$, принадлежащих Ω, отсутствуют касательные напряжения, а поверхности трещины находятся под действием самоуравновешенной системы нормальных нагрузок $\sigma_z(r, \theta, 0^{\pm}) = -p(r, \theta)$, $r \leqslant a$.

Другие возможные формулировки задачи для тела с трещиной нормального отрыва приводятся к рассматриваемой при помощи принципа суперпозиции (Бюкнера) [5].

Условимся, что задача принадлежит классу **A**, если геометрия области Ω, разбиение границы $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$ и упругие свойства материала (т. е. характер возможных неоднородности и анизотропии) таковы, что при осесимметричном нагружении поверхностей трещины ее решение не зависит от угловой координаты.

Пусть к поверхностям трещины в точках с координатами $(r, \theta, 0^{\pm})$ прикладываются две единичные нормальные противоположно направленные (расклинивающие) сосредоточенные силы. Соответствующую такому нагружению величину коэффициента интенсивности напряжений (КИН) нормального отрыва, называемую весовой функцией [5], обозначим $k(r, \theta; \varphi)$, где φ — значение угловой координаты для точки наблюдения на контуре трещины. Для задач из класса **A**, очевидно, $k(r, \theta; \varphi) \equiv$

$\equiv k(r, \theta - \varphi)$, причем $k(r, \theta)$ — четная 2π-периодическая функция угловой координаты и $k(r, \theta) > 0$ при $r < a$.

В случае произвольного нагружения поверхностей трещины величина КИН непосредственно определяется по весовой функции при помощи квадратур

$$K_1(\varphi) = \int_0^a \int k(r, \theta - \varphi)\, p(r, \theta)\, r\, d\theta\, dr \tag{1.1}$$

(интегрирование по θ и φ всюду ведется по отрезку $[-\pi, \pi]$).

Для задач из класса **А** помимо весовой функции вводится также осесимметричная весовая функция $k(r')$, равная величине КИН при нагружении поверхностей трещины по закону $p(r, \theta) = (2\pi r)^{-1}\delta(r - r')$, где $\delta(r)$ — функция Дирака. Подставляя указанную нагрузку в (1.1) и учитывая 2π-периодичность функции $k(r, \theta)$, получаем следующее соотношение, связывающее весовую и осесимметричную весовую функции:

$$k(r) = (2\pi)^{-1} \int k(r, \theta) d\theta, \quad r \leqslant a \tag{1.2}$$

Осесимметричная весовая функция имеет (интегрируемую) особенность в точках граничного контура трещины, поэтому при $r = a$ соотношение (1.2) следует понимать как существование предела

$$\lim_{r \to a-0} \int \frac{k(r, \theta)\, d\theta}{2\pi k(r)} = 1 \tag{1.3}$$

Иное представление для осесимметричной весовой функции можно получить при помощи вариационной формулы для тела с трещиной нормального отрыва [6—8]

$$\delta_n u_z(r, \theta, 0^+) = aC \int k(r, \theta - \varphi) K_1(\varphi) \delta n(\varphi) d\varphi \tag{1.4}$$

которая определяет вариацию нормальных перемещений точек поверхности трещины S^+, вызванную вариацией $\delta n(\varphi)$ граничного контура трещины. Входящие в (1.4) перемещения $u_z(r, \theta, 0^+)$ и КИН $K_1(\varphi)$ отвечают какому-то одному (произвольному) закону нагружения $p(r, \theta)$.

Постоянная C из (1.4) зависит только от упругих свойств материала и вычисляется по главным членам асимптотических разложений нормальных напряжений и перемещений в окрестности контура трещины. Так, если

$$\sigma_z = K_1(2\rho)^{-1/2}, \quad u_z = cK_1(2\rho)^{1/2}, \quad \rho \to 0 \tag{1.5}$$

где ρ — расстояние в плоскости $z = 0$ до контура трещины, то $C = \pi c/2$ [7].

Пусть при некотором осесимметричном законе нагружения $p(r, \theta) = p(r)$, когда для задач из класса **А** $u_z(r, \theta, 0^+) = u_z(r, 0^+)$ и $K_1(\varphi) = K_1 \equiv \mathrm{const}$, контур трещины получает осесимметричную вариацию $\delta n(\varphi) = \delta a$. Вызванная этим вариация нормальных перемещений точек поверхности трещины S^+ вычисляется следующим образом:

$$\delta_n u_z(r, 0^+) = (\partial u_z(r, 0^+)/\partial a)\delta a$$

и вариационная формула (1.4) принимает вид

$$(aCK_1)^{-1} \partial u_z(r, 0^+)/\partial a = \int k(r, \theta) d\theta, \quad r \leqslant a \tag{1.6}$$

где были учтены свойства четности и 2π-периодичности функции $k(r, \theta)$ по угловой координате. Ясно, что $\partial u_z(r, 0^+)/\partial a$ имеет особенность в точках граничного контура трещины, поэтому при $r = a$ это соотношение следует понимать в том же смысле, что и (1.2).

Сравнение соотношений (1.2) и (1.6) приводит к следующему результату:

$$k(r) = (\pi^2 acK_1)^{-1}\partial u_z(r, 0^+)/\partial a \tag{1.7}$$

Таким образом, для определения осесимметричной весовой функции достаточно знать решение задачи, отвечающее какому-либо осесимметричному закону нагружения поверхностей трещины $p(r)$. Указанная инвариантность соотношения (1.7) относительно осесимметричных законов нагружения $p(r)$ обусловлена, очевидно, инвариантностью вариационной формулы (1.4) относительно более общих законов нагружения $p(r, \theta)$. Заметим, что применительно к однородным и изотропным материалам соотношение (1.7) следует из результатов работы [9].

2. Общая структура весовых функций для круговой трещины. В силу соотношения (1.2) осесимметричная весовая функция $k(r)$ непосредственно вычисляется по весовой функции $k(r, \theta)$. Покажем, что справедливо и более важное обратное утверждение.

Действительно, при учете соотношений (1.2) и (1.3) ясно, что формулой

$$1 = (2\pi)^{-1}\int [k(r, \theta)/k(r)]\, d\theta \tag{2.1}$$

определяется представление функции, равной единице внутри и на границе круга с радиусом a. Эта функция, гармоническая внутри круга, единственным образом определяется по своим граничным значениям.

Известно [10], что гармоническая в круге функция, принимающая единичные значения на его границе, имеет вид

$$1 = (2\pi)^{-1}\int P_r(\theta) d\theta \tag{2.2}$$

где использовано обозначение для ядра Пуассона

$$P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{|n|} e^{in\theta} \equiv \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta}$$

Сравнивая представления гармонической в круге функции (2.1) и (2.2), заключаем, что общая структура весовой функции устанавливается соотношением

$$k(r, \theta - \varphi) = k(r)P_r(\theta - \varphi) \tag{2.3}$$

что позволяет сформулировать основной результат работы.

Теорема. Для задач из класса А весовая функция равна произведению осесимметричной весовой функции и ядра Пуассона.

Вообще говоря, весовая функция однозначно определяется по произвольному осесимметричному решению при помощи соотношений (2.3) и (1.7).

Из представления (2.3), в частности, следует, что $k(r, \theta)\ [2\pi k(r)]^{-1}$ представляет собой так называемую аппроксимативную единицу, свойства которой указаны в [10].

Структура весовой функции для задач из класса А позволяет преобразовать формулу (1.1) к более удобному для вычислений виду. Действительно, за редкими на практике исключениями, нагрузка $p(r, \theta)$ может быть представлена комплексным рядом Фурье

$$p(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(r)\, e^{in\theta}, \quad p_n(r) = (2\pi)^{-1}\int p(r, \theta)\, e^{-in\theta} d\theta$$

подставляя который вместе с (2.3) в (1.1) и выполняя интегрирование по угловой координате, приходим к следующему выражению для КИН с явным характером зависимости от полярного угла:

$$K_1(\varphi) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{a^{|n|}} \int_0^a p_n(r)\, k(r)\, r^{|n|+1}\, dr \tag{2.4}$$

Таким образом, величина КИН при произвольном законе нагружения поверхностей трещины $p(r, \theta)$ определяется по осесимметричной весовой функции $k(r)$ соотношением (2.4).

В качестве иллюстративного примера рассмотрим задачу о круговой трещине в неограниченном ($\Omega = \mathbf{R}^3$) однородном и изотропном упругом теле. Граничные условия на $\partial\Omega$ заменяются при этом обычными условиями затухания на бесконечности.

Наиболее простое решение данной задачи, отвечающее закону нагружения $p(r) = p \equiv \text{const}$, имеет вид [11]

$$\begin{gathered} u_z(r, 0^+) = \frac{2p(1-\nu)}{\pi\mu}(a^2 - r^2)^{1/2}, \quad r \leqslant a \\ u_z = \frac{1-\nu}{\mu} K_1 (2\rho)^{1/2}, \quad \rho \to 0; \quad K_1 = \frac{2pa^{1/2}}{\pi} \end{gathered} \tag{2.5}$$

где ν — коэффициент Пуассона и μ — модуль сдвига.

Непосредственно вычисляя осесимметричную весовую функцию по формуле (1.7) при помощи соотношений (2.5), находим

$$k^0(r) = [\pi^2 a^{1/2} (a^2 - r^2)^{1/2}]^{-1} \tag{2.6}$$

что совпадает с известным результатом [12].

Подставляя (2.6) в (2.3), также получаем известный результат [12]

$$k^0(r, \theta - \varphi) = \frac{\pi^{-2} a^{-1/2} (a^2 - r^2)^{1/2}}{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta - \varphi)} \tag{2.7}$$

установление которого традиционным способом на основе решения неосесимметричной краевой задачи связано с громоздкими вычислениями.

3. Весовая функция для круговой трещины в неоднородном теле. Предложенный метод позволяет значительно расширить область применения весовых функций для круговой трещины, так как соответствующие осесимметричные решения (и, в частности, осесимметричные весовые функции) известны для ряда задач [11—13]. При этом использование приближенных (или асимптотических) осесимметричных решений будет приводить, естественно, к приближенным (асимптотическим) представлениям для весовой функции.

Ниже рассмотрим статическую неосесимметричную задачу о круговой трещине нормального отрыва, расположенной в неограниченном ($\Omega = \mathbf{R}^3$) неоднородном упругом теле. Модуль сдвига материала постоянный ($\mu = \text{const} > 0$), а коэффициент Пуассона $\nu(z)$ — четная непрерывная (или кусочно-непрерывная) функция координаты z, удовлетворяющая стандартным условиям: $-1 < \nu(z) \leqslant 1/2$. В этом случае модуль упругости материала $E(z) = 2\mu[1 + \nu(z)]$ — положительная функция расстояния до плоскости трещины.

Заметим, что на отсутствие аналитических решений задач о трещинах в телах с непрерывным изменением коэффициента Пуассона указано в работе [14].

Сформулированная задача принадлежит классу **A** и ее осесимметричное решение имеет вид [1]

$$u_z(r, 0^+) = \frac{2(1-\nu_0)}{\pi\mu} \int\limits_r^a \frac{h(x)\,dx}{(x^2-r^2)^{1/2}}, \quad r \leqslant a$$
$$u_z = \frac{1-\nu_0}{\mu} K_1 (2\rho)^{1/2}, \quad \rho \to 0; \quad K_1 = \frac{2h(a)}{\pi a^{1/2}} \tag{3.1}$$

где $\nu_0 = \nu(0)$, а $h(x)$ — решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода с симметричным ядром

$$h(x) + \int\limits_0^a K(x, s)\, h(s)\, ds = \int\limits_0^x \frac{p(r)\, r\, dr}{(x^2-r^2)^{1/2}}, \quad 0 \leqslant x \leqslant a \tag{3.2}$$

$$K(x, s) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty G(t) \sin(xt) \sin(st)\, dt$$

$$1 + G(t) = 2(1-\nu_0)\, tL(t), \quad \lim_{t\to\infty} G(t) = 0$$

$$L(t) = \int\limits_0^\infty \gamma(z)\, e^{-2tz}\, dz, \quad \gamma(z) = [1-\nu(z)]^{-1}$$

Вычисляя осесимметричную весовую функцию по формуле (1.7) при учете соотношений (3.1), получаем

$$k(r) = k^\circ(r)[1 + \Lambda(r)] \tag{3.3}$$

$$\Lambda(r) = (a^2 - r^2)^{1/2} \int\limits_r^a \frac{H(x)\,dx}{(x^2-r^2)^{1/2}}, \quad H(x) = \frac{1}{h(a)} \cdot \frac{\partial h(x)}{\partial a}$$

и, следовательно,

$$k(r, \theta - \varphi) = k^\circ(r, \theta - \varphi)[1 + \Lambda(r)] \tag{3.4}$$

где весовые функции $k^\circ(r)$ и $k^\circ(r, \theta)$ определяются состношениями (2.6) и (2.7).

Влияние неоднородности упругого материала на величину весовой функции $k(r, \theta)$ из (3.4) полностью определяется функцией $\Lambda(r)$, так как $k^\circ(r, \theta)$ не зависит от упругих характеристик материала.

В силу соотношений (3.3), построение функции $\Lambda(r)$ приводится, по сути дела, к нахождению функции $H(x)$ посредством вычисления производной по a от функции $h(x)$, являющейся решением интегрального уравнения Фредгольма (3.2) при некотором осесимметричном законе нагружения $p(r)$. В большинстве случаев для определения функции $h(x)$ необходимо использовать численные методы, поэтому вычисление указанной производной может быть связано со значительными трудностями.

Заметим, что функция $H(x)$ может быть определена и без предварительного вычисления функции $h(x)$. Действительно, дифференцируя по a интегральное уравнение (3.2), находим, что $H(x)$ — решение интегрального уравнения Фредгольма

$$H(x) + \int\limits_0^a K(x, s)\, H(s)\, ds = -K(x, a), \quad 0 \leqslant x \leqslant a \tag{3.5}$$

правая часть которого не зависит от закона нагружения $p(r)$, а ядро определяется соотношениями (3.2).

В рамках рассматриваемой модели для некоторых конкретных законов неоднородности упругого материала могут быть получены точные аналитические решения интегральных уравнений (3.2) и (3.5).

Пусть, к примеру,

$$\gamma(z) \equiv [1 - \nu(z)]^{-1} = b_1 + b_2 \cos b_3 z \tag{3.6}$$

когда $\nu(z)$ и $E(z)$ — четные периодические функции координаты z (более общие периодические законы неоднородности, допускающие построение аналитических решений, указаны в [4]). Будем считать $b_3 \geqslant 0$, что в силу четности функции $\cos x$ не приводит к потере общности.

Решение интегрального уравнения (3.2) с произвольной правой частью, построенное в [1] для закона неоднородности (3.6), применительно к уравнению (3.5) принимает вид

$$H(x) = b\eta B \operatorname{sh}(\eta x)[\operatorname{sh}(\eta a) + B \operatorname{ch}(\eta a)]^{-1} \tag{3.7}$$

$$b = b_2/b_1, \quad B = (1+b)^{-1/2}, \quad \eta = b_3 B/2$$

Подставляя (3.7) во второе из соотношений (3.3), находим

$$\Lambda(r) = \frac{b\beta B(1-R^2)^{1/2}}{\operatorname{sh}\beta + B\operatorname{ch}\beta} \int_R^1 \frac{\operatorname{sh}(\beta x)\,dx}{(x^2-R^2)^{1/2}} \tag{3.8}$$

$$R = r/a, \quad \beta = B\alpha, \quad \alpha = ab_3/2$$

и, в частности,

$$\Lambda(0) = b\beta B(\operatorname{sh}\beta + B\operatorname{ch}\beta)^{-1}\operatorname{shi}\beta \tag{3.9}$$

где $\operatorname{shi}\beta$ — интегральный гиперболический синус [15].

Таким образом, характеризующая влияние неоднородности упругого материала на величину КИН функция Λ зависит лишь от трех безразмерных параметров b, α и R.

Установим области допустимых значений этих параметров. Ясно, что $0 \leqslant \alpha < \infty$ и $0 \leqslant R \leqslant 1$, а область значений параметра b определяется диапазоном допустимых значений функции $\nu(z)$. Если ограничиться случаем, когда $0 \leqslant \nu(z) \leqslant 1/2$ (заметим, что в [16] указано на существование материалов и с отрицательными значениями коэффициента Пуассона), то можно показать [4], что $-1/3 \leqslant b \leqslant 1/3$.

При $\alpha = 0$ или при $b = 0$ (эти значения отвечают однородным материалам) $\Lambda(r) = 0$ и соотношение (3.4) превращается в тождество; кроме того, $\Lambda(r) \to 0$ при $R \to 1$, или, что то же самое, при $r \to a$.

Особый интерес представляет исследование асимптотического поведения функции $\Lambda(r)$ при $\alpha \to \infty$ (что при фиксированном радиусе трещины эквивалентно случаю $b_3 \to \infty$), когда функции $\nu(z)$ и $E(z)$ становятся быстроосциллирующими и их период $T = 2\pi b_3^{-1} \to 0$.

Выполняя указанный предельный переход в (3.8) и (3.9), находим

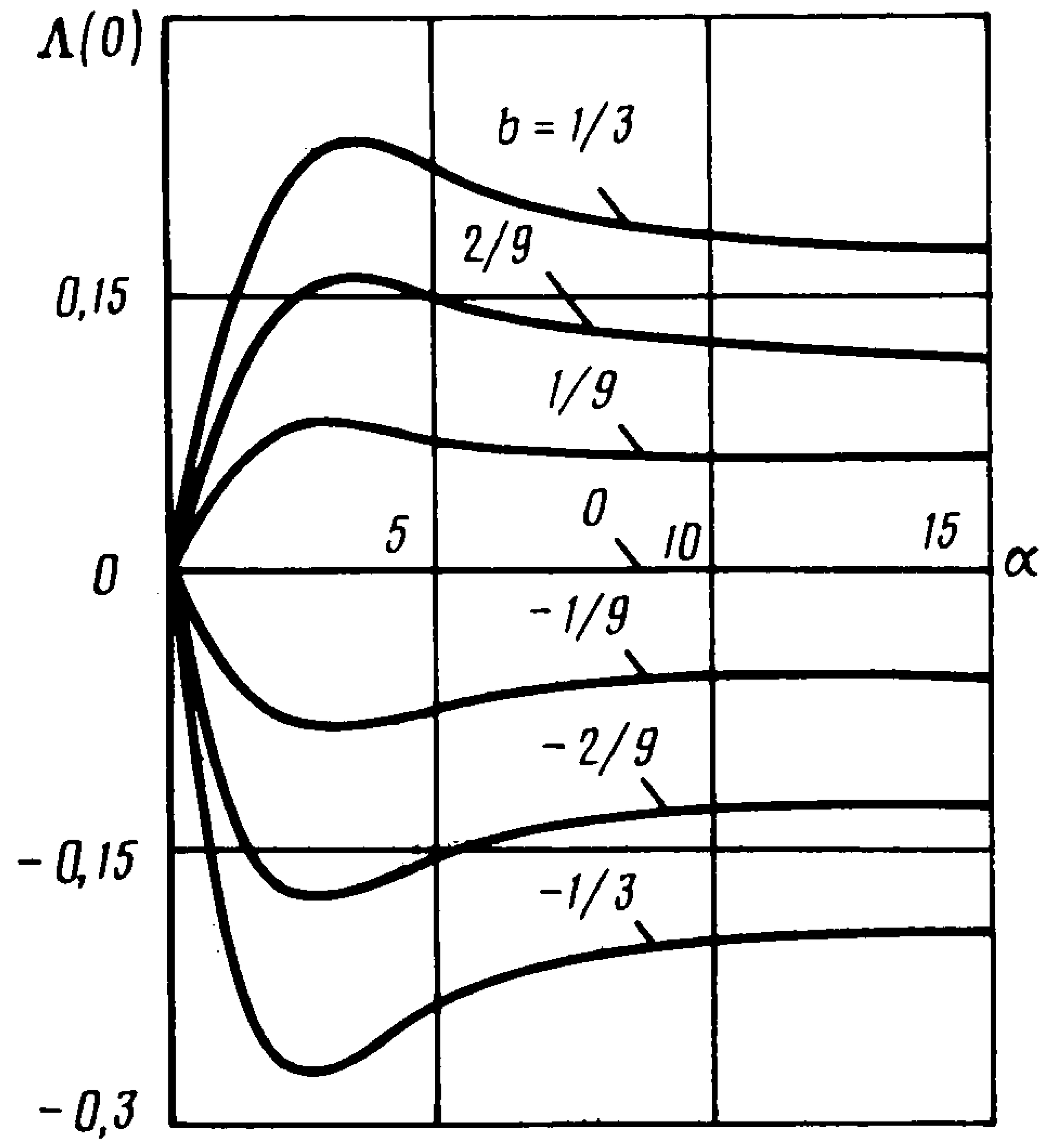
$$\lim_{\alpha\to\infty} \Lambda(r) = b[1 + (1+b)^{1/2}]^{-1}, \quad 0 \leqslant R < 1 \tag{3.10}$$

так что при достаточно больших значениях параметра α величина функции $\Lambda(r)$ определяется лишь значениями параметра b и не зависит от R.

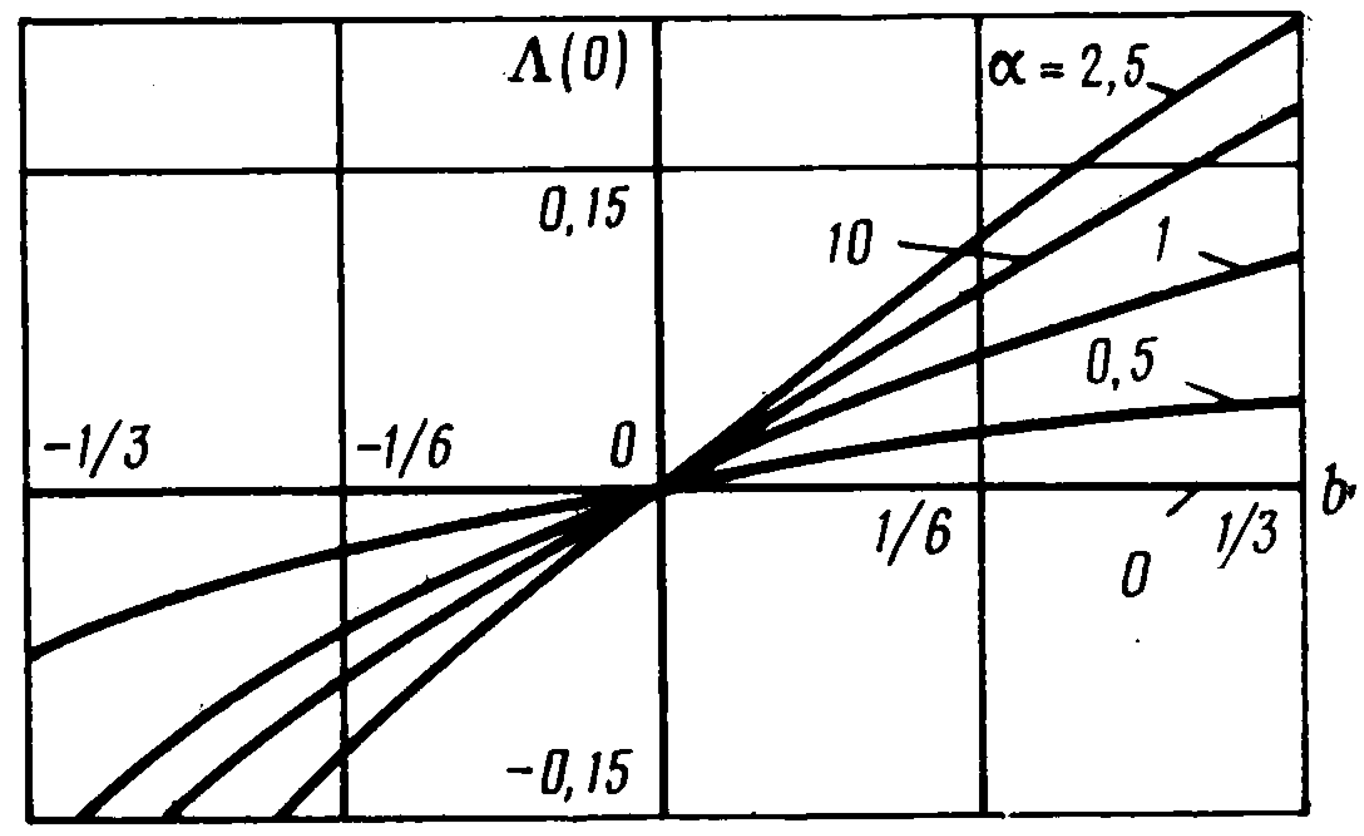
Подставляя представление (3.3) в (2.4), при учете соотношения (3.10) получаем

$$\lim_{\alpha\to\infty} K_1(\varphi) = (1+b)^{1/2} K_1^\circ(\varphi) \tag{3.11}$$

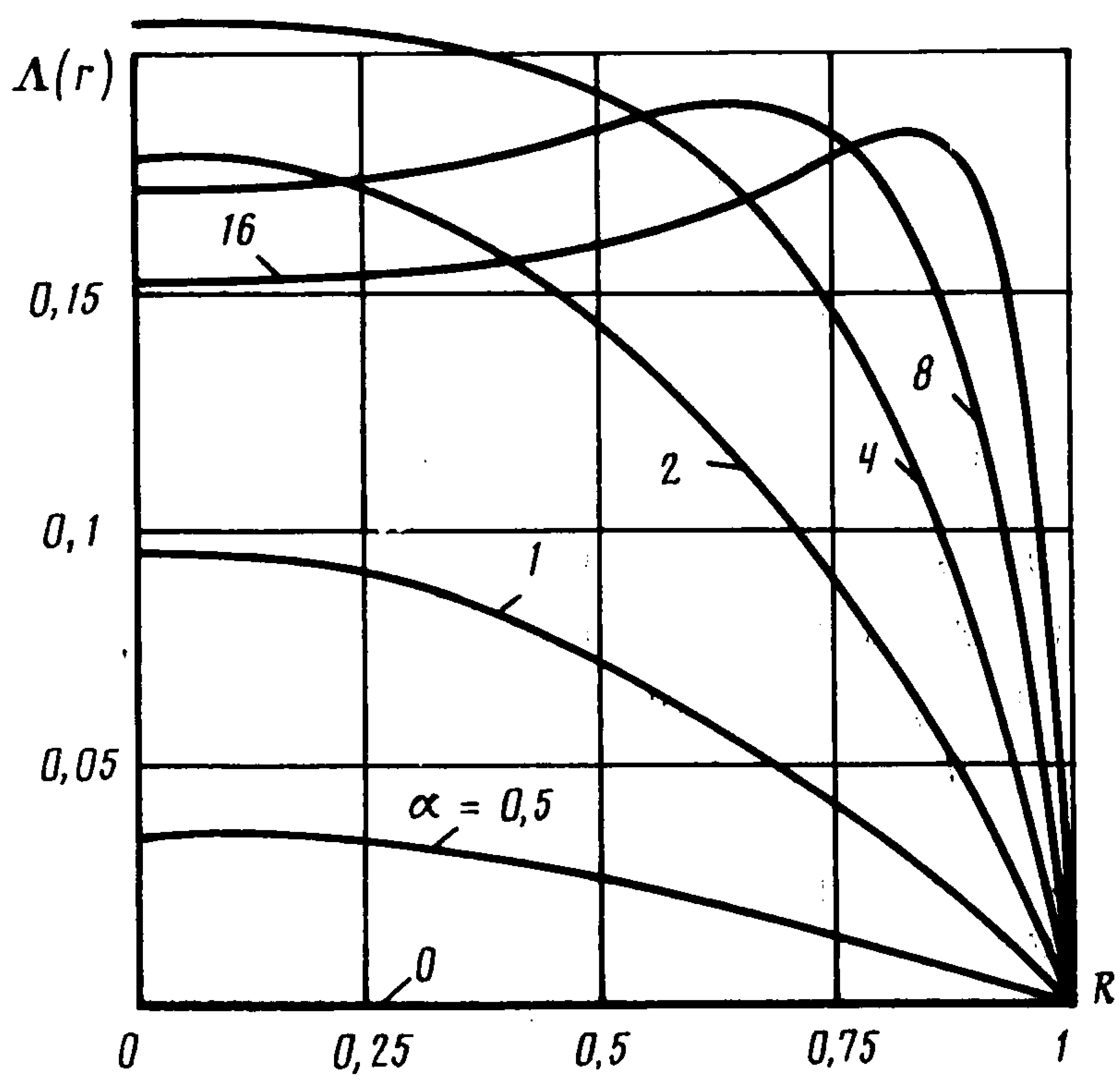
где $K_1^\circ(\varphi)$ — соответствующая величина КИН для круговой трещины в неограниченном однородном теле, получаемая при подстановке в (2.4) соотношения (2.6). Следовательно, для достаточно больших значений



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

параметра α приближенные значения КИН при произвольном законе нагружения поверхностей трещины могут быть непосредственно вычислены по формуле $K_1(\varphi) \approx (1 + b)^{1/2} K_1^\circ(\varphi)$.

На фиг. 1 приведены зависимости $\Lambda(0)$ от α при фиксированных значениях b, из которых, в частности, видно, что $|\Lambda(0)|$ достигает максимума при $\alpha \approx 2{,}5...3{,}5$. Далее, с ростом α величина $\Lambda(0)$ монотонно стремится к своему предельному значению, определяемому соотношением (3.10).

Зависимости $\Lambda(0)$ от b при фиксированных значениях α, приведенные на фиг. 2, близки к линейным.

Характер зависимости $\Lambda(r)$ от R при фиксированных значениях параметра α показан на фиг. 3 для случая, когда $b = 0{,}3$.

4. Интегральные характеристики неоднородного тела с круговой трещиной. Так как величина $K_1^\circ(\varphi)$ не зависит от упругих характеристик материала, то в силу соотношения (3.11) ясно, что при определении КИН неоднородный материал рассматриваемого типа с быстроосциллирующими значениями $\nu(z)$ и $E(z)$ нельзя заменить эквивалентным (в указанном ниже смысле) однородным материалом с эффективными упругими характеристиками. Покажем, что такая замена возможна при вычислении интегральных характеристик задачи, к которым, в частности, относятся величины объема трещины и потенциальной энергии тела с трещиной.

При помощи соотношений (3.1) и (3.2) можно показать, что объем круговой трещины, находящейся под действием постоянного внутреннего давления ($p(r) = p \equiv \mathrm{const}$), для закона неоднородности (3.6) определяется формулой

$$V = \frac{8(1-\nu_0)pa^3}{3\mu}\left\{1 + b - \frac{3b(1+\alpha)(\beta - \mathrm{th}\,\beta)}{\beta^3[1+(1+b)^{1/2}\mathrm{th}\,\beta]}\right\}$$

откуда, в частности, следует, что

$$\lim_{\alpha\to\infty} V = 8(1-\nu_0)pa^3(1+b)(3\mu)^{-1} \tag{4.1}$$

Обозначим через $V^* = 8(1-\nu^*)pa^3(3\mu)^{-1}$ объем круговой трещины, расположенной в неограниченном однородном теле с модулем сдвига μ и коэффициентом Пуассона ν^* и находящейся под действием постоянного внутреннего давления p. Если выбрать величину ν^* так, чтобы выполнялось равенство

$$1 - \nu^* = (1-\nu_0)(1+b) \tag{4.2}$$

то соотношение (4.1) сводится к следующему: $\lim_{\alpha\to\infty} V = V^*$. Другими словами, при переходе в рамках рассматриваемой модели к материалам с быстроосциллирующими упругими характеристиками $\nu(z)$ и $E(z)$ (точнее, при $\alpha \to \infty$) величина объема трещины стремится к соответствующему значению для однородного материала с коэффициентом Пуассона ν^*, удовлетворяющим соотношению (4.2).

Физический смысл этого соотношения проясняется при введении упругой постоянной $\gamma^* = (1-\nu^*)^{-1}$, которая, в силу зависимостей (3.6) и (4.2), выражается через среднее значение функции $\gamma(z) = [1-\nu(z)]^{-1}$ по периоду

$$\gamma^* = \langle\gamma(z)\rangle \equiv \frac{1}{T}\int_0^T \gamma(z)\,dz \tag{4.3}$$

откуда, в частности, видно, что $0 \leqslant \nu^* \leqslant 1/2$ при $0 \leqslant \nu(z) \leqslant 1/2$.

Вообще говоря, указанное асимптотическое поведение величины объема трещины имеет место не только при действии постоянного внутреннего давления, но и при любом другом законе нагружения поверхностей трещины $p(r, \theta)$. Это можно показать при помощи соотношений, позволяющих выразить объем трещины при произвольном нагружении ее поверхностей через решение задачи о трещине, находящейся под действием постоянного внутреннего давления [17].

Как известно [17], потенциальная энергия W тела с трещиной, находящейся под действием постоянного внутреннего давления, связана простой зависимостью с объемом трещины: $W = 1/_2 pV$. Следовательно, при $\alpha \to \infty$ выполняется соотношение $W \to W^*$, в котором W^* — соответствующее значение потенциальной энергии в случае однородного материала с модулем сдвига μ и упругой постоянной γ^*, равной, в силу (4.3), среднему значению функции $\gamma(z)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бородачев А. Н.* Равновесие неоднородного упругого тела с круговой трещиной // Прикл. механика. 1986. Т. 22. № 2. С. 108—113.
2. *Плевако В. П.* Двумерная обратная задача теории упругости неоднородных сред в полярных координатах // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 775—783.
3. *Бородачев А. Н.* Об одном точном решении задачи неоднородной теории упругости для трещины нормального отрыва // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 4. С. 124—130.
4. *Бородачев А. Н.* Об одном классе точных решений неосесимметричной контактной задачи для неоднородного упругого полупространства // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 2. С. 294—301.

5. *Cartwright D. J.* Stress intensity factor determination // Developments in fracture mechanics / Ed. Chell. G. G. London: Appl. Sci. Publ., 1979. V. 1. P. 29—65.
6. *Бородачев Н. М.* Об одном вариационном методе решения пространственной задачи теории упругости для тела с плоской трещиной // Прикл. механика. 1986. Т. 22. № 4. С. 71—76.
7. *Бородачев Н. М.* Трещина, близкая к круговой, в трансверсально-изотропном теле // Пробл. прочности. 1989. № 8. С. 60—63.
8. *Rice J. R.* First—order variation in elastic fields due to variation in location of a planar crack front // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1985. V. 52. № 3. P. 571—579.
9. *Rice J. R.* Some remarks on elastic crack—tip stress fields // Intern. J. Solids and Struct. 1972. V. 8. № 6. P. 751—758.
10. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H^p. М.: Мир, 1984. 364 с.
11. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985. 502 с.
12. *Саврук М. П.* Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. Киев: Наук. думка, 1988. 619 с.
13. *Kassir M. K., Sih G. C.* Three—dimensional crack problems. Leyden: Noordhoff, 1975. 452 p.
14. *Eischen J. W.* Fracture of nonhomogeneous materials // Intern. J. Fract. 1987. V. 34. № 1. P. 3—22.
15. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1964. 344 с.
16. *Bathurst R. J., Rothenburg L.* Note on a random isotropic granular material with negative Poisson's ratio // Intern. J. Eng. Sci. 1988. V. 26. № 4. P. 373—383.
17. *Гольдштейн Р. В., Ентов В. М.* Качественные методы в механике сплошных сред. М.: Наука, 1989. 224 с.

Киев

Поступила в редакцию
26.III.1990