

Э. Н. Береславский

ЗАБОР ПРЕСНОЙ ОЧИЩЕННОЙ ВОДЫ ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ  
ИЗ ВОДОЕМА

В плоской постановке рассматривается фильтрационное течение пресных вод над солеными в общем случае, когда течение состоит из нескольких потоков различных направлений. Задача сводится к исследованию линейного дифференциального уравнения второго порядка класса Фукса с четырьмя регулярными особыми точками, при интегрировании которого, как известно [1, 2], возникают принципиальные математические трудности. Для построения интегралов и определения неизвестных постоянных, содержащихся в соответствующем уравнении Фукса, предлагается использовать способ, изложенный в работе автора [3], при этом решение задачи дается в замкнутой форме через элементарные функции. На базе полученного решения разработан алгоритм расчета размеров линзы и проанализировано влияние всех факторов, определяющих течение, на его фильтрационные характеристики. Кроме частного случая [4], когда линия тока, разделяющая дренируемый и испаряющийся потоки в линзе, приходит в нижнюю угловую точку линии раздела, изучены предельные случаи, связанные с «затвердеванием» соленых вод и отсутствием дрены [5—8].

**1. Постановка задачи.** На фиг. 1 схематично представлена правая половина поперечного сечения линзы пресных вод, сформировавшейся в однородном и изотропном грунте над покоящимися солеными водами при установившейся фильтрации из водоема или канала. Водоем моделируется горизонтальным отрезком длины  $2l$ , глубина воды в водоеме предполагается бесконечно малой. Пусть одна часть расхода, поступающего из водоема в грунт, испаряется со свободной поверхности линзы с постоянной интенсивностью  $\varepsilon$  (отнесенной к коэффициенту фильтрации грунта  $\kappa$ ), а другая часть полностью забирается горизонтальной дреной диаметра  $D$ , заложенной в плоскости симметрии водоема на глубине  $S$  под ним. Забор пресной очищенной воды в таких условиях представляет известный практический интерес.

Введем комплексный потенциал течения  $\omega = \varphi + i\psi$  и комплексную координату точек области движения  $z = x + iy$ , отнесенные соответственно к  $\kappa T$  и  $T$ , где  $T$  — глубина горизонтальной поверхности соленых вод вне линзы, отсчитываемая от плоскости  $y = 0$ . При первоначальном рассмотрении дрены заменим точечным стоком, расположенным в точке  $M$ .

Задача состоит в определении кривой депрессии  $CD$  и линии раздела  $BC$  при следующих краевых условиях:

$$\begin{aligned} AM : x = 0, \psi = 0; \quad MB : x = 0, \psi = Q_d \\ AD : y = 0, \varphi = 0, \quad BC : \varphi - \rho y = T(1 + \rho), \psi = Q_d \\ CD : \varphi + y = 0, \psi + \varepsilon x = Q_c/2 + \varepsilon l \\ (Q_d = Q_c/2 - Q_e, \quad Q_e = \varepsilon(L - l), \quad \rho = \rho_2/\rho_1 - 1 > \varepsilon) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $Q_c$  и  $Q_d$  — соответственно фильтрационные расходы из водоема (на единицу его длины) и дрены,  $Q_e$  — величина суммарного испарения со свободной поверхности линзы в пределах рассматриваемой области;  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — плотности пресных и соленых вод. Кроме размеров линзы (ширины  $2L$ , максимальной ее глубины  $H_1$  и глубины  $H$  в сечении плоскостью  $x = 0$ ), определению подлежат расходы  $Q_c$ ,  $Q_d$  и  $Q_e$ .

Для решения задачи вводится вспомогательная переменная  $\xi = \zeta + i\eta$  и функции:  $z(\xi)$ , конформно отображающая верхнюю полуплоскость  $\xi$  на область  $z$  (соответствие точек указано на фиг. 2, а), комплексная скорость  $w = d\omega/dz$ , а также функции

$$F(\xi) = d\omega/d\xi, \quad Z(\xi) = dz/d\xi \quad (1.2)$$

**2. Интегрирование уравнения класса Фукса с четырьмя особыми точками.** На фиг. 3 изображена область комплексной скорости, соответствующая краевым условиям (1.1) и представляющая собой круговой четырехугольник. Для этой области характерно наличие разреза, конфигурация которого зависит от положения нейтральной точки  $N$ , т. е. точки нулевой скорости на границе области движения. Круговой разрез  $BGC$  соответствует случаю, когда точка деления потоков находится на линии раздела.



Из системы (2.4), определитель которой отличен от нуля при указанных выше условиях на постоянные  $C_1$  и  $C_2$ , находятся искомые параметры в таком виде

$$g = 1 - \frac{C_2^2 v^2 - C_1^2}{C_2(3C_1 + 2C_2 + C_2 v^2)}, \quad \lambda = \frac{C_1(2 + gv - gv^2) + C_2(4 - 4g - 2gv^2)}{C_1} \quad (2.5)$$

Отметим, что если исходить из формулы Лиувилля [2]  $(v_2/v_1)' = C \exp(-\int p(\xi) d\xi)/v_1^2$ ,

где  $p(\xi)$  — коэффициент при  $v'$  в уравнении (2.1), и использовать (2.3), то снова придем к соотношениям (2.5). Если же рассматривать (2.4) как систему относительно  $C_1$  и  $C_2$  при заданных  $g$  и  $\lambda$ , то для того, чтобы однородная система имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю

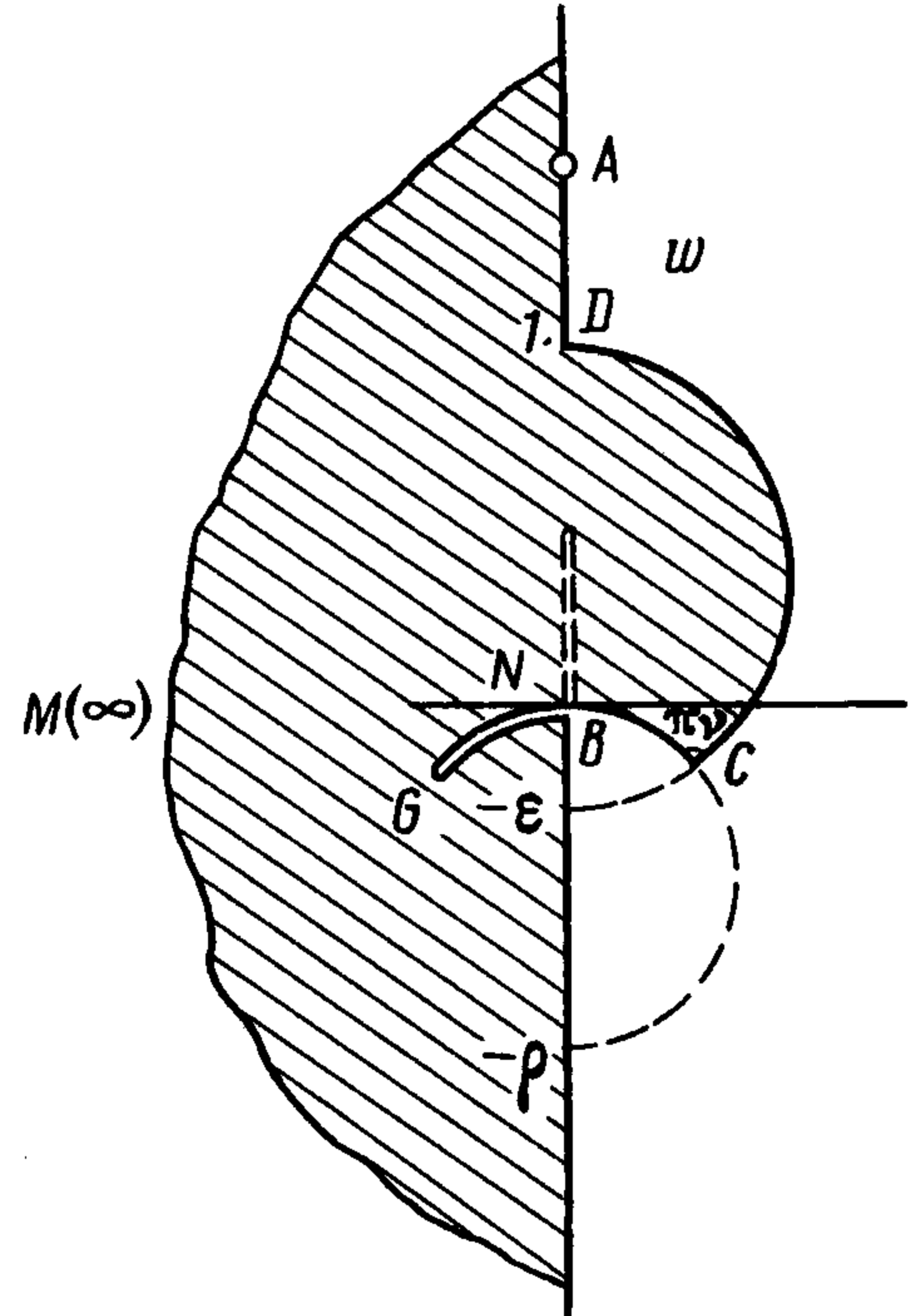
$$\lambda^2 - 2\lambda [g(3 + v - v^2) - 1] + g(1 - v)(2 + v)[gv(3 - v) + 2] = 0 \quad (2.6)$$

Любопытно, что (2.6) совпадает с известным условием П. Я. Полубариновой-Кочиной для точки  $G$ , являющейся вершиной разреза ([6], с. 225).

**3. Построение функций  $w$ ,  $F$  и  $Z$ .** Функция, дающая конформное отображение полуполосы плоскости  $t$  на заданный круговой четырехугольник плоскости  $w$ , должна выражаться через отношение линейных комбинаций решений  $v_1$  и  $v_2$ . Если составить такие комбинации и воспользоваться соответствием точек  $B$ ,  $C$  и  $D$  на плоскостях  $t$  и  $w$ , то получим

$$w = \frac{F}{Z} = \gamma \rho \frac{v_2}{v_1 + i\gamma v_2} \quad (3.1)$$

$$\gamma = \sqrt{\varepsilon/[(\rho + 1)(\rho - \varepsilon)]}, \quad v = 2\pi^{-1} \operatorname{arccotg} \sqrt{\varepsilon(\rho + 1)/(\rho - \varepsilon)}$$



Фиг. 3

Для определения функций  $F$  и  $Z$  используем метод П. Я. Полубариновой-Кочиной [1].

Учитывая соотношения (3.1) и (2.2), найдем

$$\begin{aligned} d\omega/dt &= C [(ch^2 t + A) sh vt + 1/2 v A sh 2t ch vt]/\Delta \\ dz/dt &= C (\gamma\rho)^{-1} [(ch^2 t + A)(ch vt + i\gamma sh vt) + 1/2 v A sh 2t \times \\ &\times (sh vt + i\gamma ch vt)]/\Delta, \quad \Delta = (m + sh^2 t) \sqrt{a + sh^2 t} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$C = C_1 > 0, \quad A = \frac{C_2}{C_1} = (1 - m) \left[ v \sqrt{m(1 - m)} \frac{\gamma + \delta}{1 - \gamma\delta} - 1 \right]$$

$$\delta = \operatorname{tg} v \operatorname{arcsin} \sqrt{m}.$$

Здесь  $A$  — постоянная, регламентирующая положение разреза в плоскости  $w$ . При  $A < -v^{-1}$ ,  $-1 < A < -1/2$  или  $v^{-1} < A$  имеем круговой разрез, при  $-3/(2 + v^2) < A < -1$  или  $-1/2 < A < 0$  — вертикальный, а при  $A = -1/2$  разрез исчезает и круговой четырехугольник вырождается в треугольник.

Можно проверить, что функции (1.2), определенные на основании соотношений (3.2) и (2.2), удовлетворяют граничным условиям (1.1), записанным в терминах упомянутых функций и, таким образом, являются параметрическим решением исходной краевой задачи.

**4. Расчет схемы течения.** Уравнения (3.2) служат решением задачи для точечного стока. Распространим теперь полученные результаты на случай трубчатой дрены малого, близкого к полукругу поперечного сечения. Для этого примем в качестве контура дрены линию равного напора, проходящую через верхнюю точку сечения дрены  $M_0$  с диаметром  $D$ , и обозначим через  $\mu$  ординату этой точки в плоскости  $t$ . В результате уравнения (3.2) содержат четыре неизвестных постоянных:  $C$ ,  $a$ ,  $m$  и  $\mu$ , для определения которых служат ширина водоема  $2l$ , диаметр дрены  $D$ , глубина ее заложения  $S$ , а также глубина  $T$  горизонтальной поверхности соленых вод вне линзы.

Уравнения (3.2), интегрируемые для различных участков границы области  $t$ , приводят к параметрическим уравнениям соответствующих участков схемы. Численным путем проверяется монотонность функций, входящих в эти уравнения, и таким

Таблица 1

$l$	$2L$	$H_1$	$Q_c$	$\delta \cdot 10^2$	$\rho$	$2L$	$H_1$	$Q_c$	$\delta \cdot 10^2$
0,3	4,49	1,87	0,59	42	0,15	6,67	2,62	2,59	39
0,6	5,80	2,09	1,28	36	0,18	6,51	2,42	2,61	37
0,9	6,07	2,01	2,23	33	0,22	6,34	2,21	2,63	35
1,2	6,02	1,77	3,60	29	$\infty$	4,79	1,00	2,73	21

Таблица 2

$\varepsilon \cdot 10^2$	$2L$	$H_1$	$Q_c$	$\delta \cdot 10^2$	$D \cdot 10^2$	$2L$	$H_1$	$Q_c$	$S \cdot 10^2$	$2L$	$H_1$	$Q_c$
9,5	6,20	1,93	2,63	31	5	6,33	2,02	2,89	8	6,84	2,17	5,49
10	6,06	1,92	2,62	32	10	6,23	1,98	2,82	20	6,64	2,11	3,68
15	5,13	1,90	2,59	37	30	5,90	1,87	2,51	35	6,23	1,98	2,81
25	4,23	1,87	2,54	44	40	5,73	1,82	2,43	50	5,73	1,82	2,44

образом устанавливается однозначная разрешимость системы относительно неизвестных постоянных.

После нахождения искомым параметров определению подлежат размеры линзы  $2L$ ,  $H_1$  и  $H$ , напор на дрене  $h_0$ , расходы  $Q_c$ ,  $Q_d$  и  $Q_e$ , а также рассчитываются координаты точек кривой депрессии и свободной поверхности. На фиг. 1 изображена линза, рассчитанная при  $T = 1$ ;  $l = 1,2$ ;  $D = 0,2$ ;  $S = 0,4$ ;  $\varepsilon = 0,1$  и  $\rho = 0,3$ .

**5. Частные и предельные случаи.** Отметим некоторые частные и предельные случаи, связанные с вырождением области комплексной скорости, а также с предельными значениями параметров отображения.

А. При  $A = -1/2$ , как указывалось выше, круговой четырехугольник вырождается в треугольник. В плоскости  $z$  этому значению  $A$  отвечает частный случай течения, когда линия тока, разделяющая дренируемый и испаряющийся потоки в линзе, приходит в точку  $B$ , т. е. когда точки  $B$  и  $N$  совпадают [4].

Б. При  $\rho = \infty$ , т. е.  $\rho_2 = \infty$ , имеем случай, который в рамках исследуемой фильтрационной схемы можно трактовать как «затвердевание» соленых вод. Полученные формулы приводят к решению задачи о притоке пресных вод к дрене, когда граница раздела отсутствует, но зато имеется водоупор на конечной глубине. Если, кроме того,  $l = \infty$ , то происходит полное затопление земной поверхности; этот случай впервые исследован в работе [12]. Интегрирование уравнений (3.2) при  $\varepsilon = 0$  дает

$$z = T (2\pi^{-1}t - i) \quad (5.1)$$

$$\omega = Q_d [1/2i + \pi^{-1} \operatorname{arth} (\sqrt{1 - m/\operatorname{ch} t})]$$

причем оказывается, что  $\mu = 1/2\pi T^{-1} (T - S - 1/2D)$ . Из (5.1) можно получить известную формулу ([13], с. 190), связывающую фильтрационный расход дрены  $Q_d$  с напором  $h_0$  по контуру дрены.

В. При отсутствии дрены, когда весь фильтрационный расход из водоема идет на испарение, область комплексной скорости также вырождается в треугольник. В этом случае решение задачи [5—7] можно получить из зависимостей (3.2) при  $m = 1$ ,  $A = 0$ . Если, кроме того,  $\rho = \infty$ , то имеем частный случай, рассмотренный в [14].

**6. Обсуждение численных результатов.** В табл. 1 и 2 приведены результаты расчетов фильтрационных характеристик по выяснению влияния параметров  $l$ ,  $D$ ,  $S$ ,  $\varepsilon$  и  $\rho$  на картину течения. В каждом разделе таблиц варьируется один из указанных параметров, а остальные фиксируются при значениях  $l = 1$ ;  $D = 0,2$ ;  $S = 0,4$ ;  $\varepsilon = 0,1$  и  $\rho = 0,3$ . В таблицах, кроме того, фигурирует величина  $\delta = H_1/(2L)$  [7], которая в определенной степени отражает форму линзы: при изменении  $\varepsilon$  эта величина характеризует степень вытянутости линзы, при фиксировании  $\varepsilon$  — степень ее сжатия. Результаты позволяют сделать некоторые заключения о влиянии физических параметров на форму и размеры линз, а также на характер зависимости фильтрационных расходов  $Q_c$  и  $Q_d$ .

Обращает на себя внимание качественное совпадение результатов при варьировании параметров  $l$  ( $l \geq 0,9$ ) и  $\rho$  в табл. 1 и параметров  $\varepsilon$ ,  $D$  и  $S$  в табл. 2. При одинаковых значениях  $\rho/\varepsilon$  величина  $\delta$  практически не изменяется, т. е. уменьшение парамет-

ров  $\varepsilon$  и  $\rho$  в одинаковое число раз влечет равномерное увеличение размеров линзы. Например, для  $\rho/\varepsilon = 3$  величина  $\delta = 0,32$ .

Из табл. 2 видно, что диаметр дрены и глубина ее заложения практически не оказывают влияния на размеры линзы, так как приводят к незначительным изменениям величин  $2L$  и  $H_1$  (в 1,1—1,2 раза), что в свою очередь весьма мало отражается на величине  $\delta$ . Наиболее существенное влияние на ширину линзы оказывают интенсивность испарения  $\varepsilon$ , а также ширина водоема. Так, из табл. 1 следует, что при уменьшении  $\varepsilon$  от 0,25 до 0,095 ширина линзы увеличивается на 47%, а при возрастании  $l$  от 0,3 до 0,9 — на 35%. Наибольшие изменения максимальной глубины линзы  $H_1$  наблюдаются при варьировании параметра  $\rho$ , с уменьшением которого, т. е. с ослаблением подпора со стороны соленых вод от 0,25 до 0,15, величина  $H_1$  возрастает более чем на 26%.

Из первого раздела табл. 1 можно заметить, что зависимость размеров линзы от ширины водоема немонотонна: величины  $2L$  и  $H_1$  принимают наибольшие значения 6,0697 и 2,0914 при значениях  $l$ , равных соответственно 0,9 и 0,7.

Расчеты показали, что для указанной комбинации физических параметров точка разделения потоков  $N$  попадает на линию раздела  $BC$  при следующих значениях физических параметров:  $l > 1$ ;  $\rho > 0,3$ ;  $0 < \varepsilon < 0,15$ ;  $D > 0,1$  и  $S > 0,3$ . Очевидно, что если точка  $N$  находится на отрезке  $BM$ , то  $H = H_1$ .

Анализ зависимости фильтрационных расходов  $Q_c$  и  $Q_d$  от определяющих параметров схемы сводится к следующему. Наиболее значительное влияние на эти величины оказывает ширина водоема. При увеличении  $l$  в 4 раза расходы  $Q_c$  и  $Q_d$  возрастают соответственно в 6,1 и 16 раз, при этом расход из водоема  $Q_c$  может превосходить расход дрены  $Q_d$  в 6 раз и более при малых значениях  $l$  ( $l < 0,5$ ). При таких же  $l$  и доля расхода, приходящаяся на испарение со свободной поверхности линзы, может также превышать расход воды, поглощаемой дренажем. Так, в случае  $l = 0,3$  получено  $Q_e = 0,194$  и  $Q_d = 0,101$  и, следовательно,  $Q_e \approx 2Q_d$ . С дальнейшим увеличением ширины водоема на фоне незначительного изменения величины  $Q_e$  происходит существенный рост расхода дрены. При  $l = 1,2$  имеем  $Q_e = 0,181$  и  $Q_d = 1,62$ , т. е. теперь  $Q_d \approx 9Q_e$ .

Отметим, что для приводимых значений параметров  $\rho$ ,  $\varepsilon$ ,  $D$  и  $S$  табл. 1 и 2 выполняется приближенное равенство  $Q_c \approx 2,4 Q_d$ .

Автор благодарит В. М. Ентова за полезные советы и замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
2. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 436 с.
3. Береславский Э. Н. Об интегрировании в замкнутой форме одного класса фуксовых уравнений и его приложения // Дифференц. ур-ния. 1989. Т. 25. Вып. 6. С. 1048—1050.
4. Васильев В. А., Теплицкий И. С. Фильтрация пресной воды из канала с малой глубиной на соленые воды // Тр. Ташк. ун-та. 1961. Вып. 189. С. 131—138.
5. Эмих В. Н. Фильтрация с полосы при наличии соленых подпорных вод // ПМТФ. 1962. № 2. С. 145—149.
6. Эмих В. Н. К задаче о линзе пресных вод при фильтрации из канала // Тр. Ташк. ун-та. 1964. Вып. 265. С. 32—38.
7. Эмих В. Н. О форме линзы пресных вод при фильтрации из канала // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 2, С. 115—119.
8. Капранов Ю. И. О форме линзы пресных вод при линейном законе испарения // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 3. С. 497—504.
9. Чибрикова Л. И. О применении краевой задачи Римана при построении интегральных представлений некоторых решений уравнений класса Фукса // Теория функций комплексного переменного и краевые задачи. Чебоксары: Чуваш. ун-т, 1983. С. 160—172.
10. Чибрикова Л. И. Применение кусочно-голоморфных функций при построении интегральных представлений некоторых спецфункций // Докл. расширенных засед. семинара ин-та прикл. математики им. И. Н. Векуа. Тбилиси. 1985. Т. 1. С. 217—220.
11. Цицкишвили А. Р. О конформном отображении полуплоскости на круговые четырехугольники // Докл. АН СССР. 1977. Т. 233. № 4. С. 563—566.
12. Ведерников В. В. Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа. М.: Госстройиздат, 1939. 247 с.
13. Аравин В. И., Нумеров С. Н. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. М.: Гостехиздат, 1953. 616 с.
14. Береславский Э. Н., Панасенко Л. А. Об определении размеров зоны насыщения при фильтрации из канала с малой глубиной воды // ПМТФ. 1981. № 5. С. 92—94.

Ленинград

Поступила в редакцию  
6.VII.1989