УДК 531.36 : 62—50

Б. Н. Соколов

О МИНИМАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ВЕКТОРА УПРАВЛЕНИЯ В ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ СТАБИЛИЗАЦИИ

Предлагается математическая формализация задачи оценки количества двигателей, необходимых для стабилизации упругой механической системы, функционирующей в условиях невесомости, в заданном положении. Приводятся условия, позволяющие описать класс матриц управления, доставляющих динамической системе свойство полной управляемости [1]. Анализ условий полной управляемости для механических систем в окрестности положения равновесия дан в [2].

Рассматривается линейная автономная динамическая система

$$x^{\cdot} = Fx + Gu, \quad x \in R^n, \quad u \in R^m \tag{1}$$

F и G — постоянные матрицы, x — вектор состояния, u — вектор управления. Известно [1,2], что если выполнено условие полной управляемости

$$\operatorname{rank} \| G, \quad FG, \quad F^2G, \ldots, F^{n-1}G \| = n \tag{2}$$

то существует управление $u(t)$, переводящее систему (1) из произвольного начального положения x_0 в начало координат. Если условие (2) не выполнено, то такого управления, вообще говоря, не существует. Требуется определить минимальное количество управляющих скалярных функций u_i, т. е. минимальную размерность вектора управления, при которой подбором матрицы управлений G можно добиться выполнения условия полной управляемости.

Ответ на поставленный вопрос дает

Теорема: Пусть k_i — количество линейно независимых собственных векторов, соответствующих i-му собственному значению матрицы F, и $k = \max_i k_i$. Тогда k — минимальная размерность вектора управления $u(t)$, при которой еще можно подбором матрицы G добиться выполнения условия полной управляемости (2).

Следуя [3], введем ряд понятий и утверждений. Назовем вектор g корневым вектором, соответствующим собственному значению λ_i, если при некотором целом $h > 0$

$$(F - \lambda_i E)^h g = 0 \tag{3}$$

Высотой j корневого вектора g назовем наименьшее h, при котором выполнено условие (3), т. е. $(F - \lambda_i E)^{j-1} g \neq 0$ и $(F - \lambda_i E)^j g = 0$. Нулевой вектор имеет высоту нуль по определению. Множество корневых векторов, соответствующих некоторому собственному числу λ_i, образует корневое подпространство P_i, инвариантное относительно преобразования $F - \lambda_i E$, и следовательно, инвариантное относительно оператора F. Корневое подпространство P_i в свою очередь разбивается на k_i циклических подпространств (k_i — количество линейно независимых собственных векторов, соответствующих i-му собственному значению), инвариантных относительно оператора F. Эти подпространства $\Pi_\mu{}^i$, $\mu = 1, 2, \ldots k_i$, натянуты на векторы $g_{\mu\nu}{}^i$, удовлетворяющие условию

$$g^i_{\mu\nu+1} = (F - \lambda_i E)\, g_{\mu\nu}{}^i, \ \nu = 1, 2, \ldots, q_\mu - 1, \ (F - \lambda_i E)\, g^i_{\mu q_\mu} = 0$$

где q_μ — высота вектора, порождающего $\Pi_\mu{}^i$. Совокупность векторов $g_{\mu\nu}{}^i$, $\nu = 1, 2, \ldots, q_\mu$ составляет μ-ю башню в подпространстве P_i и линейно независима, q_μ — высота μ-й башни. Максимальная высота q башен в P_i равна кратности λ_i как корня минимального аннулирующего матрицу F полинома. Сумма высот башен равна кратности λ_i как корня характеристического полинома. Векторы $g_{\mu\nu}{}^i$, $\mu = 1, 2, \ldots, k_i$, $\nu = 1, 2, \ldots, q_\mu$, линейно независимы и составляют канонический базис в P_i. Оператор F в этом базисе имеет каноническую жорданову форму.

Известна теорема [3]: пусть Q_r — циклическое подпространство для оператора F, порожденное вектором G^r; тогда Q_r — прямая сумма циклических подпространств, порожденных проекциями вектора G^r на корневые подпространства, а размерность циклического подпространства равна сумме высот проекций порождающего вектора на корневые подпространства.

Поэтому условие полной управляемости (2) можно сформулировать в следующем виде. Пусть G^r — r-й столбец матрицы управлений G (1). Для того чтобы динамическая система (1) была вполне управляема, необходимо и достаточно, чтобы геометрическая сумма циклических подпространств, порожденных проекциями векторов G^r, $r = 1, 2, \ldots, m$, на каждое корневое подпространство, совпала с этим подпространством.

Докажем теорему о минимальной размерности вектора управлений. Согласно приведенной теореме [3], достаточно рассмотреть циклические подпространства, порожденные проекциями векторов G^r, $r = 1, \ldots, m$, на произвольное корневое подпространство P_i.

Обозначим проекцию вектора G^r на корневое подпространство P_i через G_i^r и выясним условия, при которых геометрическая сумма циклических подпространств, порожденных векторами G_i^r, $r = 1, \ldots, m$, может совпадать с P_i.

Покажем, что если размерность вектора управлений $m \geqslant k = \max_i k_i$, то всегда можно подобрать матрицу G, обеспечивающую выполнение условия полной управляемости. В рассматриваемом корневом подпространстве возьмем набор из k_i векторов $g_{r1}{}^i$, $r = 1, 2, \ldots, k_i$, где каждый вектор $g_{r1}{}^i$ порождает соответствующую ему башню, и положим $G_i{}^r = g_{r1}{}^i$, $r = 1, 2, \ldots, k_i$, $G_i{}^r = 0$, $r > k_i$. Тогда геометрическая сумма циклических подпространств, порожденных векторами $G_i{}^r$, $r = 1, 2, \ldots, m$, в силу их выбора совпадает с корневым подпространством P_i. Из соотношения $(F - \lambda_i E)^h g_{r1} = 0$, $r = 1, 2, \ldots, k_i$, следует $(F - \bar{\lambda}_i E)^h \bar{g}_{r1} = 0$. Поэтому если вектор g_{r1} порождает r-ю башню в корневом подпространстве, то и комплексно-сопряженный вектор $\bar{g}_{r1}$ порождает башню в некотором корневом подпространстве. Следовательно, столбцы G^r, $r = 1, 2, \ldots, m$, матрицы управлений G, получившиеся в результате суммирования соответствующих проекций $G_i{}^r$ по всем корневым подпространствам P_i, будут действительны, что и требовалось.

Покажем теперь, что если для некоторого корневого подпространства P_i выполнено условие $m < k_i = k$, то геометрическая сумма циклических подпространств, порожденных векторами $G_i{}^r$, $r = 1, 2, \ldots, m$, не совпадает с корневым подпространством при любом выборе G.

Для доказательства в корневом подпространстве P_i рассмотрим последовательность столбцов $\mathbf{g}_s$, $s = 1, 2, \ldots, q$, где q — максимальная высота башен, входящих в рассматриваемое корневое подпространство. Столбец $\mathbf{g}_1 = \mathrm{col}\,(g_{11}, g_{21}, \ldots, g_{k1})$ составляют линейно независимые векторы $g_{\mu 1}$, $\mu = 1, 2, \ldots, k$, где каждый вектор $g_{\mu 1}$ порождает соответствующую ему башню в циклическом корневом пространстве, а совокупность входящих в башни векторов составляет базис в P_i. Будем считать, что запись $(F - \lambda_i E)\,\mathbf{g}_s$ означает столбец векторов: $(F - \lambda_i E)\,\mathbf{g}_s = \mathrm{col}\,((F - \lambda_i E)\, g_{1s}, (F - \lambda_i E)\, g_{2s}, \ldots, (F - \lambda_i E)\, g_{ks})$. Определим последовательность столбцов $\mathbf{g}_s$ соотношением

$$\mathbf{g}_{s+1} = (F - \lambda_i E)\,\mathbf{g}_s, \quad s = 1, 2, \ldots, q-1, \quad \mathbf{g}_{q+1} = (F - \lambda_i E)\,\mathbf{g}_q = 0 \tag{4}$$

Таким образом, получим совокупность векторов $g_{\mu s}$, $\mu = 1, 2, \ldots, k$. Эти векторы бразуют полную в корневом пространстве систему векторов, среди которых могут быть нулевые. Обозначим через G_0 столбец из m векторов, где r-й составляющий G_0 вектор — проекция $G_i{}^r$, $r = 1, 2, \ldots, m$, вектора G^r на подпространство P_i. Столбец векторов $\mathrm{G}_0 = \mathrm{col}\,(G_i{}^1, G_i{}^2, \ldots, G_i{}^m)$ может быть разложен в сумму по компонентам столбцов $\mathbf{g}_s$ в силу полноты векторов $g_{\mu s}$ в пространстве P_i:

$$\mathrm{G}_0 = \sum_{s=1}^{g} A_s{}^i \mathbf{g}_s \tag{5}$$

где $A_s{}^i$ — $(m \times k)$ — матрицы. Применим к каждому столбцу, составляющему правую и левую части равенства (5), оператор $F - \lambda_i E$. Получим в силу соотношения (4) и определения операции $(F - \lambda_i E)\,\mathbf{g}_s$

$$(F - \lambda_i E)\,\mathrm{G}_0 = \sum_{s=1}^{g-1} A_s{}^i \mathbf{g}_{s+1} \tag{6}$$

$$(F - \lambda_i E)^2 \mathrm{G}_0 = \sum_{s=1}^{g-2} A_s{}^i \mathbf{g}_{s+2}, \quad \ldots, \quad (F - \lambda_i E)^{g-1} \mathrm{G}_0 = A_1{}^i \mathbf{g}_g$$

Покажем, что при $m < k$, пространство, натянутое на совокупность векторов, составляющих столбцы

$$\mathrm{G}_0, \ (F - \lambda_i E)\,\mathrm{G}_0, \ldots, (F - \lambda_i E)^{n-1} \mathrm{G}_0 \tag{7}$$

не совпадает с корневым. Обозначим через L подпространство, натянутое на векторы, составляющие столбец $\mathbf{g}_1$. Его размерность будет k.

Тогда размерность подпространства L_1, натянутого на векторы $A_1{}^i\mathbf{g}_1$, не превосходит $m < k$, $L_1 \subset L$. Выберем в L вектор ξ, ортогональный L_1. Тогда, очевидно, вектор ξ не будет представим в виде линейной комбинации векторов из последовательности (7), так как он не является линейной комбинацией векторов, входящих в столбец G_0, по построению, а все остальные члены последовательности согласно (6) содержат только векторы, не принадлежащие L. Проекция на P_i пространства, натянутого на векторы-столбцы матрицы (2), совпадает с пространством, натянутым на совокупность векторов (7). А последнее пространство меньше корневого. Поэтому условие полной управляемости (2) не может быть выполнено.

Из вышеизложенного следует, что необходимым и достаточным условием полной управляемости системы (1) служит выполнение для всех корневых подпространств P_i условия

$$\operatorname{rank} A_1{}^i = k_i \tag{8}$$

где матрица $A_1{}^i$ определена формулой (5), k_i — число линейно независимых собственных векторов, соответствующих собственному значению λ_i.

Неравенство $\operatorname{rank} A_1{}^i < k_i$, как было показано выше, ведет к нарушению условия полной управляемости. Пусть для всех корневых подпространств условие (8) выполнено. Покажем, что пространство, натянутое на совокупность векторов (7), совпадает с корневым пространством P_i. Обозначим подпространство, натянутое на совокупность векторов $(F-\lambda_i E)^j \mathbf{G}_0$, $(F-\lambda_i E)^{j+1}\mathbf{G}_0, \ldots, (F-\lambda_i E)^{q-1}\mathbf{G}_0$ (6), через V_j, а подпространство, натянутое на совокупность векторов $\mathbf{g}_{j+1}, \mathbf{g}_{j+2}, \ldots, \mathbf{g}_q$ (4) через W_j. Докажем обратной индукцией по j, что W_j и V_j совпадают при $0 \leqslant j \leqslant q-1$, если выполнено условие (8). При $j = q-1$ совпадение подпространств очевидно в силу свойства матрицы $A_1{}^i$ (8) и формулы (6). Предположим, что при $q-1 > j \geqslant 1$ подпространства V_j и W_j совпадают, докажем совпадение V_{j-1} с W_{j-1}. Известно [3], что W_{j-1} — прямая сумма подпространства W_j и подпространства, натянутого на векторы столбца $\mathbf{g}_j$, следовательно, натянутого на векторы столбца $A_1{}^i\mathbf{g}_j$. Согласно формуле (6)

$$(F-\lambda_i E)^{j-1}\mathbf{G}_0 = A_1{}^i\mathbf{g}_j + \xi_j$$

где ξ_j — столбец из принадлежащих W_j векторов. Отсюда и из индукционного предположения заключаем, что пространство V_{j-1} — прямая сумма подпространства, натянутого на векторы столбца $A_1{}^i\mathbf{g}_j$, и подпространства W_j. Следовательно, V_{j-1} также совпадает с W_{j-1}. Окончательно имеем: V_0 совпадает с W_0. Другими словами, геометрическая сумма циклических подпространств, порожденных проекциями векторов $\mathbf{G}^r$, $r = 1, 2, \ldots, m$, на корневое подпространство, совпадает с этим подпространством. Это доказывает выполнение условия полной управляемости (2).

Пример. Рассмотрим механическую систему, состоящую из двух одинаковых маятников, подвешенных соответственно к одинаковым тележкам, и двигателя, природа которого безразлична. Тележки могут перемещаться по горизонтальной направляющей. Момент на валу двигателя передается при помощи системы передач с произвольными постоянными линейными характеристиками на колеса тележек и непосредственно на маятники. Из доказанного следует, что нельзя спроектировать такую систему передач, которая могла бы обеспечить гашение двигателем произвольных колебаний обоих маятников. Здесь важно, что матрица управлений от времени не зависит, в противном случае одним двигателем можно было бы вначале погасить колебания одного маятника, а затем — другого.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
2. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
3. *Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1960. 656 с.

Москва

Поступила в редакцию
6.VI.1989