УДК 539.383

С. М. Айзикович

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА ПАРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается класс парных уравнений, являющийся обобщением класса, изученного ранее [I]. Такие уравнения возникают, в частности, при решении смешанных задач теории упругости для неоднородных тел [2—5]. Определяются уравнения, для которых приближенное решение, построенное на основе метода [I] путем сведения задачи к конечным алгебраическим системам, является двухсторонне асимптотически точным по характерному геометрическому параметру задачи. В качестве примера рассматриваются интегральные уравнения, порождаемые преобразованиями Фурье и Ганкеля.

I. Пусть дано интегральное преобразование

$$g(x) = \int_a^b G(\gamma) B(\gamma, x)\, d\gamma, \quad G(\gamma) = \int_\alpha^\beta g(\xi) M(\gamma, \xi)\, d\xi \tag{1.1}$$

либо разложение

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} G_k B(\gamma_k, x), \quad G_k = \int_\alpha^\beta g(\xi) M(\gamma_k, \xi)\, d\xi \tag{1.2}$$

и функция $B(\gamma, x)$ — решение линейного дифференциального уравнения второго порядка по x

$$(L - \gamma^2) B(\gamma, x) = 0, \quad L_\gamma B = r(x)[s(x) B']' + t(x) B \quad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{1.3}$$

Здесь $s(x) > 0$ при $x \in (a, b)$, $r(x)$ — знакоопределенная при $x \in (a, b)$ функция. Пусть также при $x \to b$ функции B и B' ограничены, а при $x = a$ имеем $\alpha_1 B + \alpha_2 B' = 0$. Кроме того, числа γ_k составляют счетное множество нулей некоторого трансцендентного уравнения, причем $a \leqslant \gamma_k < \gamma_{k+1} \leqslant b$.

Считаем, что уравнение (1.3) удовлетворяет условиям теоремы Фукса [6], т. е. коэффициент $p_i(x)$ при $d^{2-i}y/dx^{2-i}$ имеет вид $(x - \alpha)^{-i} P_i(x - \alpha)$, где функция $P_i(x - \alpha)$ голоморфна в области точки α (условие теоремы Фукса необходимо и достаточно для того, чтобы уравнение (1.3) имело два независимых интеграла, правильных в области точки α).

Рассмотрим парное интегральное уравнение (парный ряд-уравнение)

$$\begin{aligned} &\int_a^b Q(\gamma) \rho(\gamma) K(\gamma\lambda) B(\gamma, x)\, dh(\gamma) = f(x), \quad c \leqslant x \leqslant d \\ &\int_a^b Q(\gamma) B(\gamma, x)\, dh(\gamma) = 0, \quad \alpha \leqslant x < c, \; d < x \leqslant \beta \end{aligned} \tag{1.4}$$

где для (1.1), функция $h(\gamma) \equiv \gamma$, а для (1.2)

$$h(\gamma) \equiv \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [1 + \operatorname{sgn}(\gamma - \gamma_k)] \tag{1.5}$$

Здесь функция $\rho(\gamma)$ такова, что при $K(\lambda\gamma) = 1$ решение уравнения (1.4) известно. Пусть [2]

$$K(\gamma) = A + B\gamma + v(\gamma^2), \quad \gamma \to 0; \quad K(\gamma) = 1 + D\gamma^{-1} + v(\gamma^{-2}), \quad \gamma \to \infty \tag{1.6}$$

Определение 1.1. Функция $K(\gamma)$ принадлежит классу Π_N $(\Sigma_M, S_{N,M})$, если имеет вид

$$\prod\nolimits_N : K(\gamma\alpha) = K_N(\lambda\alpha) \equiv \prod_{i=1}^{N} \frac{\alpha^2 + A_i^2 \lambda^{-2}}{\alpha^2 + B_i^2 \lambda^{-2}} \tag{1.7}$$

$$\sum\nolimits_M : K(\lambda\alpha) = K_M^\Sigma(\lambda\alpha) \equiv \sum_{k=1}^{M} \frac{c_k \lambda^{-1} |\alpha|}{\alpha^2 + D_k^2 \lambda^{-2}} \tag{1.8}$$

$$S_{N,M} : K(\lambda\alpha) = K_N(\lambda\alpha) + K_M^\Sigma(\lambda\alpha) \tag{1.9}$$

Здесь A_i, B_i ($i = 1, 2, \ldots, N$), C_k, D_k ($k = 1, \ldots, M$) — некоторые постоянные.

Имеет место теорема 1.1 [3]: при условии, что функция $K(\gamma)$ обладает свойствами (1.6), она допускает аппроксимацию выражениями вида

$$K(\lambda\gamma) = K_N(\lambda\gamma) + K_\infty{}^\Sigma(\lambda\gamma) \tag{1.10}$$

В соответствии с (1.1)

$$Q(\gamma) = \int_c^d q(\xi)\, N(\gamma, \xi)\, d\xi, \quad N(\gamma, \xi) = M(\gamma, \xi) \text{ при } \rho(\gamma) = 1 \tag{1.11}$$

Подставляя (1.11) в (1.4), имеем

$$\int_a^l\int_c^d q(\xi)\,\rho(\gamma)\,K(\lambda\gamma)\,N(\gamma, \xi)\,B(\gamma, x)\,d\xi dh(\gamma) = f(x), \quad c \leqslant x \leqslant d \tag{1.12}$$

Ниже интегральный оператор, соответствующий функции $K(\gamma)$, принадлежащей классу X, будем также обозначать через X.

Используя (1.10), перепишем (1.12) в операторном виде

$$\Pi_N\, q + \Sigma_\infty q = f \tag{1.13}$$

В (1.13) оператор Π_N соответствует в (1.10) функции $K(\gamma)$ вида (1.7), а Σ_∞ — функции $K(\gamma)$ вида (1.8).

Определение 1.2. Будем говорить, что для уравнения (1.4) выполнено условие A, если для него при $K(\gamma) \in \Pi_N$ можно построить замкнутое решение, следуя [1]. Будем обозначать это решение

$$q = \Pi_N{}^{-1}f, \quad x \in (c, d) \tag{1.14}$$

Иными словами, условие A означает, что для функций $f(x)$, принадлежащих некоторому классу $W(c, d)$, существует функция $q(x)$, принадлежащая некоторому классу $V(c, d)$, такая, что имеет место равенство (1.14),

Из представления (1.14) следует, что

$$\| q \|_{V(c, d)} \leqslant m(\Pi_N)\, \| f \|_{W(c, d)}, \quad m(\Pi_N) = \text{const}$$

Ниже будем обозначать $m(X)$ некоторую постоянную, зависящую от конкретного вида принадлежащей X функции.

2. На основании теоремы Хана — Банаха [7] покажем, что при выполнении некоторых условий выражение (1.14) представляет собой асимптотически точное решение уравнения (1.13) при $\lambda \to 0$ и $\lambda \to \infty$.

Предварительно рассмотрим вопрос о существовании и единственности решения парного уравнения (1.4) для функции $K(\gamma)$ класса $S_{N, M}$; в этом случае его можно записать в виде

$$\Pi_N q + \Sigma_M q = f \tag{2.1}$$

Определим условия, при которых оператор $\Pi_N{}^{-1}\Sigma_M$ уравнения (1.4) является оператором сжатия [7], для этого используем следующие утверждения.

Лемма 2.1. Для билинейной формы вида

$$\alpha_{ia}(\xi, x) \equiv \int_a^b \frac{\gamma\rho(\gamma)\, M(\gamma, \xi)\, B(\gamma, x)}{\gamma^2 + a^2}\, dh(\gamma)$$

если $\gamma\rho(\gamma) = r^{-1}(\gamma)$, $M(\gamma, x) = B(\gamma, x)$, а a — вещественное число, имеет место представление

$$\alpha_{ia}(\xi, x) = \begin{cases} B_-(ia, \xi)\, B_+(ia, x), & \xi < x \\ B_+(ia, \xi)\, B_-(ia, x), & x < \xi \end{cases}$$

где $B_-(ia, x)$ и $B_+(ia, x)$ — линейно независимые решения уравнения (1.3), такие, что $B_-(ia, \xi) \to 0$, а $B_+(ia, \xi) \to \infty$ при $a \to \infty$.

Утверждение леммы 2.1 следует из леммы 28.1 работы [8], для этого достаточно в лемме 28.1 положить $\gamma_r = ia$.

Не нарушая общности, положим в (2.1) $M = 1$.

Лемма 2.2. Если для уравнения (1.4) выполнены условие A и условия леммы 2.1, то оператор $\Sigma_1 q$ в (2.1) можно представить в виде ряда [9] ($\Sigma_1 q$ соответствует $K_1^{\Sigma}(\lambda\gamma)$)

$$\Sigma_1 q = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k B(\gamma_k, x), \quad \beta_k(a) = \frac{c_r \lambda^{-1}}{\gamma_k^2 - a^2}\left[C(a)\int_c^d q(\xi) B(\gamma_k, \xi)\, d\xi - \right.$$

$$\left. - s(c)\, W_c^a(B_+, B)\, I_- + s(d)\, W_d^a(B_-, B)\, I_+ \right]$$

$$I_{\pm} = \int_c^d q(\xi) B_{\pm}(a, \xi)\, d\xi, \quad a = i\frac{D}{\lambda} \tag{2.2}$$

$$W_b^a(A, B) = A(a, b) B'(\gamma_k, b) - B(\gamma_k, b) A'(a, b)$$

Здесь $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n \ldots$ — совокупность всех собственных значений задачи (1.3) при соответствующих граничных условиях, $B(\gamma_k, x)$ — соответствующие нормированные собственные функции, $C(a)$ — некоторая фиксированная для каждого уравнения (1.3) ограниченная постоянная, связанная с определителем Вронского $W(B_+, B_-$ функций $B_+(a, x)$ и $B_-(a, x)$ соотношением

$$W[B_+(a, x), B_-(a, x)] = C(a)\, s^{-1}(x)$$

Для доказательства леммы 2.2 выпишем представление коэффициентов разложения β_k:

$$\beta_k(a) = \frac{c_r}{\lambda}\int_c^d q(\xi) A_k(a, \xi)\, d\xi, \quad A_k(\alpha, \xi) = \int_c^d \alpha_a(\xi, x)\frac{B(\gamma_k, x)}{r(x)}\, dx \tag{2.3}$$

Используя лемму (2.1) и известное свойство решений дифференциального уравнения второго порядка [10]

$$\int_c^d \frac{B(a, x) B(ib, x)}{r(x)}\, dx = \left[\frac{s(x)}{a^2 + b^2}(B'(a, x) B(ib, x) - B(a, x) B'(ib, x))\right]_c^d$$

где $B(a, x)$, $B(ib, x)$ — любые два решения уравнения (1.3), соответствующие $\gamma = a$ и $\gamma = ib$, второе выражение (2.3) можно переписать в виде

$$A_k(a, \xi) = \frac{1}{\gamma_k^2 - a^2}\begin{cases} s(x) B_-(a, \xi)\, [B_+(a, x) B'(\gamma_k, x) - B(\gamma_k, x) B_+'(a, x)]\,|_c^{\xi}, & \xi < x \\ s(x) B_+(a, \xi)\, [B_-(a, x) B'(\gamma_k, x) - B(\gamma_k, x) B_-'(a, x)]\,|_{\xi}^{d}, & x < \xi \end{cases}$$

откуда следует утверждение леммы 2.2.

3. Рассмотрим уравнение (1.3), положим $y(x) = B(x)\sqrt{s(x)}$. Относительно $y(x)$ получим уравнение

$$y'' - \gamma^2 q(x)\, y = 0; \quad q(x) = p(x) - R(x)\gamma^{-2} \tag{3.1}$$

$$p(x) = (rs)^{-1}, \quad R(x) = t(rs)^{-1} - s''(2s)' + {}^1/_4\,(s's^{-1})^2$$

Лемма 3.1. Оператор $\Pi_N^{-1}\Sigma_M$ уравнения (1.4) является оператором сжатия в пространстве $V(c, d)$ при выполнении условий леммы 2.2, в случае, если 1) функция $q''(x)$ непрерывна при $x \in (a, b)$, 2) $q(x) \geqslant 0$ при $x \in (a, b)$ для $0 < \lambda < \lambda^*$, где λ^* — некоторое фиксированное значение λ.

Для доказательства оценим по λ коэффициенты $\mathring{\beta}_k$ в (2.2). Используем обозначения

$$F_{\pm}(a, e) = B_{\mp}(a, \xi)\, W_e^a(B_{\pm}, B) \quad (e = c, d)$$

В соответствии с теоремой 2 из [11], с. 401, при выполнении условий 1 и 2 уравнение (3.1) имеет решение вида

$$y_{1,2}(x, \gamma) = q^{-1/4}(x)\, E_{\pm}(x_0, x)\, [1 + \gamma^{-1}\varepsilon_{1,2}(x, \gamma)],$$

$$E_{\pm}(x_0, x) = \exp\left\{\pm\gamma\int_{x_0}^{x}\sqrt{q(t)}\, dt\right\} \tag{3.2}$$

Для функций $\varepsilon_{1,2}$ справедливы оценки

$$|\varepsilon_j(x, \gamma)| \leqslant c, \quad x \in [a, b], \quad \gamma \geqslant \gamma_0 > 0, \quad j = 1, 2 \tag{3.3}$$

где постоянная c не зависит от x, γ.

Асимптотику (3.2) можно дифференцировать, т. е.

$$y_{1,2}'(x, \gamma) = \pm\gamma q^{1/4}(x) E_{\pm}(x_0, x)[1 + \gamma^{-1}\varepsilon_{1,2}(x, \gamma)] \tag{3.4}$$

где для функций $\varepsilon_{1,2}$ имеют место оценки вида (3.3). Используя (3.2), (3.4) и учитывая, что в (3.1) $\gamma = D_1\lambda^{-1}$, заключаем следующие: так как $c < \xi$, поведение функции $F_+(\gamma, c)$ определяет множитель вида $E_-(c, \xi)$ и найдется такое γ_0, что $F_+(\gamma, c) \to 0$ при $\gamma \geqslant \gamma_0 > 0$.

Аналогично предыдущему, так как $d > \xi$, благодаря множителю $E_-(\xi, d)$ найдется такое γ_0, что $F_-(\gamma, d) \to 0$ при $\gamma \geqslant \gamma_0 > 0$.

Таким образом, при $0 < \lambda < \lambda_1$ $(\lambda_1 = D_1\gamma_0^{-1})$, учитывая, что коэффициенты разложения (2.2) имеют вид (2.3), функции $B(\gamma_k, x)$ ортонормированы, получим оценку

$$\|\Sigma_1 q\|_{V(c,d)} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |a_k\| \leqslant \lambda M^*, \quad \lambda \to 0 \ (0 < \lambda < \lambda_1)$$

где постоянная M^* не зависит от λ. Отсюда следует, что λ можно выбирать таким образом, что оператор $\Pi_N^{-1}\Sigma_M$ будет оператором сжатия [7] при условиях данной леммы.

4. Исследуем, при каких условиях решение (1.14) является асимптотически точным решением уравнения (1.4) при $\lambda \to \infty$ $(\gamma \to 0)$. Для этого, следуя схеме, изложенной ранее, определим условия, при которых оператор $\Pi_N^{-1}\Sigma_M$ уравнения (1.4) будет оператором сжатия.

Всюду далее считаем, что решения уравнения (1.3) удовлетворяют условию симметрии:

$$B(\gamma, x) = B(x, \gamma) \tag{4.1}$$

В соответствии с условием (4.1) поведение $B(\gamma, x)$ при $\gamma \to 0$ определяется поведением соответствующего решения уравнения (1.3) при $x \to 0$.

Приведем уравнение (1.3) к самосопряженному виду, для этого домножим его на функцию $r^{-1}(x)$. Получим из (1.3)

$$L_\gamma B(\gamma, x) = [s(x) B']' - Q(x) B = 0, \quad s(x) > 0, \quad a \leqslant x \leqslant b \tag{4.2}$$

$$Q(x) = [t(x) - \gamma^2] r^{-1}(x)$$

Предположим, что коэффициенты $s(x)$ и $Q(x)$ уравнения (4.2) аналитичны в круге $|x| < R$. Тогда всякое решение $B(x)$ уравнения (4.2) аналитично в этом круге, т. е. разлагается в степенной ряд, сходящийся в круге $|x| < R$ [12].

Лемма 4.1. Оператор $\Pi_N^{-1}\Sigma_M$ уравнения (1.4) является оператором сжатия в пространстве $V(c, d)$, если коэффициенты $s(x)$ и $Q(x)$ уравнения (4.2) аналитичны в круге $|x| < R$ для $\lambda > \lambda^a$, где λ^a — некоторое фиксированное значение λ, и выполнено условие симметрии (4.1).

Для доказательства леммы оценим по λ коэффициенты β_k в (2.2). Из условия леммы и условия симметрии (4.1) следует, что найдется такое λ^a, что при $\lambda > \lambda^a$ решения $B_\pm(a, x)$ можно представить в виде ряда по степеням λ^{-1}, сходящегося в круге $|\lambda| > \lambda^a$. Отсюда следует, что

$$\|\Sigma_1 q\|_{V(c,\ d)} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} a_k < \frac{M^a}{\lambda}, \quad \lambda \to \infty \quad (\lambda > \lambda^a)$$

где постоянная M^a не зависит от λ.

Таким образом, λ можно выбирать так, что оператор $\Pi_N^{-1}\Sigma_M$ будет оператором сжатия [7] при условии данной леммы $(\lambda^a = M^a)$.

Отдельно рассмотрим случай, когда точка $x = 0$ для уравнения (4.2) является регулярной особой точкой, т. е.

$$s(x) = x\varphi(x), \quad \varphi(0) \neq 0 \tag{4.3}$$

где $\varphi(x) > 0$ — функция, непрерывная на $[a, b]$. Заметим, что функция $s(x)$ вида (4.3) удовлетворяет условиям теоремы Фукса.

Имеет место лемма ([13], с. 628).

Лемма 4.2. Пусть $B_+(x)$ и $B_-(x)$ — два линейно независимых решения уравнения (4.2), коэффициент которого $s(x)$ удовлетворяет условию (4.3). Тогда, если $B_+(0) \neq 0$, то $B_-(x)$ имеет при $x = 0$ логарифмическую особенность. Если $B_+(x)$ имеет при $x = 0$ нуль n-го порядка $(n > 0)$, то $B_-(x)$ имеет при $x = 0$ полюс n-го порядка.

Лемма 4.3. Пусть коэффициент $s(x)$ уравнения (4.2) имеет вид (4.3), причем выполнено условие (4.1), и, кроме того,

$$s(c)\, B(\gamma_k, c) = s(d)\, B(\gamma_k, d)$$

В этом случае оператор $\Pi_N^{-1}\Sigma_M$ уравнения (1.4) является оператором сжатия в пространстве $V(c, d)$ для $\lambda > \lambda^a$, где λ^a — некоторое фиксированное значение λ.

Оценим коэффициенты β_k в (2.2). Из леммы 4.2 и условия (4.1) следует существование такого λ^a, что при $\lambda > \lambda^a$, если $B_+(0) \neq 0$, то

$$\|\Sigma_1 q\|_{V(c,\ d)} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \leqslant \frac{M_1 \ln \lambda}{\lambda}, \quad \lambda \to \infty \ (\lambda > \lambda^a) \tag{4.4}$$

и если $B_+(x)$ имеет при $x = 0$ нуль n-го порядка, то в оценке (4.4) $M_1\lambda^{-1} \ln \lambda$ заменяется на $M_2\lambda^{-1}$.

На основании лемм 3.1, 4.1 и 4.3, применяя к уравнению

$$q + \Pi_N^{-1}\Sigma_M q = \Pi_N^{-1} f$$

принцип сжатых отображений, получаем доказательство существования и единственности решения уравнения (2.1) при наложенных ограничениях.

Таким образом, доказана

Теорема 4.1. Уравнение (1.4) однозначно разрешимо в пространстве $V(c, d)$ при $K(\gamma)$ класса $S_{N,\,M}$ при выполнении условий леммы 3.1, 4.1 или 4.3 и имеет место оценка

$$\|q(x)\|_{V(c,\,d)} \leqslant m(\Pi_N, \Sigma_M)\, \| f_{W(c,\,d)} \tag{4.5}$$

Более того, имеет место следующая

Теорема 4.2. Уравнение (1.4) однозначно разрешимо в пространстве $V(c, d)$ для $K(\gamma)$, обладающих свойствами (1.6) при $\gamma\rho(\gamma) = r^{-1}(\gamma)$, выполнении условия A и условий 1) и 2) леммы 3.1, если $0 < \lambda < \lambda^*$, а также для $\lambda > \lambda^a$ при выполнении условий леммы 4.1 или 4.3 (λ^*, λ^a — некоторые фиксированные значения λ), и имеет место оценка (4.5) при замене Σ_M на Σ_∞.

Теорема 4.2. следует из утверждений теорем 1.1 и 4.1 и доказывается при помощи известного в теории возмущений приема, основанного на методе последовательных приближений, так же как и в работе [14].

5. Примеры представлений вида (2.2).

1) $t(x) = 0$, $r(x) = s(x) = \text{const}$ в (1.3)

$$B(\alpha, \xi) = \cos \alpha\xi, \quad B_-(iD, \xi) = {}^1/_2\pi D^{-1} \exp(-D\xi)$$

$$B_+(iD, x) = \operatorname{ch} Dx$$

$$a_k\left(\frac{iD}{\lambda}\right) = \frac{4\pi c\lambda^{-1}}{(k\pi)^2 + D^2\lambda^{-2}} \left[\int_0^1 q(\xi) \left[\cos k\pi\xi - \exp\left(-\frac{D}{\lambda}\right) \cos k\pi \operatorname{ch} \frac{D}{\lambda}\xi\right] d\xi\right]$$

Здесь выполнены условия лемм 3.1 и 4.1. Пространство $V(c, d) \equiv C_{1/2}^{(0)+}(-1, 1)$, где $C_{1/2}^{(0)+}(-1, 1)$ — пространство четных функций, непрерывных с весом $(1 - x^2)^{1/2}$ с нормой [14]

$$\|f\|_{C_{1/2}^{(0)+}(-1,1)} = \max_{x \in [-1,1]} f(x)(1 - x^2)^{1/2}$$

$W(c, d)$ — пространство функций, имеющих на отрезке $[-1, 1]$ производные первого порядка, удовлетворяющие условию Гельдера с показателем $^1/_2 + \varepsilon$, с обычной нормой [14]

2) $r(x) = x^{-1}$, $s(x) = x$, $t(x) = -n^2x^{-2}$ в (1.3)

$$B(\alpha, \xi) = J_n(\alpha\xi), \quad B_-(iD, \xi) = K_n(D\xi), \quad B_+(iD, x) = I_n(Dx) \quad (n = 0, 1)$$

Здесь $J_n(x)$ — функция Бесселя, $I_n(x)$, $K_n(x)$ — модифицированные функции Бесселя. Имеем

$$a_k\left(\frac{iD}{c}\right) = \frac{2c\lambda^{-1}}{J_{n+1}^2(\mu_k)(\mu_k^2 + D^2\lambda^{-2})} \times$$

$$\times \left[\int_0^1 q(\rho)\rho \left[J_n(\mu_k\rho) - K_n\left(\frac{D}{\lambda}\right)\mu_k J_{1-n}(\mu_k) I_n\left(\frac{D}{\lambda}\rho\right)\right] d\rho\right]$$

($n = 0,\ 1$), причем для $n = 0$ $V(c, d) \equiv C_{1/2}^{(0)+}(-1,\ 1)$, а для $n = 1$ $V(c, d) \equiv$ $\equiv C_{1/2}^{(0)-}(-1,\ 1)$, где $C_{1/2}^{(0)-}$ — пространство нечетных функций, непрерывных с весом $(1 - x^2)^{1/2}$. Соответствующее пространство $W(c, d)$ определено в [3].

Здесь при $n = 0$ ($n = 1$) выполнены условия леммы 3.1 и имеет место оценка (4.4) (оценка (4.4) при замене $M_1\lambda^{-1} \ln \lambda$ на $M_2\lambda^{-1}$).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров В. М.* О решении одного класса парных уравнений // Докл. АН СССР. 1973. Т. 210. № 1. С. 55—58.
2. *Айзикович С. М., Александров В. М.* О свойствах функций податливости соответствующих слоистому и непрерывно-неоднородному полупространству // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266. № 1. С. 40—43.
3. *Айзикович С. М.* Асимптотические решения контактных задач теории упругости для неоднородных по глубине сред // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. I. С. 148—158.
4. *Айзикович С. М.* Сдвиг штампом упругого неоднородного полупространства специального вида // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 5. С. 74—80.
5. *Айзикович С. М., Александров В. М.* Асимптотические решения контактных задач теории упругости для полупространства и полуплоскости, неоднородных по глубине // Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1986. Т. 39. № 3. С. 13—28.
6. *Гурса Э.* Курс математического анализа. М.; Л.: Гостехиздат. 1933. Т. 2. Ч. 1. 271 с.; Т. 2. Ч. 2. 287 с.
7. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.
8. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
9. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Введение в спектральную теорию: Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1970. 671 с.
10. *Александров В. М.* Об одном методе сведения парных интегральных уравнений и парных рядов — уравнений к бесконечным алгебраическим системам // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 2. С. 324—332.
11. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985. 350 с.
12. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 474 с.
13. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
14. *Бабешко В. А.* Интегральные уравнения свертки первого рода на системе отрезков, возникающие в теории упругости и математической физики // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. I. С. 88—99.
15. *Толстов Г. П.* Ряды Фурье. М.: Физматгиз, 1960. 390 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
10.VII.1989

УДК 533.6.011.72

А. А. Бармин, М. В. Щелкачев

К АНАЛИЗУ УСТОЙЧИВОСТИ УДАРНЫХ ВОЛН

При исследовании устойчивости ударных волн в произвольных средах в [1] было получено дисперсионное уравнение, которое всегда содержит корень с $\mathrm{Im}\,\omega > 0$, что соответствует наличию экспоненциально растущего множителя. На этот факт указывалось в [2], однако объяснения этому не давалось. Дисперсионное уравнение работы [1] приводится в монографиях [3, 4] и статье [5] также без объяснения. Цель настоящей работы объяснить, почему наличие такого корня в рассматриваемой задаче не приводит к неустойчивости волны, т. е. он является посторонним в задаче об устойчивости.

В [1] решение для возмущений за ударной волной искалось в виде $f = \gamma \exp i(kx + ly - \omega t)$, где ось y направлена по нормали к волне, x — вдоль волны, $f = \{\delta s, \delta v_x \delta v_y \delta p\}$ — вектор-столбец для возмущенных величин, а волновые числа k, l и частота ω связаны соотношением

$$[(\omega - vl)^2 - c^2(k^2 + l^2)](\omega - vl)^2 = 0 \qquad (1)$$

Здесь v, c — невозмущенные скорости газа и звука за волной.