

УДК 539.3

© 1990 г.

И. В. Панферов

**НАПРЯЖЕНИЯ В УПРУГИХ КОНУСООБРАЗНЫХ ТРУБАХ  
ИЗ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ  
СО СФЕРИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ ПРИ ТЕМПЕРАТУРНОМ  
И СИЛОВОМ НАГРУЖЕНИЯХ**

Предлагаются аналитические решения ряда новых задач по определению напряженного состояния трансверсально-изотропного полого конуса со сферической анизотропией. В сферической системе координат  $R, \varphi, \theta$  получено точное решение задачи об осесимметричном деформировании длинной конусообразной трубы (или сплошного конуса) из упругого трансверсально-изотропного материала со сферической анизотропией под действием осевой силы; ось симметрии материала направлена по сферическому радиусу  $R$ . Дается строгое решение задачи о равномерном нагреве конусообразной трубы из трансверсально-изотропного материала со сферической анизотропией для частных значений коэффициентов Пуассона; ось симметрии материала направлена по оси  $\theta$ . Для произвольных коэффициентов Пуассона найдено асимптотическое решение температурной задачи для трубы с малой конусностью.

Общий подход к определению напряженного состояния ортотропного полого конуса со сферической анизотропией [1] использует способ разделения переменных, что позволяет свести задачу к одномерной с последующим ее решением методом дискретной ортогонализации. Аналитические решения задач о деформировании анизотропных конусов приведены в литературе для случая цилиндрической анизотропии материала. В частности, точные решения задач о растяжении конуса [2] и об автономном нагреве полого конуса [3] построены при условии коллинеарности осей физической и геометрической симметрии упругого трансверсально-изотропного материала.

**1. Конусообразная труба под действием осевой силы.** Рассматривается упругое равновесие анизотропной трубы, ограниченной соосными круговыми коническими боковыми поверхностями с единой вершиной. Примем вершину за начало координат сферической системы  $R, \varphi, \theta$  [4]. Внутренняя поверхность описывается уравнением  $\theta = \theta_1$ , внешняя —  $\theta = \theta_2$ . Труба, вообще говоря, имеет концы  $R = R_0 > 0$  и  $R = R_1 > R_0$ .

Если длина дуги  $R_1 (\theta_2 - \theta_1)$  мала по сравнению с отрезком образующей трубы  $R_1 - R_0$ , то такую трубу будем называть длинной. В этом случае краевой эффект можно не рассматривать и краевые условия на концах  $R = R_0$  и  $R = R_1$  задавать, следуя принципу Сен-Венана.

В дальнейшем присвоим индексы 1, 2, 3 соответственно направлениям  $R, \varphi, \theta$ .

Связь между напряжениями  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{13}$  и деформациями  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \frac{1}{2} \varepsilon_{13}$  в рассматриваемом трансверсально-изотропном материале со сферической анизотропией представляется следующим образом [2]:

$$\begin{aligned} E_2 \varepsilon_{11} &= k \sigma_{11} - k \nu' (\sigma_{22} + \sigma_{33}), & E_2 \varepsilon_{22} &= \sigma_{22} - \nu \sigma_{33} - k \nu' \sigma_{11} \\ E_2 \varepsilon_{33} &= \sigma_{33} - \nu \sigma_{22} - k \nu' \sigma_{11}, & E_2 \varepsilon_{13} &= \gamma \sigma_{13} \\ \gamma &= E_2 / G, & k &= E_2 / E_1 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Ось  $1$  — ось симметрии материала,  $E_2, E_1$  — модули упругости соответственно в направлениях по осям  $2$  и  $1$ ,  $G$  — модуль сдвига,  $\nu$  и  $\nu'$  — коэффициенты Пуассона.

Решение задачи ищется в виде

$$\sigma_{ij} = \frac{\tau_{ij}(\theta)}{R^2}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{e_{ij}(\theta)}{R^2}, \quad u_1 = \frac{H_1(\theta)}{R}, \quad u_3 = \frac{H_3(\theta)}{R} \quad (1.2)$$

где  $u_1, u_3$  — перемещения по осям  $I$  и  $3$ .

Зависимости Коши [4] сводятся к соотношениям

$$e_{11} = -H_1, \quad e_{22} = H_1 + \operatorname{ctg} \theta H_3, \quad e_{33} = H_3' + H_1, \quad e_{13} = H_1' - 2H_3$$

Штрих указывает на дифференцирование по аргументу  $\theta$ .

Принимая во внимание равенства (1.2), запишем уравнения равновесия для случая осесимметричной деформации в сферической системе координат [4]:

$$\begin{aligned} \tau_{13}' - \tau_{22} - \tau_{33} + \tau_{13} \operatorname{ctg} \theta &= 0 \\ \tau_{33}' + \tau_{13} + (\tau_{33} - \tau_{22}) \operatorname{ctg} \theta &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

и уравнения совместности деформаций при учете выписанных соотношений Коши

$$\left( \frac{e_{22} + e_{11}}{\operatorname{ctg} \theta} \right)' = e_{33} + e_{11}, \quad e_{13} = -e_{11}' - 2 \frac{e_{11} + e_{22}}{\operatorname{ctg} \theta} \quad (1.4)$$

На боковых поверхностях трубы граничные условия запишутся следующим образом:

$$\tau_{13}(\theta_1) = \tau_{13}(\theta_2) = 0, \quad \tau_{33}(\theta_1) = \tau_{33}(\theta_2) = 0 \quad (1.5)$$

На торцах  $R = R_0$  и  $R = R_1$  должно выполняться условие равновесия [4] ( $Q$  — величина осевой силы)

$$2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\tau_{11} \cos \theta - \tau_{13} \sin \theta) \sin \theta d\theta = Q \quad (1.6)$$

Уравнения (1.3) автоматически выполняются при

$$\tau_{33} = \operatorname{ctg} \theta \tau_{13}, \quad \tau_{22} = \tau_{13}' \quad (1.7)$$

Условия (1.5), очевидно, совпадают.

Общий интеграл первого уравнения (1.4) при учете соотношений (1.1), (1.7) запишем в виде ( $B$  — неопределенная постоянная)

$$(k - kv') \tau_{11} = -(1 - kv') (\tau_{22} + \tau_{33}) + (k - kv') B \cos \theta \quad (1.8)$$

Функция  $\tau_{13}$  определяется из второго соотношения (1.4), которое при учете равенств (1.7), (1.8) сводится к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta \tau_{13}')' - \left( \omega_1 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) \tau_{13} &= B \omega_2 \sin \theta \\ \omega_1 = \frac{\gamma - 2(1 + \nu)}{\mu}, \quad \omega_2 = \frac{k - 2kv'}{\mu}, \quad \mu = \frac{k - (kv')^2}{k - kv'} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Представляет интерес случай  $k > 1$ . Для материала с ярко выраженной анизотропией можно считать, что  $4\omega_1 > 1$  при  $k > 1$ .

Найдем решение уравнения (1.9). Решением соответствующего однородного дифференциального уравнения является присоединенная сферическая функция Лежандра первого рода  $P_{-1/2+is}^1(\cos \theta)$ ,  $s = 1/2\sqrt{4\omega_1 - 1}$  (функция конуса) [5]. Она не имеет нулей на интервале  $|\cos \theta| < 1$ . Следовательно, решение уравнения (1.9) таково [6]:

$$\begin{aligned} \tau_{13} &= B \omega_2 Z(\theta), \\ Z(\theta) &= P_{-1/2+is}^1(\cos \theta) \left\{ C_1 + C_2 \int_{\theta}^{\theta} U(\alpha) d\alpha + \int_{\theta}^{\theta} U(\alpha) \int_{\theta_1}^{\alpha} V(\beta) d\beta d\alpha \right\} \\ U(\alpha) &= \{ \sin \alpha [P_{-1/2+is}^1(\cos \alpha)]^2 \}^{-1}, \quad V(\beta) = \sin^2 \beta P_{-1/2+is}^1(\cos \beta) \end{aligned}$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются из первых двух граничных условий (1.5):

$$C_1 = 0, \quad C_2 = - \int_{\theta_1}^{\theta_2} U(\alpha) \int_{\theta_1}^{\alpha} V(\beta) d\beta d\alpha \left[ \int_{\theta_1}^{\theta_2} U(\alpha) d\alpha \right]^{-1}$$

Постоянная  $B$  определяется из условия (1.6), которое при учете условий  $\tau_{13}(\theta_1) = \tau_{13}(\theta_2) = 0$  сводится к равенству

$$B \left[ \frac{1}{3} (\cos^3 \theta_1 - \cos^3 \theta_2) - \frac{k+1-2kv'}{k-kv'} \omega_2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} Z(\theta) \sin^2 \theta d\theta \right] = \frac{Q}{2\pi} \quad (1.10)$$

Запишем решение уравнения (1.9) применительно к сплошному конусу с боковой поверхностью  $\theta = \theta_2$ :

$$Z(\theta) = P_{-1/2+is}^1(\cos \theta) \left( C_1 + \int_0^{\theta} U(\alpha) \int_0^{\alpha} V(\beta) d\beta d\alpha \right), \quad \tau_{13} = B\omega_2 Z(\theta)$$

Постоянная  $C_1$  определяется из условия  $\tau_{13}(\theta_2) = 0$ :

$$C_1 = - \int_0^{\theta_2} U(\alpha) \int_0^{\alpha} V(\beta) d\beta d\alpha$$

Заметим, что  $Z(0) = 0$ , поскольку  $P_{-1/2+is}^1(1) = 0$ , и функция

$$U(\theta) \int_0^{\theta} V(\beta) d\beta$$

не имеет особенности при  $\theta = 0$ .

Постоянная  $B$  определяется из формулы (1.10), в которой следует положить  $\theta_1 = 0$ .

**2. Равномерный нагрев конусообразной трубы.** Пусть упругая трансверсально-изотропная конусообразная труба подвержена равномерному нагреву или охлаждению. Тело обладает сферической анизотропией, причем ось симметрии материала направлена по оси  $\theta$ .

В этом случае связь между напряжениями и деформациями описывается соотношениями

$$\begin{aligned} E_2 \varepsilon_{11} &= \sigma_{11} - \nu \sigma_{22} - kv' \sigma_{33} + E_2 \alpha_2 \Delta T \\ E_2 \varepsilon_{22} &= \sigma_{22} - \nu \sigma_{11} - kv' \sigma_{33} + E_2 \alpha_2 \Delta T \\ E_2 \varepsilon_{33} &= k \sigma_{33} - kv' (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + E_2 \alpha_3 \Delta T \\ E_2 \varepsilon_{13} &= \gamma \sigma_{13}, \quad k = E_2/E_3, \quad \gamma = E_2/G \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $E_3$  — модуль упругости по оси  $3$  ( $\theta$ );  $\alpha_2, \alpha_3$  — коэффициенты линейного расширения по осям  $2$  и  $3$ , а  $\Delta T$  — температура тела ( $\Delta T = \text{const}$ ).

Решение задачи ищется в автомоделном виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(y), \quad y = \text{ctg } \theta \quad (2.2)$$

Запишем уравнения равновесия в сферической системе координат при учете (2.2) [4] и уравнения совместности деформаций

$$\begin{aligned} -(1+y^2) \sigma_{13}' + 2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33} + y\sigma_{13} &= 0 \\ -(1+y^2) \sigma_{33}' + y(\sigma_{33} - \sigma_{22}) &= -3\sigma_{13} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$(1+y^2) \varepsilon_{11}' = -\varepsilon_{13}, \quad \varepsilon_{33} - \varepsilon_{11} = -(1+y^2) [(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11})/y]' \quad (2.4)$$

где штрих указывает на дифференцирование по аргументу  $y$ .

На боковых поверхностях трубы  $y = a_1 = \text{ctg } \theta_1$  и  $y = a_2 = \text{ctg } \theta_2$  имеем

$$\sigma_{33}(a_1) = \sigma_{33}(a_2) = 0, \quad \sigma_{13}(a_1) = \sigma_{13}(a_2) = 0 \quad (2.5)$$

Условие равенства нулю равнодействующей силы в сечениях  $R = \text{const}$  удовлетворяется автоматически при выполнении уравнений равновесий и граничных условий (2.5).

Сначала рассмотрим частный случай, когда  $kv' = \nu = 1/2$ .

Положив  $\sigma_{13} \equiv 0$ , имеем из первого уравнения (2.3)

$$2\sigma_{11} = \sigma_{22} + \sigma_{33} \text{ или } \varepsilon_{11} = \alpha_2 \Delta T \quad (2.6)$$

Первое уравнение (2.4) выполняется автоматически.

Подставляя второе соотношение (2.3) и (2.6) во второе уравнение (2.4), получим

$$\sigma_{33}'' - \frac{2+y^2}{y(1+y^2)} \sigma_{33}' - \frac{4}{3}(k-1) \frac{y^2}{(1+y^2)^2} \sigma_{33} = \frac{4}{3} \frac{y^2}{(1+y^2)^2} P \quad (2.7)$$

$$P = E_2 (\alpha_3 - \alpha_2) \Delta T$$

Уравнение (2.7) при учете условия  $\sigma_{33}(a_1) = 0$  представим в форме

$$\sigma_{33} = D [Q(y) - Q(a_1)] + \frac{4}{3} P [W(y) - W(a_1)] +$$

$$+ \frac{4}{3} (k-1) \int_{a_1}^y \xi^2 (1+\xi^2)^{-1/2} \int_{a_1}^{\xi} (1+t^2)^{-3/2} \sigma_{33} dt d\xi \quad (2.8)$$

$$2Q(y) = y \sqrt{1+y^2} - \ln(y + \sqrt{1+y^2}),$$

$$2W(y) = y^2 - \ln(1+y^2)$$

Постоянная  $D$  определяется из условия  $\sigma_{33}(a_2) = 0$ .

Уравнение (2.8) решается методом итераций, который применяется при решении уравнений типа Вольтерры:

$$F(y) = \int_{a_1}^y \xi^2 (1+\xi^2)^{-1/2} \int_{a_1}^{\xi} (1+t^2)^{-3/2} \sigma_{33}^{(n-1)} dt d\xi$$

$$\sigma_{33}^{(0)}(y) \equiv 0, \sigma_{33}^{(n)}(y) =$$

$$= D [Q(y) - Q(a_1)] + \Phi(y)$$

$$\Phi(y) = \frac{4}{3} P [W(y) -$$

$$- W(a_1)] + \frac{4}{3} (k-1) F(y),$$

$$D = -\Phi(a_2) [Q(a_2) - Q(a_1)]^{-1}$$

Индекс  $n$  означает номер приближенного решения.

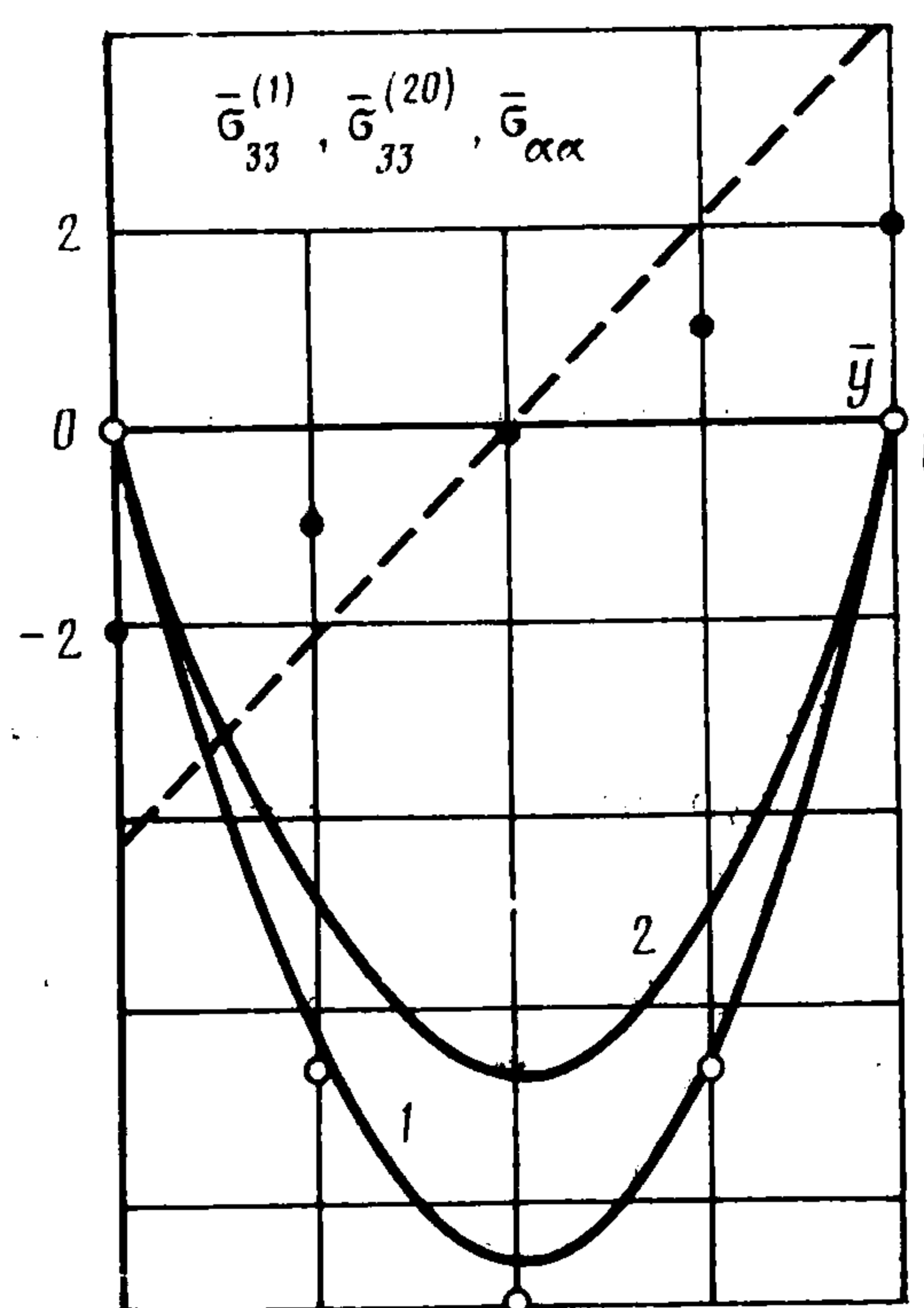
Напряжение  $\sigma_{22}$  определяется [из второй формулы (2.3), в которой следует положить

$$\sigma_{33}' = y^2 (1+y^2)^{-1/2} \left[ D + \frac{4}{3} P y (1+y^2)^{-1/2} + \frac{4}{3} (k-1) \int_{a_1}^y (1+\xi^2)^{-3/2} \sigma_{33} d\xi \right]$$

Функция  $\sigma_{11}$  определяется из соотношения (2.6).

Указанный метод итерации реализован на ЭВМ. Получены числовые значения для двадцати приближенных решений  $\sigma_{33}$ . Результаты показывают, что для тонкостенных труб ( $(a_1 - a_2)/a_2 \ll 1$ ),  $\sigma_{33}^{(1)}$  практически совпадает с  $\sigma_{33}^{(20)}$ . На фигуре приведены графики функций  $\bar{\sigma}_{33}^{(20)} = 5 \cdot 10^2 \sigma_{33}^{(20)}(y)/P$  (сплошная линия 1) и  $\bar{\sigma}_{33}^{(1)} = 5 \cdot 10^2 \sigma_{33}^{(1)}(y)/P$  (светлые точки) для толстой трубы при  $a_1 = 8,4$ ,  $a_2 = 6$ ,  $k = 4$ , причем  $\bar{y} = (y - a_1)/(a_2 - a_1)$ .

Показано также распределение напряжений  $\bar{\sigma}_{33} = 10^4 \sigma_{33}(y)/P$  (сплошная линия 2),  $\bar{\sigma}_{22} = 10^2 \sigma_{22}(y)/P$  (штриховая линия),  $\bar{\sigma}_{11} = 10^2 \sigma_{11}(y)/P$  (темные точки) при  $a_1 = 6,402$ ,  $a_2 = 6$ ,  $k = 4$ .



Исследуем случай, когда коэффициенты Пуассона произвольны, а труба обладает малой конусностью. Для такой трубы предполагается, что  $a_2^{-2} \ll 1$  и касательное напряжение  $\sigma_{13}$  мало по сравнению с другими напряжениями. Поэтому во втором уравнении (2.3) и первом уравнении (2.4) допустимо отбросить соответственно члены  $\sigma_{13}$  и  $\varepsilon_{13}$ . Кроме того, в уравнениях (2.3), (2.4) положим  $1 + y^2 \approx y^2$ . Имеем

$$\begin{aligned} -y^2\sigma_{13}' + 2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33} + y\sigma_{13} &= 0 \\ -y^2\sigma_{33}' + y(\sigma_{33} - \sigma_{22}) &= 0 \\ \varepsilon_{11}' = 0, \quad \varepsilon_{33} - \varepsilon_{11} &= -y^2 [(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11})/y]' \end{aligned} \quad (2.9)$$

Решение системы уравнений (2.1), (2.9) при условиях (2.5) будем называть асимптотическим.

Третье уравнение (2.9) запишем в виде ( $A$  — постоянная)

$$E_2\varepsilon_{11} = E_2\alpha_2\Delta T + A \quad \text{или} \quad \sigma_{11} - \nu\sigma_{22} - kv'\sigma_{33} = A \quad (2.10)$$

Интегрируя второе и четвертое уравнения (2.9) при учете (2.10) и первых двух граничных условий (2.5), получим

$$\sigma_{33} = \Pi(Cy^{\omega+1} + Dy^{1-\omega} - 1), \quad \sigma_{22} = \Pi(-\omega Cy^{\omega+1} + \omega Dy^{1-\omega} - 1) \quad (2.11)$$

$$\Pi = \frac{P + (\nu - kv')A}{(1 - \nu^2)(\omega^2 - 1)}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k - (kv')^2}{1 - \nu^2}}$$

$$D = \frac{a_2^{\omega+1} - a_1^{\omega+1}}{a_1 a_2} \left[ \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^\omega - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^\omega \right]^{-1}, \quad C = \frac{1 - Da_1^{1-\omega}}{a_1^{\omega+1}}$$

При выводе формул (2.11) предполагалось, что  $\omega \neq 1$ .

Функция  $\sigma_{13}$  определяется из первого уравнения (2.9)

$$\begin{aligned} \sigma_{13} = By - \frac{A}{y} - \Pi \frac{f(y)}{y}, \quad f(y) = \frac{\beta_- C}{\omega - 1} y^{\omega+1} - \frac{\beta_+ D}{\omega + 1} y^{1-\omega} + 1 - \nu - kv' \\ \beta_{\pm} = 1 - 2kv' \pm \omega(1 - 2\nu) \end{aligned}$$

Постоянные  $B$  и  $A$  определяются из двух последних условий (2.5).

В частности, при  $\nu = kv'$  имеем

$$\sigma_{13} = (1 - 2\nu)\sigma_{33}/y$$

Последняя формула показывает, что, действительно, можно пренебречь правыми частями второго уравнения (2.3) и первого уравнения (2.4), если  $a_2^{-2} \ll 1$ .

Полученные в работе решения задачи о температурном нагреве полого конуса показывают, что напряженное состояние конической оболочки линейно переменной толщины ( $(\theta_2 - \theta_1)/\theta_1 \ll 1$ ) очень слабо зависит от отношения  $k = E_2/E_3$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Григоренко Я. М., Василенко А. Г., Панкратова Н. Д. Статика анизотропных толстостенных оболочек. Киев: Вищ. школа, 1985. 190 с.
2. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
3. Панферов И. В. Осесимметричное деформирование упругой конусообразной трубы из трансверсально-изотропного материала при температурном нагружении // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика, 1988. № 5, С. 71—75.
4. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
5. Журина М. И., Кармазина Л. Н. Таблицы и формулы для сферических функций  $P_{-1/2+i\tau}^m(z)$ . М.: ВЦ АН СССР, 1962. 57 с.
6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Изд-во иностр. лит., 1950. 328 с.