($n = 0,\ 1$), причем для $n = 0$ $V(c, d) \equiv C_{1/2}^{(0)+}(-1,\ 1)$, а для $n = 1$ $V(c, d) \equiv$ $\equiv C_{1/2}^{(0)-}(-1, 1)$, где $C_{1/2}^{(0)-}$ — пространство нечетных функций, непрерывных с весом $(1 - x^2)^{1/2}$. Соответствующее пространство $W(c, d)$ определено в [3].

Здесь при $n = 0$ ($n = 1$) выполнены условия леммы 3.1 и имеет место оценка (4.4) (оценка (4.4) при замене $M_1\lambda^{-1} \ln \lambda$ на $M_2\lambda^{-1}$).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров В. М.* О решении одного класса парных уравнений // Докл. АН СССР. 1973. Т. 210. № 1. С. 55—58.
2. *Айзикович С. М.*, *Александров В. М.* О свойствах функций податливости соответствующих слоистому и непрерывно-неоднородному полупространству // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266. № 1. С. 40—43.
3. *Айзикович С. М.* Асимптотические решения контактных задач теории упругости для неоднородных по глубине сред // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. I. С. 148—158.
4. *Айзикович С. М.* Сдвиг штампом упругого неоднородного полупространства специального вида // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 5. С. 74—80.
5. *Айзикович С. М.*, *Александров В. М.* Асимптотические решения контактных задач теории упругости для полупространства и полуплоскости, неоднородных по глубине // Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1986. Т. 39. № 3. С. 13—28.
6. *Гурса Э.* Курс математического анализа. М.; Л.: Гостехиздат. 1933. Т. 2. Ч. 1. 271 с.; Т. 2. Ч. 2. 287 с.
7. *Канторович Л. В.*, *Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.
8. *Ворович И. И.*, *Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
9. *Левитан Б. М.*, *Саргсян И. С.* Введение в спектральную теорию: Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1970. 671 с.
10. *Александров В. М.* Об одном методе сведения парных интегральных уравнений и парных рядов — уравнений к бесконечным алгебраическим системам // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 2. С. 324—332.
11. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985. 350 с.
12. *Коддингтон Э. А.*, *Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 474 с.
13. *Тихонов А. Н.*, *Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
14. *Бабешко В. А.* Интегральные уравнения свертки первого рода на системе отрезков, возникающие в теории упругости и математической физики // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. I. С. 88—99.
15. *Толстов Г. П.* Ряды Фурье. М.: Физматгиз, 1960. 390 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
10.VII.1989

УДК 533.6.011.72

А. А. Бармин, М. В. Щелкачев

К АНАЛИЗУ УСТОЙЧИВОСТИ УДАРНЫХ ВОЛН

При исследовании устойчивости ударных волн в произвольных средах в [1] было получено дисперсионное уравнение, которое всегда содержит корень с $\operatorname{Im} \omega > 0$, что соответствует наличию экспоненциально растущего множителя. На этот факт указывалось в [2], однако объяснения этому не давалось. Дисперсионное уравнение работы [1] приводится в монографиях [3, 4] и статье [5] также без объяснения. Цель настоящей работы объяснить, почему наличие такого корня в рассматриваемой задаче не приводит к неустойчивости волны, т. е. он является посторонним в задаче об устойчивости.

В [1] решение для возмущений за ударной волной искалось в виде $f = \gamma \exp i(kx + ly - \omega t)$, где ось y направлена по нормали к волне, x — вдоль волны, $f = \{\delta s, \delta v_x\ \delta v_y \delta p\}$ — вектор-столбец для возмущенных величин, а волновые числа k, l и частота ω связаны соотношением

$$[(\omega - vl)^2 - c^2(k^2 + l^2)](\omega - vl)^2 = 0 \tag{1}$$

Здесь v, c — невозмущенные скорости газа и звука за волной.

При заданных ω и k (1) является характеристическим уравнением для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих изменение возмущений вдоль оси y. Его решение

$$vl_1 = \omega$$

$$vl_{2,3} = [-M^2\omega \pm \sqrt{M^2(\omega^2 + k^2v^2) - v^2k^2}]\,(1 - M^2)^{-1} \qquad (2)$$

определяет энтропийно вихревую волну (первое соотношение) и две звуковые волны (второе соотношение). Так как источник возмущений на бесконечности отсутствует, то решение краевой задачи ищется в виде суперпозиции уходящих от фронта волн $\| f_j \| = \| \gamma_{jm} \| \cdot \| C_m e^{i\lambda_m y} \|$ (в рассматриваемом случае $m = 1, 2$). Для определения C_m, $\| f_j \|$ подставляется в линейное однородное граничное условие на фронте при $y = 0$

$$\| B_{ij} \| \cdot \| \gamma_{jm} \| \cdot \| C_m \| \equiv \| A_{im} \| \cdot \| C_m \| = 0$$

Из требования наличия нетривиального решения получается дисперсионное соотношение $| A_{im} | = 0$, которое имеет вид [1]

$$2\omega \frac{v}{v_0}(k^2v^2 + \omega^2) = \left(\omega^2 \frac{v}{v_0} + k^2v^2\right)[\omega + l_2(\omega, k)]\left[1 + j^2\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_n\right] \qquad (3)$$

Здесь v_0 — скорость газа перед волной, j — поток массы через разрыв, V, p — удельный объем и давление за фронтом, индекс «H» означает дифференцирование вдоль адиабаты, $l_2(\omega, k)$ — корень из (2) со знаком «плюс» (уходящий). Устойчивости ударной волны соответствует $\mathrm{Im}\,\omega < 0$. Из (2) следует, что при $\omega = \pm ikv$, $l_2 = \omega/v$ и $\omega = \pm ikv$ — корень уравнения (3). Таким образом, дисперсионное соотношение имеет корень, соответствующий экспоненциально растущему возмущению.

Однако легко видеть, что $l_2 = \omega/v$ становится трехкратным корнем, соответствующим совпадению энтропийно-вихревого и уходящего звукового возмущения. В отличие от всегда кратного корня, энтропийно-вихревого возмущения, $l_2 = \omega/v$ имеет непростой элементарный делитель матрицы $\| \mathbf{P} \|$ уравнения $df/dy = f\mathbf{P}$. В этом случае решения $\{\gamma_{im} e^{i\lambda_m y}\}$ не являются линейно независимыми [6], т. е. не образуют фундаментальную систему решений. Отсюда следует, что матрица $\| A_{jm} \|$, задающая систему уравнений для определения C_m, вырождена, т. е. дисперсионное уравнение $| A_{im} | = 0$ выполняется автоматически.

В случае непростого элементарного делителя решение системы имеет вид $f = (\gamma_{j1}y + \gamma_{j2})\,e^{il_2y}$.

Можно показать, что определитель системы для γ_j, следующий из граничного условия на ударной волне, не равен нулю, т. е. существует только тривиальное решение $\gamma_{jm} = 0$ $(m = 1, 2)$. Поэтому значения $\omega = \pm ikv$, $l_2 = \omega/v = ik$ не дают растущих возмущений, хотя формально и являются решениями уравнения (3).

Таким образом, наличие у дисперсионного уравнения корней с $\mathrm{Im}\,\omega > 0$ может не приводить к неустойчивости, если соответствует кратному корню характеристического уравнения с непростым элементарным делителем соответствующей матрицы. Это важно иметь в виду при исследовании дисперсионных уравнений с помощью принципа аргумента.

При дальнейшем анализе устойчивости в [1] дисперсионное уравнение (3) было без объяснения сокращено на множитель $(\omega^2 + k^2v^2)$, соответствующий рассматриваемому корню. В [2] получено дисперсионное уравнение, не содержащее корней ω, соответствующих кратным корням уравнения (1), так как использовался другой способ, основанный на представлении решения с помощью преобразования Лапласа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дьяков С. П.* Об устойчивости ударных волн // ЖЭТФ. 1954. Т. 27. Вып. 3. С. 288—295.
2. *Erpenbeck J. J.* Stability of step shocks // Phys. Fluids. 1962. V. 5. N. 10. P. 1181—1187.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
4. *Горбацкий В. Г.* Космическая гидродинамика. М.: Наука, 1977. 360 с.
5. *Swan G. W., Fowles G. R.* Shock wave stability // Phys. Fluids. 1975. V. 18. N. 1. P. 28—35.
6. *Матвеев Н. М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высш. шк. 1967. 564 с.

Москва

Поступила в редакцию
14.II.1989