Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 6, 1990

УДК 539.3

Г. Н. Миренкова, Э. Г. Соснина

ПОЛАЯ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНАЯ ИГЛА В ОРТОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

Решается задача о распределении напряжений на поверхности полой эллипсоидальной иглы в ортотропной упругой среде и однородном внешнем поле. Для напряжений на поверхности иглы получены явные выражения через упругие постоянные среды и параметры эллипсоида в локальной системе координат, связанной в каждой точке иглы с нормалью к поверхности. Используется общее решение задачи о концентрации напряжений на эллипсоидальной неоднородности [1] и переход к предельным случаям эллипсоидальной полости, основанный на наличии малых параметров [2].

1. Рассмотрим полую эллипсоидальную иглу, т. е. эллипсоидальную полость, один размер которой велик по сравнению с двумя другими, в ортотропной неограниченной упругой среде, находящейся под действием внешнего однородного поля $\sigma_0^{\alpha\beta}$. В системе координат (x_1, x_2, x_3), жестко связанной с эллипсоидом, уравнение эллипсоида запишется в виде

$$x_1^2a_1^{-2}+x_2^2a_2^{-2}+x_3^2a_3^{-2}=1,\quad a_1\gg a_2\geqslant a_3 \tag{1.1}$$

Будем считать, что оси упругой симметрии внешней ортотропной среды совпадают с осями эллипсоида. Тогда тензор упругих постоянных среды $c^{\alpha\beta\lambda\mu}$ имеет девять отличных от нуля компонент, которые, согласно обычному правилу [3], обозначим

$$\begin{gathered} c^{\alpha\alpha\beta\beta}=c_{\alpha\beta}\ (\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ 3)\\ c^{2323}=c_{44},\ c^{3131}=c_{55},\ c^{1212}=c_{66}\end{gathered} \tag{1.2}$$

Напряжения $\sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{n})$ на поверхности эллипсоидальной полости в однородном внешнем поле $\sigma_0^{\lambda\mu}$ имеют вид

$$\sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{n})=F^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\lambda\alpha}(\mathbf{n})\,\sigma_0^{\lambda\mu},\qquad F^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\lambda\mu}(\mathbf{n})=B^{\alpha\beta\varkappa\rho}(\mathbf{n})\,B^{-1}_{\varkappa\rho\lambda\mu} \tag{1.3}$$

где $\mathbf{n}=(n_1,\ n_2,\ n_3)$ — нормаль к поверхности эллипсоида.

Тензорный коэффициент концентрации напряжений $F^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\lambda\mu}(\mathbf{n})$ представлен в виде произведения двух сомножителей. Первый из них, тензор $B^{\alpha\beta\varkappa\rho}(\mathbf{n})$, зависит только от упругих постоянных среды и включения, от нормали $\mathbf{n}$ к поверхности включения и остается конечным при любых предельных переходах. Для полости тензор $B(\mathbf{n})$ имеет вид [1]

$$B^{\alpha\beta\lambda\mu}(\mathbf{n})=c^{\alpha\beta\lambda\mu}-c^{\alpha\beta\varkappa\rho}K_{\varkappa\rho\eta\nu}(\mathbf{n})\,c^{\eta\nu\lambda\mu} \tag{1.4}$$

где тензор $K(\mathbf{n})$ для ортотропной среды построен явно через фурье-образ тензора Грина однородной среды. Выражения для компонент $K(\mathbf{n})$ через упругие постоянные ортотропной среды и координаты единичного вектора нормали $\mathbf{n}$ приведены в работе [4], для изотропной среды — в работе [1].

Тензор $B(\mathbf{n})$ для полости симметричен внутри пар и по перстановке пар индексов $B^{\alpha\beta\lambda\mu}(\mathbf{n})=B^{\lambda\mu\alpha\beta}(\mathbf{n})=B^{\beta\alpha\lambda\mu}(\mathbf{n})$ и его компоненты получаются из (1.4) сверткой соответствующих компонент тензоров c и $K(\mathbf{n})$.

Ввиду громоздкости выражений для компонент $B(\mathbf{n})$ приведем их значения по главным сечениям эллипсоида $n_1=0,\ n_2=0,\ n_3=0$. В сечении $n_1 = 0$ отличные от нуля компоненты тензора $B\,(\mathbf{n})$ имеют вид

$$
\begin{gathered}
B^{1111}(\mathbf{n}) = p_1\,[\Delta_{33}n_2^4 + \Delta_{22}n_3^4 + q_1 n_2^2 n_3^2] \\
B^{2222}(\mathbf{n}) = p_1\Delta_{11}n_3^4, \quad B^{3333}(\mathbf{n}) = p_1\Delta_{11}n_2^4, \quad B^{2233}(\mathbf{n}) = p_1\Delta_{11}n_2^2 n_3^2 \\
B^{2322}(\mathbf{n}) = -p_1\Delta_{11}n_2 n_3^3, \; B^{2333}(\mathbf{n}) = p_1\Delta_{11}n_2^3 n_3, \; B^{2323}(\mathbf{n}) = B^{2233}(\mathbf{n}) \\
B^{1122}(\mathbf{n}) = -\eta_1 n_3^2, \; B^{1133}(\mathbf{n}) = -\eta_1 n_2^2, \; B^{2311}(\mathbf{n}) = \eta_1 n_2 n_3 \qquad (1.5) \\
B^{1313}(\mathbf{n}) = \psi_1 n_2^2, \quad B^{1212}(\mathbf{n}) = \psi_1 n_3^2, \quad B^{1213}(\mathbf{n}) = \psi_1 n_2 n_3 \\
p_1 = [c_{22}n_2^4 + c_{33}n_3^4 + (\Delta_{11}c_{44}^{-1} - 2c_{23})\,n_2^2 n_3^2]^{-1} \\
\eta_1 = p_1\,(\Delta_{13}n_2^2 + \Delta_{12}n_3^2), \; \psi_1 = c_{55}c_{66}\,(c_{66}n_2^2 + c_{55}n_3^2)^{-1} \\
q_1 = \Delta c_{44}^{-1} + 2\Delta_{23}
\end{gathered}
$$

Здесь $\Delta_{\alpha\beta}$ — алгебраическое дополнение элемента $c_{\alpha\beta}$ матрицы $\| c_{\alpha\beta} \|$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$), Δ — определитель этой матрицы.

Компоненты тензора $B\,(\mathbf{n})$ в сечениях $n_2 = 0$ и $n_3 = 0$ получаются из формул (1.5) заменой индексов $1 \leftrightarrow 2$, $4 \leftrightarrow 5$ и $1 \leftrightarrow 3$, $4 \leftrightarrow 6$ соответственно. Для изотропной среды выражение для $B\,(\mathbf{n})$ приведено в работе [2].

Сомножитель B^{-1} коэффициента концентрации $F\,(\mathbf{n})$ в (1.3) зависит от формы неоднородности и для эллипсоида является постоянным тензором, обратным тензору B, который выражается через среднее значение $B\,(\mathbf{n})$ по поверхности эллипсоида

$$
\begin{gathered}
B^{\varkappa\rho\lambda\mu} = \langle B^{\varkappa\rho\lambda\mu}(\mathbf{n})\rangle = (4\pi)^{-1}\,a_1a_2a_3\int\limits_{\Omega} B^{\varkappa\rho\lambda\mu}(\mathbf{n})\,\rho\,(\mathbf{n})\,d\mathbf{n} \\
\rho\,(\mathbf{n}) = (a_1^2n_1^2 + a_2^2n_2^2 + a_3^2n_3^2)^{-3/2}
\end{gathered} \qquad (1.6)
$$

где интегрирование ведется по всем направлениям единичного вектора $\mathbf{n}$, т. е. по поверхности единичной сферы. Зависимость тензора B от параметров эллипсоида сосредоточена в скалярном весовом множителе $\rho\,(n)$, что существенно облегчает переход к предельным случаям и позволяет получить явные выражения для напряжений на поверхности иглы, трещины и диска.

2. Для перехода к предельному случаю иглы воспользуемся методом, предложенным в работе [2]. Введем безразмерные параметры $\zeta = a_2a_1^{-1}$, $\xi = a_3a_2^{-1}$. Тогда игле соответствует $\zeta \ll 1$, $\xi \sim 1$. Разложим весовой множитель $\rho\,(n)$ в (1.6) по малому (но конечному) параметру ζ, выделив в нем сингулярную составляющую $\delta\,(t)$ и подставив разложение $\rho\,(n)$ в (1.6), получим разложение тензора B:

$$
\begin{gathered}
B = B_0 + O\,(\zeta^2 \ln \zeta), \quad B_0 = \frac{\xi}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{B\,(\varphi, 0)\,d\varphi}{\cos^2\varphi + \xi^2\sin^2\varphi} \\
B\,(\varphi, 0) = B\,(n_1 = 0,\; n_2 = \cos\varphi,\; n_3 = \sin\varphi) \qquad (2.1) \\
n_1 = \cos\Theta, \; n_2 = \sin\Theta\cos\varphi, \; n_3 = \sin\Theta\sin\varphi, \; \cos\Theta = t
\end{gathered}
$$

(φ, Θ — сферические координаты с осью Θ, направленной по оси иглы x_1).

Так как тензор B_0 для любой анизотропной среды имеет обратный [2], то в разложении (2.1) можно ограничиться главным членом B_0. Таким образом, решение задачи о распределении напряжений на поверхности иглы сведено к вычислению однократных интегралов (2.1) и обращению тензора B_0.

Получим главные члены разложения компонент тензоров B и B^{-1} по малому параметру ζ для ортотропной среды. Отметим, что B и B^{-1} имеют симметрию и структуру тензора упругих постоянных. Сначала запишем тензор $B(\varphi, 0)$. Из формул (1.5) для $B(\mathbf{n})$ следует, что произвольная отличная от нуля компонента тензора $B(\varphi, 0)$ (за исключением 1212 и 1313) представима в виде

$$B(\varphi, 0) = p_1(\varphi)\,[P \sin^4 \varphi + Q \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + R \cos^4 \varphi] \tag{2.2}$$
$$p_1(\varphi) = p_1(n_2 = \cos\varphi,\ n_3 = \sin\varphi)$$

Тензоры P, Q, R имеют симметрию тензора упругих постоянных и их отличные от нуля компоненты выражаются через упругие характеристики следующим образом:

$$\begin{gathered} P^{1111} = \Delta_{22},\ R^{1111} = \Delta_{33},\ Q^{1111} = q_1 \\ P^{2222} = Q^{2233} = Q^{2323} = R^{3333} = \Delta_{11} \\ P^{1122} = Q^{1133} = -\Delta_{12},\ Q^{1122} = R^{1133} = -\Delta_{13} \end{gathered} \tag{2.3}$$

Подставляя формулы (2.2), (2.3) для $B(\varphi, 0)$ в (2.1) и интегрируя по φ, получим

$$B = (kMc_{33})^{-1}\,[k(l + \xi k)\,P + \xi k Q + \xi(1 + l\xi)\,R] \tag{2.4}$$
$$B^{1212} = \gamma\sqrt{c_{66}},\ B^{1313} = \xi\gamma\sqrt{c_{55}},\ \gamma = \sqrt{c_{55}c_{66}}\,(\sqrt{c_{55}} + \xi\sqrt{c_{66}})^{-1}$$
$$k = \sqrt{\frac{c_{22}}{c_{33}}},\quad l = \sqrt{\frac{\Delta_{11} - 2c_{23}c_{44}}{c_{33}c_{44}} + 2k},\quad M = l(1 + \xi l + k\xi^2)$$

Тензор B^{-1}, обратный тензору B, определяется соотношением

$$B^{\alpha\beta\lambda\mu} B^{-1}_{\lambda\mu\sigma\tau} = I^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\sigma\tau} = {}^1/_2\,(\delta_\sigma{}^\alpha \delta_\tau{}^\beta + \delta_\tau{}^\alpha \delta_\sigma{}^\beta)$$

где $I^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\sigma\tau}$ — единичный четырехвалентный тензор, симметричный внутри пар $(\alpha\beta)$, $(\sigma\tau)$ и по перестановке пар индексов.

Построение тензора B^{-1} сводится к обращению матрицы шестого порядка. Компоненты B с индексами 1212, 1313, 2323 находятся непосредственно как величины, обратные соответствующим учетверенным компонента тензора B. Остальные шесть независимых компонент B^{-1} являются элементами симметричной матрицы третьего порядка $\| B_{\alpha\beta}{}^{-1} \|$, обратной $\| B^{\alpha\beta} \|$, где

$$B^{\alpha\beta} = B^{\alpha\alpha\beta\beta},\ B_{\alpha\beta}{}^{-1} = B^{-1}_{\alpha\alpha\beta\beta}\ (\alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ 3)$$

Проделав необходимые вычисления, получим

$$\begin{gathered} B^{-1}_{11\alpha\alpha} = \Delta_{1\alpha}\Delta^{-1}\ (\alpha = 1,\ 2,\ 3) \\ B^{-1}_{2222} = \Delta_{22}\Delta^{-1} + \xi L\,(k\Delta_{11})^{-1},\ B^{-1}_{3333} = \Delta_{33}\Delta^{-1} + L\,(\xi\Delta_{11})^{-1} \\ B^{-1}_{2233} = \Delta_{11}{}^{-1}\,(\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta^{-1} - kc_{33}),\quad B^{-1}_{2323} = c_{33}M\,(4\xi\Delta_{11})^{-1} \\ B^{-1}_{1212} = (4\gamma\sqrt{c_{66}})^{-1},\ B_{1313} = (4\xi\gamma\sqrt{c_{55}})^{-1},\ L = klc_{33} \end{gathered} \tag{2.5}$$

Если ввести модули Юнга E_α и коэффициенты Пуассона $\nu_{\alpha\beta}$ ортотропной среды [5], то

$$\Delta_{\alpha\alpha}\Delta^{-1} = E_\alpha{}^{-1},\ \ \Delta_{\alpha\beta}\Delta^{-1} = -\nu_{\alpha\beta}E_\alpha{}^{-1}\ (\alpha \neq \beta,\ \alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ 3)$$

Для изотропной среды выражения для компонент тензора B^{-1} приведены в работе [6].

Так как для иглы $\xi \sim 1$, то компоненты тензора B^{-1} всегда конечны. Поэтому коэффициент концентрации $F(\mathbf{n})$ при $\zeta \to 0$ стремится к конечному значению и, следовательно, напряжения $\sigma^{\alpha\beta}(n)$ на поверхности иглы не имеют сингулярностей.

Выражения для компонент тензора $F(\mathbf{n})$ по главным сечениям эллипсоида получены в явном виде, но здесь не приводятся из-за их громоздкости. Приведем сразу выражения для напряжений на поверхности иглы.

Получим сначала выражения для отличных от нуля компонент тензора напряжений в вершинах иглы A ($n_1 = 1$, $n_2 = n_3 = 0$), B ($n_1 = n_3 = 0$, $n_2 = 1$), C ($n_1 = n_2 = 0$; $n_3 = 1$)

$$\begin{gathered}
\sigma^{22}(A) = -c_{12}c_{11}^{-1}\sigma_0^{11} + (c_{11}\Delta_{11})^{-1}\{[c_{33}\Delta_{33}(1 + \xi l) - c_{12}\Delta_{12} + \\
+ kc_{33}\Delta_{23}]\sigma_0^{22} + [\Delta_{33}(c_{23} - kc_{33}) - L\Delta_{23}\xi^{-1}]\sigma_0^{23}\} \\
\sigma^{33}(A) = -c_{13}c_{11}^{-1}\sigma_0^{11} + (c_{11}\Delta_{11})^{-1}\{[\Delta_{22}(c_{23} - kc_{33}) - \xi l c_{33}\Delta_{23}]\sigma_0^{22} + \\
+ [c_{33}\Delta_{33} - c_{12}\Delta_{12} + L(\xi^{-1}\Delta_{22} + k^{-1}\Delta_{23})]\sigma_0^{33}\} \qquad (2.6) \\
\sigma^{23}(A) = M(\xi\Delta_{11})^{-1}\sigma_0^{23}, \quad \sigma^{13}(B) = \sqrt{c_{55}}(\xi\gamma)^{-1}\sigma_0^{13} \\
\sigma^{11}(B) = \sigma_0^{11} + \Delta_{11}^{-1}[(\Delta_{12} + k^{-1}\Delta_{13})\sigma_0^{22} - l(k\xi)^{-1}\Delta_{13}\sigma_0^{33}] \\
\sigma^{33}(B) = -k^{-1}\sigma_0^{22} + [1 + l(k\xi)^{-1}]\sigma_0^{33} \\
\sigma^{11}(C) = \sigma_0^{11} - \Delta_{11}^{-1}[\xi l\Delta_{12}\sigma_0^{22} - (\Delta_{13} + k\Delta_{12})\sigma_0^{33}] \\
\sigma^{22}(C) = (1 + \xi l)\sigma_0^{22} - k\sigma_0^{33}, \quad \sigma^{12}(C) = \sqrt{c_{66}}\xi^{-1}\sigma_0^{12}
\end{gathered}$$

3. Исследование напряжений $\sigma(\mathbf{n})$ в зависимости от упругих постоянных среды удобно проводить в локальной системе координат $x_{\alpha'}$ ($\alpha' = 1, 2, 3$), связанной в каждой точке поверхности с нормалью $\mathbf{n}$. Выберем в качестве локального базиса следующий:

$$\begin{gathered}
\mathbf{e}_3' = \mathbf{n}, \quad \mathbf{e}_1' = \mathbf{n}_0 \times \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2' = \mathbf{n} \times \mathbf{e}_1' \qquad (3.1) \\
\mathbf{n}_0 = (\sqrt{n_1^2 + n_2^2})^{-1}(n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2)
\end{gathered}$$

где $\mathbf{e}_\alpha$ — орты системы координат, связанной с осями эллипсоида, $\mathbf{e}_\alpha'$ — орты локальной системы, $\mathbf{n}_0$ — нормаль к сечению $n_3 = 0$. В новом базисе тензор напряжений $\sigma^{\alpha'\beta'}(\mathbf{n})$ вдоль главных сечений эллипсоида будет плоским (все компоненты с индексом 3 равны нулю в силу условий равновесия). Отличные от нуля компоненты $\sigma^{1'1'}$, $\sigma^{2'2'}$, $\sigma^{1'2'}$ обозначим соответственно

$$\sigma^{1'1'} = \sigma_1, \quad \sigma^{2'2'} = \sigma_2, \quad \sigma^{1'2'} = \tau \qquad (3.2)$$

Отметим, что в сечениях $n_1 = 0$ и $n_2 = 0$ напряжение σ_1 направлено перпендикулярно плоскости сечения, σ_2 — по касательной к контуру сечения, в сечении $n_3 = 0$ — наоборот. В вершине эллипсоида C направление σ_1 и σ_2 не определено, поэтому условимся считать $\sigma_1(C) = \sigma^{11}(C)$, $\sigma_2(C) = \sigma^{22}(C)$.

Приведем выражения для напряжений σ_1, σ_2 и τ вдоль главных сечений эллипсоида:

в сечении $n_1 = 0$

$$\begin{gathered}
\sigma_1 = p_1[c_{22}n_2^4\sigma^{11}(B) + c_{33}n_3^4\sigma^{11}(C)] + c_{44}^{-1}\eta_1 n_2 n_3\sigma^{23}(A) + \\
+ \Delta_{11}^{-1}p_1 n_2^2 n_3^2\{(kc_{33} - c_{23})(\Delta_{12}\sigma_0^{22} + \Delta_{13}\sigma_0^{33}) + \\
+ \Delta_{11}[(\Delta_{12}c_{44}^{-1} + c_{13})\sigma_0^{22} + (\Delta_{13}c_{44}^{-1} + c_{12})\sigma_0^{33}] - \\
- L(\xi\Delta_{13}k^{-1}\sigma_0^{22} + \xi^{-1}\Delta_{12}\sigma_0^{33})\} \qquad (3.3) \\
\sigma_2 = p_1[c_{22}n_2^2\sigma^{33}(B) + c_{33}n_3^2\sigma^{22}(C) - \Delta_{11}c_{44}^{-1}n_2 n_3\sigma^{23}(A)] \\
\tau = \psi_1[c_{66}^{-1}n_3\sigma^{12}(C) - c_{55}^{-1}n_2\sigma^{13}(B)]
\end{gathered}$$

в сечении $n_2 = 0$

$$\begin{gathered}
\sigma_1 = p_2[c_{11}n_1^4\sigma^{22}(A) + c_{33}n_3^4\sigma^{22}(C)] + c_{55}^{-1}\eta_2 n_1 n_3\sigma^{13}(B) + \\
+ \Delta_{11}^{-1}p_2 n_1^2 n_3^2\{(c_{23} + \Delta_{12}c_{55}^{-1})(\Delta_{11}\sigma_0^{11} + \Delta_{13}\sigma_0^{33}) + \\
+ [c_{33}(k\Delta_{12} + \Delta_{13}) + \Delta_{11}(\Delta_{22}c_{55}^{-1} - c_{13})]\sigma_0^{22} + \\
+ c_{33}q_2(\xi l\sigma_0^{22} - k\sigma_0^{33}) - (L\xi^{-1} + c_{22})\Delta_{12}\sigma_0^{33}\} \qquad (3.4) \\
\sigma_2 = p_2[c_{11}n_1^2\sigma^{33}(A) + c_{33}n_3^2\sigma^{11}(C) - \Delta_{22}c_{55}^{-1}n_1 n_3\sigma^{13}(B)] \\
\tau = \psi_2[c_{44}^{-1}n_1\sigma^{23}(A) - c_{66}^{-1}n_3\sigma^{12}(C)]
\end{gathered}$$

в сечении $n_3 = 0$

$$\sigma_1 = p_3 [c_{11}n_1^2\sigma^{22}(A) + c_{22}n_2^2\sigma^{11}(B) - c_{66}^{-1}\Delta_{33}n_1n_2\sigma^{12}(C)]$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 = {} & p_3 [c_{11}n_1^4\sigma^{33}(A) + c_{22}n_2^4\sigma^{33}(B)] + c_{66}^{-1}\eta_3 n_1 n_2\sigma^{12}(C) + \\ & + \Delta_{11}^{-1}p_3n_1^2n_2^2 \{(c_{23} + \Delta_{13}c_{66}^{-1})(\Delta_{11}\sigma_0^{11} + \Delta_{12}\sigma_0^{22}) + \\ & + [kc_{33}\Delta_{13} + c_{22}\Delta_{12} + \Delta_{11}(\Delta_{33}c_{66}^{-1} - c_{12})]\sigma_0^{33} + \\ & + kc_{33}q_3(l\xi^{-1}\sigma_0^{33} - \sigma_0^{22}) - (1 + l\xi)c_{33}\Delta_{13}\sigma_0^{22} \end{aligned} \qquad (3.5)$$

$$\tau = \psi_3 [c_{44}^{-1}n_1\sigma^{23}(A) - c_{55}^{-1}n_2\sigma^{13}(B)]$$

Значения p_2, q_2, η_2, ψ_2 и p_3, q_3, η_3, ψ_3 получаются из p_1, q_1, η_1, ψ_1 в (1.5) заменой индексов $1 \leftrightarrow 2$, $4 \leftrightarrow 5$ и $1 \leftrightarrow 3$, $4 \leftrightarrow 6$ соответственно.

Для изотропной среды напряжения σ_1, σ_2, τ на поверхности иглы по главным сечениям имеют вид:

в сечении $n_1 = 0$

$$\sigma_1 = \sigma_0^{11} + 2\nu(\xi n_3^2 - n_2^2)(\sigma_0^{22} - \xi^{-1}\sigma_0^{33}) - \nu\tau^{23}$$

$$\sigma_2 = [(1 + 2\xi)n_3^2 - n_2^2]\sigma_0^{22} + [(1 + 2\xi^{-1})n_2^2 - n_3^2)\sigma_0^{33} - \tau^{23}$$

$$\tau = (1 + \xi)(n_3\sigma_0^{12} - \xi^{-1}n_2\sigma_0^{13}), \quad \tau^{23} = 2\xi^{-1}(1 + \xi)^2 n_2n_3\sigma_0^{23}$$

в сечении $n_2 = 0$

$$\begin{aligned} \sigma_1 = {} & -\nu\varkappa n_1^2\sigma_0^{11} + [1 + 2\xi - \nu\varkappa(1 - 2\nu)n_1^2]\sigma_0^{22} + [\nu(\varkappa + 2\xi^{-1})n_1^2 - \\ & - 1]\sigma_0^{33} - \nu\tau^{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 = {} & (1 - \varkappa n_1^2)\sigma_0^{11} + [2\nu\xi - \varkappa(1 - 2\nu)n_1^2]\sigma_0^{22} + [(\varkappa + 2\xi^{-1})n_1^2 - \\ & - 2\nu]\sigma_0^{33} - \tau^{13} \end{aligned}$$

$$\tau = (1 + \xi)[(\varkappa\xi)^{-1}(1 + \xi)n_1\sigma_0^{23} - n_3\sigma_0^{12}]$$

$$\tau^{13} = 2\varkappa(1 + \xi^{-1})n_1n_3\sigma_0^{13}$$

в сечении $n_3 = 0$

$$\begin{aligned} \sigma_1 = {} & (1 - \varkappa n_1^2)\sigma_0^{11} + [(\varkappa + 2\xi)n_1^2 - 2\nu]\sigma_0^{22} + \\ & + [2\nu\xi^{-1} - \varkappa(1 - 2\nu)n_1^2]\sigma_0^{33} - \tau^{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 = {} & -\nu\varkappa n_1^2\sigma_0^{11} + [\nu(\varkappa + 2\xi)n_1^2 - 1]\sigma_0^{22} + \\ & + [1 + 2\xi^{-1} - \nu\varkappa(1 - 2\nu)n_1^2]\sigma_0^{33} - \nu\tau^{12} \end{aligned}$$

$$\tau = \xi^{-1}(1 + \xi)[\varkappa^{-1}(1 + \xi)n_1\sigma_0^{23} - n_2\sigma_0^{13}]$$

$$\tau^{12} = 2\varkappa(1 + \xi)n_1n_2\sigma_0^{12}, \quad \varkappa = (1 - \nu)^{-1}$$

Таким образом, для напряжений на поверхности иглы получены явные выражения через параметры эллипсоида, упругие постоянные внешней среды и координаты единичного вектора нормали. Анализ этих выражений показывает, что анизотропия среды вносит как количественные, так и качественные изменения в поведение напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кунин И. А., Соснина Э. Г.* Концентрация напряжений на эллипсоидальной неоднородности в анизотропной упругой среде // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 2. С. 306—315.
2. *Кунин И. А., Миренкова Г. Н., Соснина Э. Г.* Эллипсоидальная трещина и игла в анизотропной упругой среде // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 3. С. 524—531.
3. *Схоутен Я. А.* Тензорный анализ для физиков. М.: Наука, 1965. 456 с.
4. *Миренкова Г. Н., Соснина Э. Г.* Жесткий эллипсоидальный диск и игла в анизотропной упругой среде // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 1. С. 165—170.
5. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
6. *Миренкова Г. Н.* Напряжения на поверхности наклонной выработки в ортотропном массиве // Изв. вузов. Горн. ж. 1978. № 5. С. 10—13.

Новосибирск

Поступила в редакцию
5.VII.1989