ЛИТЕРАТУРА

1. *Пэнлеве П.* Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.
2. *Rubin H., Ungar P.* Motion under a strong constraining force // Communs. Pure and Appl. Math. 1957. V. 10. № 1. P. 65—87.
3. *Takens F.* Motion under influence of a strong constraining force // Global theory Dynamic Systems. B.: Springer-Verlag. 1980. P. 425—445.
4. *Kampen N. G. van.* Elimination of fast variables // Phys. Repts. 1985. V. 124. № 2. P. 69—160.
5. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A.* Realization of holonomic constraints and freezing of high frequency degrees of freedom in the light of classical perturbation theory // Communs. Math. Phys. 1987. V. 113. № 1. P. 87—103.

Москва

Поступила в редакцию 25.IX.1989

УДК 531.36

В. А. Атанасов

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗИРУЕМОСТИ ПОЛОЖЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ СПУТНИКА-ГИРОСТАТА

На основании теоремы, доказанной в [1], исследуется возможность асимптотической стабилизации равновесных ориентаций спутника-гиростата при помощи управляющих моментов, приложенных к роторам.

Асимптотическая стабилизируемость стационарных движений механических систем с циклическими координатами рассматривалась также в [2], причем сформулированное достаточное условие стабилизируемости, как и аналогичное условие из [1], следует из классической теоремы о достаточных условиях стабилизации [3]. Но в теореме из [1] благодаря учету специфики систем с циклическими координатами указанное условие приводит к исследованию ранга матрицы меньшего размера. С этой точки зрения теорема из [1] более удобна при исследовании стабилизируемости стационарных движений конкретных механических систем.

Будем предполагать, что центр масс спутника описывает круговую орбиту в ньютоновском поле сил. Рассматриваем ограниченную постановку задачи.

Следуя [4], выбираем инерциальную координатную систему $O_1\xi_i$, начало которой совпадает с притягивающим центром. Введем еще системы: Ox_i, оси которой совпадают с главными центральными осями инерции, с началом в центре масс и орбитальная координатная система OX_i, ось X_1 которой направлена по касательной к орбите в сторону движения, ось X_3 — по радиус-вектору O_1O и ось X_2, дополняющая X_1 и X_3 до правого триедра. Ориентацию спутника в орбитальной системе будем определять самолетными углами α, β, γ;

$$\alpha_i = \cos(X_1, x_i),\ \beta_i = \cos(X_2, x_i),\ \gamma_i = \cos(X_3, x_i)$$

— косинусы углов между осями OX_i и Ox_i.

Будем предполагать, что гиростат имеет три ротора, оси которых направлены по главным осям инерции, φ_i — угол поворота i-го ротора. Имеем

$$\omega = \Omega q^{\cdot} + \Omega\omega_0^*$$

$$\omega = \begin{Vmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Vmatrix},\quad q = \begin{Vmatrix} \beta \\ \gamma \\ \alpha \end{Vmatrix},\quad \Omega = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & \beta_1 \\ \sin\gamma & 0 & \beta_2 \\ \cos\gamma & 0 & \beta_3 \end{Vmatrix},\quad \omega_0^* = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_0 \end{Vmatrix}$$

Здесь ω — абсолютная угловая скорость в системе Ox_i, q — столбец обобщенных координат, ω_0 — орбитальная угловая скорость.

Кинетическую энергию системы представим в виде

$$T = T_2 + T_1 + T_0,\ T_2 = {}^1/_2 q^{\cdot T}\Omega^T I\Omega q^{\cdot} + \varphi^{\cdot} J\Omega q^{\cdot} + {}^1/_2\varphi^{\cdot} J\varphi^{\cdot}$$

$$T_1 = \omega_0^{*T}\Omega^T I\Omega q^{\cdot} + \omega_0^{*T}\Omega^T I\varphi^{\cdot},\ T_0 = {}^1/_2\omega_0^{*T}\Omega^T I\Omega\omega_0^*$$

$$I = \mathrm{diag}\,(A_1, A_2, A_3),\ J = \mathrm{diag}\,(J_1, J_2, J_3),\ \varphi^{\cdot} = [\varphi_1^{\cdot}, \varphi_2^{\cdot}, \varphi_3^{\cdot}]^T$$

где A_i — i-й главный центральный момент инерции гиростата, J_i — осевой момент инерции i-го ротора.

Потенциальная энергия задается выражением

$$\pi = \frac{3}{2}\omega_0^2 \sum_{i=1}^{3} A_i \gamma_i^2 + \text{const}$$

Видно, что координаты φ_i циклические. Переходя к переменным Рауса, для компонентов функции Рауса $R = R_2 + R_1 - W$ получаем

$$R_2 = {}^1/_2 q^{\cdot T} \Omega^T B \Omega q^{\cdot}, \; B = \text{diag}\,(B_1, B_2, B_3), \; B_i = A_i - J_i$$

$$R_1 = g^T q^{\cdot}, \; g = [g_1, g_2, g_3]^T = \Omega^T p + \Omega^T B \Omega \omega_0^*$$

$$W = \pi - p^T \Omega \omega_0^* - {}^1/_2 \omega_0^* \Omega^T B \Omega \omega_0^* + {}^1/_2 p^T \text{diag}\,(J_i^{-1})\, p$$

Здесь $p = [p_1, p_2, p_3]^T$, p_j ($j = 1, 2, 3$) — циклические импульсы.

Положения относительного равновесия гиростата $q^0 = [\beta_0, \gamma_0, \alpha_0]^T$, $p = p^0$, $p_j = \text{const}$ ($j = 1, 2, 3$) являются стационарными движениями системы и определяются уравнениями

$$\left.\frac{\partial W}{\partial \beta}\right|_0 = 3\omega_0^2 \sum_{i=1}^{3} A_i \gamma_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial \beta} - \omega_0^2 \sum_{i=1}^{3} B_i \beta_i \frac{\partial \beta_i}{\partial \beta} - \omega_0 \sum_{i=1}^{3} p_i \frac{\partial \beta_i}{\partial \beta} = 0$$

$$\left.\frac{\partial W}{\partial \gamma}\right|_0 = 3\omega_0^2 (A_2 - A_3)\gamma_2\gamma_3 - \omega_0^2 (B_2 - B_3)\beta_2\beta_3 - \omega_0 (p_2\beta_3 - p_3\beta_2) = 0$$

$$\left.\frac{\partial W}{\partial \alpha}\right|_0 = -3\omega_0^2 \sum_{i=1}^{3} A_i \alpha_i \gamma_i = 0$$

Последнее уравнение определяет многообразие положений относительного равновесия гиростата, а первые два определяют значения циклических импульсов, при которых реализуется данная равновесная ориентация.

Рассмотрим возможность асимптотической стабилизации равновесных ориентаций, принадлежащих к следующим классам положений относительного равновесия гиростата.

Класс А. Одна из главных осей инерции направлена по касательной к орбите, а другие две составляют постоянный угол γ_0 соответственно с осями X_2 и X_3. При этой ориентации $q^0 = [0, \gamma_0, 0]^T$, $\gamma_0 \in [0, 2\pi)$, а значения циклических импульсов $p^0 = [p_1, p_2, p_3]^T$, при которых она реализуется, задаются соотношениями

$$p_1 = 0; \; [3\omega_0 (A_2 - A_3) + \omega_0 (B_2 - B_3) \sin\gamma_0 \cos\gamma_0 + p_2 \sin\gamma_0 + p_3 \cos\gamma_0 = 0$$

Класс Б. Одна из главных осей инерции направлена по радиусу-вектору X_3, а другие две составляют постоянный угол β_0 соответственно с X_1 и X_2. При этой ориентации $q^0 = [\beta_0, 0, 0]^T$, $\alpha_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$, а значения циклических импульсов $p^0 = [p_1, p_2, p_3]^T$ должны удовлетворять соотношениям

$$p_3 = 0; \; \omega_0 (B_2 - B_1) \sin\beta_0 \cos\beta_0 = p_1 \cos\beta_0 - p_2 \sin\beta_0$$

В обоих случаях $\xi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3]^T$ и $\eta = [\eta_1, \eta_2, \eta_3]^T$ — соответственно возмущения позиционных координат и циклических импульсов от их стационарных значений и делается замена переменных $\xi = \Omega_0^{-1} x$; $\Omega_0 = \Omega\,|_{q=q^0}$. В первом приближении уравнения возмущенного движения и окрестности стационарного движения $q = q^0$, $p = p^0$ получаем в виде

$$Bx^{\cdot\cdot} = -C^* x + G^* x^{\cdot} - N^* \eta - Eu; \; \eta^{\cdot} = u \tag{1}$$

Здесь

$$C^* = \Omega_0^{-1T} C \Omega_0^{-1}, \; G^* = \Omega_0^{-1T} G \Omega_0^{-1}, \; N^* = \Omega_0^{-1T} N$$

$$C = \| c_{ij} \|_{i,\,j=1}^{3}, \; c_{ij} = \partial^2 W (q^0, p^0) \,/\, \partial q_i \partial q_j$$

$$G = \| \gamma_{ij} \|_{i,\,j=1}^{3}, \; \gamma_{ij} = \partial g_j (q^0, p^0) \,/\, \partial q_i - \partial g_i (q^0, p^0) \,/\, \partial q_j$$

$$N = \| n_{ij} \|_{i,\,j=1}^{3}, \; n_{ij} = \partial^2 W (q^0, p^0) \,/\, \partial q_i \partial p_j$$

E — единичная (3×3)-матрица, $u = [u_1, u_2, u_3]^T$ — моменты, приложенные к роторам.

Уравнения (1) по своей форме не отличаются от линеаризованных уравнений возмущенного движения в [1], поэтому сформулированное там условие стабилизируемости формально переносится на рассматриваемую здесь механическую систему независимо от того, что кинетическая энергия не является только квадратичной формой обобщенных скоростей. Таким образом можно утверждать следующее: рассматриваемые равновесные ориентации будут асимптотически стабилизируемы по отношению к позиционным координатам и всем скоростям при помощи моментов, приложенных к роторам, если выполняется условие

$$\operatorname{rank} S = 6, \quad S = \| Q, PQ, \ldots, P^5 Q \|$$
$$Q = \begin{Vmatrix} E \\ N^* \end{Vmatrix}, \quad P = \begin{Vmatrix} G^* B^{-1} & E \\ -C^* B^{-1} & 0 \end{Vmatrix} \qquad (2)$$

(в этой записи предварительно не сделан переход к нормальным координатам).

Для равновесных ориентаций класса A после элементарных преобразований и непосредственных вычислений находим значения двух миноров шестого порядка M_1 и M_2 матрицы S

$$M_1 = D \frac{A_1 - A_3}{B_2} \cos \gamma_0, \quad M_2 = D \frac{A_1 - A_2}{B_3} \sin \gamma_0 \qquad (3)$$
$$D = 27 \omega_0{}^7 \left(\frac{A_2 - A_3}{B_1} \right)^2 \cos^2 2\gamma_0$$

Они не могут быть одновременно равны нулю, за исключением случаев, когда $\gamma_0 = \pi / 4,\ 3\pi / 4$. Поэтому все ориентации класса A, кроме тех, при которых $\gamma_0 = \pi / 4,\ 3\pi / 4$, можно сделать асимптотически устойчивыми по отношению к позиционным координатам и всем скоростям при помощи моментов, приложенных к роторам.

Для равновесных ориентаций, при которых $\gamma_0 = \pi / 4,\ 3\pi / 4$, можно показать, что $\operatorname{rank} s < 6$, следовательно [5], возможность стабилизации в этих случаях определяется членами выше первого порядка малости.

При равновесных ориентациях класса Б можно найти минор шестого порядка, отличающийся от M_1 в (3) заменой $\cos^2 2\gamma_0 \cos \gamma_0$ на $\cos \beta_0$. Он всегда отличен от нуля, так как $\beta_0 = \pm\pi / 2$ — особое значение самолетных углов. Поэтому все ориентации класса Б асимптотически стабилизируемы по отношению к позиционным координатам и всем скоростям при помощи моментов, приложенных к роторам.

Возможность асимптотической стабилизации рассматриваемых здесь равновесных ориентаций была доказана [5] только по отношению к позиционным координатам и позиционным скоростям.

Спонсор этой работы — Комитет науки НРБ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Атанасов В. А., Лилов Л. К.* О стабилизируемости установившихся движений систем с псевдоциклическими координатами // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 5. С. 713—718.
2. *Красинский А. Я., Ронжин В. В.* К стабилизации установившихся движений механических систем с циклическими координатами // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 542—548.
3. *Красовский Н. Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений // Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. С. 475—514.
4. *Анчев А.* Равнонесни ориентации на спътник-жиростат. Издателство БАН. София. 1982. С. 18—48.
5. *Лилов Л. К.* О стабилизации стационарных движений механических систем по части переменных // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 6. С. 977—985.

София

Поступила в редакцию
18.XII.1989