Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 5, 1990

УДК 539.3

В. А. Мисюра

ОДНО НЕРАВЕНСТВО В ТЕОРИИ ПОЛУЛИНЕЙНОГО УПРУГОГО ТЕЛА

На основании одного представления плотности упругой энергии полулинейного упругого тела получено неравенство для геометрически нелинейных задач как аналог тождества Прангера — Синга в линейной теории упругости.

Выпуклость функционала потенциальной энергии в геометрически линейных задачах теории упругости позволила сформулировать двойственную вариационную задачу — принцип Кастильяно. Замечательным при этом оказалось то, что нижняя грань прямого функционала I связана с нижней гранью двойственного соотношением

$$\inf I = -\inf J = \sup(-J) \tag{0.1}$$

Функционал потенциальной энергии I рассматривается на множестве кинематически допустимых полей перемещений $\mathbf{w}$, двойственный J — на множестве статически допустимых полей напряжений σ. Свойство (0.1) двойственной задачи позволяет оценить сколь угодно точно снизу минимальное значение прямого функционала $I(\mathbf{w})$. А это сразу даст [1] оценку в норме L_2 приближения $\mathbf{w}$ минимизирующего элемента $\mathbf{w}^\circ$

$$\| \mathbf{w} - \mathbf{w}^\circ \|_{L_2(V_0)} \leqslant C\,(I(\mathbf{w}) - d)^{1/2} \tag{0.2}$$

где $d \leqslant I(\mathbf{w}^\circ)$ — оценка снизу минимального значения функционала I, C — постоянная, V_0 — область, занимаемая упругим телом в недеформируемом состоянии.

Оценку (0.2) можно привести к виду [2]

$$\| \bar\sigma - \sigma^\circ \|_{L_2(V_0)} \leqslant C\, \| \bar\sigma - \sigma' \|_{L_2(V_0)} \tag{0.3}$$

Здесь $\bar\sigma$ — статически допустимое поле напряжений, σ' — кинематически допустимое, а σ° — истинное напряженное состояние упругого тела.

Естественное желание обобщить эти результаты на случай геометрически нелинейных задач теории упругости встречает ряд принципиальных трудностей. Первая связана с тем, что функционал потенциальной энергии в геометрически нелинейных задачах невыпуклый. Это, по существу, исключает возможность построения двойственного функционала, для которого выполнялось бы условие (0.1). Тем самым рассчитывать на сколь угодно точную оценку снизу функционала потенциальной энергии не приходится. Вторая трудность заключается в том, что соотношение (0.2) в геометрически нелинейных задачах несправедливо. И даже в случае, когда формально, согласно стандартной процедуре [3], удается построить двойственную задачу [4] и получить оценку снизу минимального значения прямого функционала, связь этой оценки с погрешностью приближенного решения не ясна.

Ниже предпринимается попытка получить неравенство типа (0.3) для полулинейного упругого тела. С этой целью дается одно представление плотности упругой энергии, совпадающее в области малых деформаций с общепринятым [5].

1. Упругая энергия полулинейного материала. Пусть ξ^a — лагранжевы координаты точек упругого тела, которое в недеформируемом состоянии занимает область V_0, а в деформируемом V; декартовы координаты точек упругого тела в недеформируемом состоянии $y^i(\xi^a)$, в деформируемом — $x^i(\xi^a)$. Далее латинские индексы $a, b, c, \ldots$ принимают значения 1, 2, 3, ... и соответствуют проекциям на оси координат ξ^a в недеформируемом состоянии. Полную систему уравнений статики теории полулинейного материала можно представить в виде [5]

$$p_{i|a}^{a} = 0, \quad p_i^a n_a |_{\partial V_0} = P_i; \quad p_i^a = \partial U / \partial x_a^i, \quad x_a^i = \partial x^i / \partial \xi^a \tag{1.1}$$

Черта в индексах означает операцию ковариантного дифференцирования относительно связности системы координат ξ^a в недеформируемом состоянии. Предполагается для простоты дальнейших рассуждений, что упругое тело не закреплено и подвержено действию «мертвых» массовых $F_i \equiv 0$ и поверхностных P_i сил, n_a — компоненты вектора внешней нормали к границе упругого тела V_0. Плотность упругой энергии U для изотропного полулинейного материала дается формулой

$$U = {}^1/_2 \lambda (g^{\circ ab} \gamma_{ab})^2 + \mu \gamma^{ab} \gamma_{ab}, \quad \gamma_{ab} = |x|_{ab} - \overset{\circ}{g}_{ab} \tag{1.2}$$

где λ и μ — упругие постоянные Ламе, $g^{\circ ab}$ — контрвариантные компоненты метрического тензора лагранжевой системы координат в недеформируемом состоянии, $|x|_{ab}$ — модуль дисторсии $x_a^i : x_a^i = |x|_a^b \lambda_b^i$, а λ_b^i удовлетворяет соотношениям

$$\delta_{ij} \lambda_a^i \lambda_b^i = \overset{\circ}{g}_{ab}, \quad g^{\circ ab} \lambda_a^i \lambda_b^j = \delta^{ij}, \quad \det \| \lambda_a^i \| = +1 \tag{1.3}$$

Везде далее, если не оговорено противное, жонглирование индексами $a, b, c \ldots$ производится при помощи метрики g_{ab}°.

Объект p_i^a, представляющий собой ковектор относительно преобразований декартовой системы координат x^i и вектор относительно преобразований лагранжевых координат ξ^a в недеформируемом состоянии, в геометрически нелинейной теории упругости называют тензором Пиолы — Кирхгофа.

Представим U как функцию $|x|_{ab}$:

$$U(x_a^i) = \lambda/2 (g^{\circ ab} |x|_{ab} - 3)^2 + \mu (|x|^{ab} |x|_{ab} - 2 g^{\circ ab} |x|_{ab} + 3) = V(|x|_{ab}) \tag{1.4}$$

Лемма 1. Если $(g^{\circ ab} |x|_{ab} = 3) \leqslant (1 - 2\nu)/\nu$, ν — коэффициент Пуассона, то

$$U(x_a^i) = \inf_{\varkappa_a^i \in (1.3)} \Phi(\varkappa_a^i, x_b^j), \quad \Phi(\varkappa_a^i, x_b^j) = V(\varkappa_b^i x_{ib})$$

Здесь и далее запись $\varkappa_a^i \in (1.3)$ означает, что объект $\varkappa_a^i$ удовлетворяет ограничениям (1.3).

Для обоснования сделанного утверждения потребуется доказанная в [4]

Лемма 2. Пусть q^{ab} — произвольный тензор, а μ^{ab} — компоненты ортогональной матрицы, удовлетворяющей условию $\det \| \mu_b^a \| = 1$. Тогда

$$\sup_{\mu_{ab}} q^{ab} \mu_{ab} = \max_{s_{ab}} \{ |q|^{ab} s_{ab} \}$$

где s_{ab} — одна из матриц

$$E, A, B, C \tag{1.5}$$

когда $\det \| q^{ab} \| \geqslant 0$, и

$$-E, -A, -B, -C \tag{1.6}$$

когда $\det \| q^{ab} \| < 0$. Здесь $|q|_b^a$ — модуль тензора q^{ab}, E — единичная матрица 3×3, $A = \operatorname{diag}\{1, -1, -1\}$, $B = \operatorname{diag}\{-1, +1, -1\}$, $C = \operatorname{diag}\{-1, -1, 1\}$.

Доказательство леммы 1. Имеем

$$\Phi = {}^1/_2 \lambda (g^{\circ ab} \varkappa_a^i x_{ib} - 3)^2 + \mu (|x|^{ab} |x|_{ab} - 2 g^{\circ ab} \varkappa_a^i x_{ib} + 3) \tag{1.7}$$

где использовано тождество $g^{\circ ac} g^{\circ bd} \chi_a^i x_{ib} \chi_c^j x_{jd} = |x|^{ab} |x|_{ab}$.

Отсюда следует, что

$$\inf_{\varkappa_a{}^i\in(1.3)} \Phi = \inf_y [{}^1/_2\lambda (y-3)^2 + \mu (|x|^{ab}|x|_{ab} - 2y + 3)]; \quad y = g^{oab}\varkappa_a{}^i x_{ib}$$

Таким образом, исследование минимального значения функции свелось к исследованию минимума квадратного трехчлена $f(y)$, причем $\inf f(y)$ достигается в точке $y_0 = 3 + (1-2\nu)/\nu$. Так как $y \leqslant |x|_a{}^a$, то в случае, когда $|x|_a{}^a < y_0$, минимум Φ на множестве рассматриваемых ортогональных матриц $\varkappa_a{}^i$ достигается в точке $y = |x|_a{}^a$. В случае, когда $|x|_a{}^a > y_0$, имеем

$$\inf_{\varkappa_a{}^i\in(1.3)} \Phi = \inf_{y\in R^1} f(y)$$

Вычисления дают

$$\bar{U} = \inf_{\varkappa_a{}^i\in(1.3)} \Phi = \begin{cases} V(|x|_{ab}), & |x|_a{}^a \leqslant y_0 \\ \mu(|x|^{ab}|x|_{ab} - y_0), & |x|_a{}^a > y_0 \end{cases} \tag{1.8}$$

что и приводит к требуемому.

Видим, что, если коэффициент Пуассона $\nu < 1/(2+\gamma)$, где $\gamma = (\gamma^{ab}\gamma_{ab})^{1/2}$, то $U = \bar{U}$. При малых деформациях ($\gamma \sim 10^{-2}$) это справедливо для очень широкого класса материалов. Исключение составляют почти несжимаемые величины (величина ν близка к $^1/_2$). По этой причине далее, если не оговорено противное, говоря о полулинейном материале, будем подразумевать, что плотность его упругой энергии дается соотношением (1.8).

Отметим, что функция U при $\gamma_a{}^a > (1-2\nu)/\nu$ совпадает с точностью до постоянной с упругим потенциалом Трелоара, полученным из статистических соображений о структуре каучука [6].

2. Функция Φ и некоторые связанные с ней свойства. Так как $\Phi(\varkappa_a{}^i, x_b{}^j) = V(\varkappa_a{}^i x_{ib})$, а функция $V(d_{ab})$ выпукла по d_{ab}, то выпуклой по $x_a{}^i$ при фиксированном $\varkappa_a{}^i$ является и сама функция Φ.

Рассмотрим функционал

$$I(\varkappa_a{}^i, x^j) = \int_{V_0} \Phi\, d\tau - \int_{\partial V_0} P_i x^i d\sigma \tag{2.1}$$

где $d\tau$ — элемент объема области V_0, занимаемый упругим телом, а $d\sigma$ — элемент поверхности ее границы ∂V_0.

Задача о стационарных точках функционала (2.1) при фиксированном $\varkappa_a{}^i$ на множестве функций $x^i(\xi^b)$, в силу выпуклости Φ по x^i совпадает с задачей о его минимуме. Известный в теории полулинейного материала вариационный принцип о стационарности потенциальной энергии в рассматриваемых терминах формулируется как задача о стационарных по $x^i(\xi^a)$ точках функционала

$$I^\circ(x^i) = \inf_{\varkappa_a{}^i\in(1.3)} I(\varkappa_a{}^i, x^j) \tag{2.2}$$

Отметим, что, несмотря на то, что функционал $I(\varkappa_a{}^i, x^j)$ выпуклый по x^i, функционал (2.2) не является выпуклым по x^i. Указанное обстоятельство связано с тем, что множество ортогональных тензоров не будет выпуклым в линейном пространстве тензоров второго ранга, которое вводится стандартным образом.

Наряду с задачей о минимуме функционала I по x^i рассмотрим задачу, двойственную к ней. Согласно стандартной процедуре [3], она формулируется как задача о минимуме функционала

$$J(\varkappa_a{}^i, p_j{}^b) = \int_{V_0} \Phi^* d\tau \tag{2.3}$$

на множестве двойственных переменных p_j^b, удовлетворяющих уравнениям статики (первые два соотношения (1.1)). Функция Ф* представляет собой преобразование Юнга—Фенхеля функции Ф по дисторсии x_a^i. Так как функция Ф выпукла по x^i, то

$$\inf_{x^i} I(\varkappa_a^i, x^j) = \sup_{p_j^b}(-J(\varkappa_a^i, p_j^b)) \tag{2.4}$$

Преобразование Юнга—Фенхеля функции Ф по x_a^i в силу того, что последняя является суммой квадратичной и линейной, просто вычисляется. Опуская подробности, сразу выпишем ответ:

$$\Phi(\varkappa_a^i, p_j^b) = V^*(\varkappa_a^i p_i^b) \tag{2.5}$$

где V^* — преобразование Юнга — Фенхеля функции V по $|x|_{ab}$:

$$V^*(r_{ab}) = \frac{1}{4\mu}\left[r^{ab}r_{ab} - \frac{\lambda(\lambda+2\mu)}{(3\lambda+2\mu)^2}(r_a^a)^2\right] + r_a^a \tag{2.6}$$

Докажем основное свойство сформулированной вспомогательной вариационной задачи (2.1)

Лемма 2. Пусть x^{oi} — стационарная точка функционала (2.2), а $\varkappa_b^{oi}$ — ортогональная часть соответствующей ей дисторсии: $x_a^{oi} = \varkappa_c^{oi}|x|_a^c$. Тогда x^{oi} доставляет минимум функционалу $I(\varkappa_a^{oi}, x^i)$ и

$$I(\varkappa_a^{oi}, x^{oj}) = I^\circ(x^{oj}) \tag{2.7}$$

что и приводит к требуемому.

Доказательство. Тождество (2.7) очевидно и элементарно проверяется.

Покажем, что $x^{oi}(\xi^b)$ — стационарная точка функционала $I(\varkappa_b^{oi}, x^j)$ и, следовательно, доставляет ему минимум. Действительно, уравнения Эйлера рассматриваемого функционала имеют вид

$$p_{i|a}^a = 0, \quad p_i^a n_a|_{\partial V_0} = P_i, \quad p_i^a = \partial\Phi/\partial x_a^i \tag{2.8}$$

Так как x^{oi} — стационарная точка функционала $I^\circ(x^j)$, то она удовлетворяет первым двум соотношениям (2.8), где $p_i^a = \partial U/\partial x_a^i|_{x^{oi}}$. Для доказательства сформулированного утверждения остается показать, что

$$\partial U/\partial x_a^i|_{x^{oi}} = \partial\Phi/\partial x_a^i|_{x^{oi}} \tag{2.9}$$

Преобразование правой части (2.9) и дает требуемый результат.

Лемма 3. Пусть x_0^i — минимизирующий элемент функционала $I^\circ(x^i)$, а $\varkappa_{0a}^i$ — ортогональная часть его дисторсии. Тогда x_0^i минимизирует функционал $I(\varkappa_{0a}^i, x^j)$ и совпадает с одной из стационарных точек функционала $I^\circ(x^i)$.

Первое утверждение почти очевидно. Действительно, в силу (2.2) $I^\circ(x_0^i) = I(\varkappa_{0a}^i, x_0^j) \leqslant I(\varkappa_a^i, x^j)$ для любых $\varkappa_a^i, x^j$. Следовательно, $I(\varkappa_{0a}^i, x_0^j) \leqslant I(\varkappa_{0a}^i, x^j)$ для любого x^j, что и доказывает требуемое. Отсюда следует, что x_0^i — стационарная точка функционала $I(\varkappa_{0a}^i, x^j)$ и, тем самым, удовлетворяет уравнениям (2.6). В силу (2.7) минимизирующий элемент x_0^j удовлетворяет системе уравнений (1.1). А это и означает, что x_0^i совпадает с одной из стационарных точек функционала $I^\circ(x^j)$.

Тождество (2.4) справедливо для любого $\varkappa_a^i$. Отсюда следует соотношение

$$\inf_{\varkappa_a^i}\inf_{x^i} I(\varkappa_a^i, x^j) = \inf_{\varkappa_a^i}\inf_{p_i^a}(-J(\varkappa_a^i, p_j^b)) \tag{2.10}$$

Очевидно, что левая часть его представляет минимальное значение функционала потенциальной энергии полулинейного материала. Это следует из того, что

$$\inf_{\varkappa_a^i}\inf_{x^j} I = \inf_{x^j}\inf_{\varkappa_a^i} I$$

Так как

$$\inf_{\varkappa_a^i} \sup_{p_i^b} (-J) \geqslant \sup_{p_i^b} \inf_{\varkappa_a^i} (-J) = \sup_{p_i^a} J^\circ (p_i^a)$$

то из (2.9) получим

$$\inf_{\varkappa_a^i} \sup_{p_j^b} (-J) \geqslant \sup_{p_i^b} \inf_{\varkappa_a^i} (-J) = \sup_{p_i^b} J^\circ (p_i^a)$$

Функционал J° был построен [4] для оценки снизу минимального значения функционала потенциальной энергии полулинейного материала. Так как $\inf(-J) = -\sup(J)$, то тождество (2.8) может быть представлено и в следующем виде:

$$\inf_{\varkappa_a^i} \inf_{x^j} I + \sup_{\varkappa_a^i} \inf_{p_j^b} J = 0$$

3. Некоторое свойства функционалов I и J. Пусть $\bar{p}_i^a$ удовлетворяет уравнениям (1.1). В дальнейшем такой объект будем называть статически допустимым тензором напряжений Пиолы — Кирхгофа. Аналогом кинематически допустимого поля напряжений для функционала $I(x^j)$ будет

$$q_i^a = \partial\Phi/\partial x_a^i \big|_{x'^i}$$

где x'^i — некоторое кинематически допустимое деформируемое положение упругого тела.

При любом фиксированном $\varkappa_a^i$ справедливо тождество

$$I(\varkappa_a^i, x'^i) + J(\varkappa_a^i, \bar{p}_j^b) = J(\varkappa_a^i, \bar{p}_j^b) - J(\varkappa_a^i, q_i^b) - \int_{\partial V_0} P_i x'^i d\sigma + \int_{V_0} q_i^a x_a'^i d\tau \tag{3.1}$$

Оно следует из того, что

$$I(\varkappa_a^i, x'^j) = \int_{V_0} \Phi\, d\tau - \int_{\partial V_0} P_i x'^i d\sigma = -\int_{V_0} \Phi^*\, d\tau + \int_{V_0} q_i^a x_a'^i d\tau - \int_{\partial V_0} P_i x'^i\, d\sigma$$

Для любого статически допустимого поля $\bar{p}_i^a$ выполняется соотношение

$$\int_{V_0} \bar{p}_i^a x_a'^i d\tau = \int_{\partial V_0} P_i x'^i\, d\sigma$$

Это позволяет переписать тождество (3.1) в виде

$$I(\varkappa_a^i, x'^j) + J(\varkappa_a^i, \bar{p}_b^j) = J(\varkappa_a^i, \bar{p}_b^j) - J(\varkappa_a^i, q_j^b) - \int_{V_0} (\bar{p}_i^q - q_i^a)\, x_a'^i d\tau \tag{3.2}$$

Последнее представляет собой одну из возможных форм тождества Прагера — Синга для функционала $I(x^j)$ [7].

Обозначим: $\bar{U}^*(\sigma_{ab})$ — преобразование Юнга—Фенхеля функции $\bar{U}$ (1.2) по $\rho_{ab} = \varkappa_a^i x_{ib} - g_{ab}^\circ$.

В силу (2.5) имеем

$$\Phi^*(\varkappa_a^i, p_j^b) = V^*(p_i^a \varkappa_b^i) = V^*(\sigma_{ab}) = \bar{U}^*(\sigma_{ab}) + \sigma_a^a$$

Так как $p_i^a x_a^i = \sigma^{ab}\rho_{ab} + \sigma_a^a$, то отсюда следует, что

$$J(\varkappa_a^i, \bar{p}_j^b) - J(\varkappa_a^i, q_j^b) - \int_{V_0} (\bar{p}_i^a - q_i^a)\, x_a'^i\, d\tau = E_\varkappa^*(\bar{\sigma}_{ab}) - E_\varkappa^*(r_{ab}) -$$

$$- \int_{V_0} (\bar{\sigma}_{ab} - r_{ab})\rho^{ab}\, d\tau = E_\varkappa^*(\bar{\sigma}_{ab} - r_{ab}), \quad E_\varkappa^*(\sigma_{ab}) = \int_{V_0} \bar{U}^*\, d\tau,$$

$$\bar{\sigma}^{ab} = \bar{p}_i^a \varkappa^{ib}, \quad r^{ab} = q_i^a \varkappa^{ib} \tag{3.3}$$

Аналогично устанавливаются соотношения

$$J(\varkappa_a{}^i, \bar{p}_j{}^b) - J(\varkappa_a{}^i, \overset{\circ}{p}{}_j^b) = E_\varkappa{}^*(\bar{\sigma}^{ab} - r^{\circ ab})$$

$$I(\varkappa_a{}^i, x'^j) - I(\varkappa_a{}^i, \eta^{\circ j}) = E_\varkappa{}^*(r_{ab} - \overset{\circ}{r}_{ab}); \quad r^{\circ ab} = q_i{}^a \varkappa^{ib}\big|_{\eta^{\circ j}} \tag{3.4}$$

Здесь $p_j{}^{\circ b}$ и $\eta^{\circ j}$ — минимизирующие элементы функционалов J и I. Тождества (3.3), (3.4) позволяют равенство (3.2) представить в виде

$$E_\varkappa{}^*(\bar{\sigma}_{ab} - \overset{\circ}{r}_{ab}) + E_\varkappa{}^*(r_{ab} - \overset{\circ}{r}_{ab}) = E_\varkappa{}^*(\bar{\sigma}_{ab} - r_{ab}) \tag{3.5}$$

Функционал $E_\varkappa{}^*$ квадратичный и положительно определен на множестве тензорных функций второго ранга, для него справедливо соотношение

$$c_1 \| \sigma^{ab} \|_{L_2(V_0)} \leqslant E_\varkappa{}^*(\sigma^{ab}) \leqslant c_2 \| \sigma^{ab} \|_{L_2(V_0)} = c_2 \int\limits_V \sigma^{ab}\sigma_{ab} d\tau$$

где, к примеру, $c_1 = 5/(24\mu)$, $c_2 = 1/(4\mu)$. Так как $\| \sigma_{ab} \|_{L_2(V_0)} = \| p_i{}^a \|_{L_2(V_0)}$, то из (3.4) следует

$$\| \bar{p}_i{}^a - \overset{\circ a}{p_i} \|_{L_2(V_0)} \leqslant \frac{c_2}{c_1} \| \bar{p}_i{}^a - q_i{}^a \|_{L_2(V_0)}$$

$$\| q_i{}^a - \overset{\circ a}{p_i} \|_{L_2(V_0)} \leqslant \frac{c_2}{c_1} \| \bar{p}_i{}^a - q_i{}^a \|_{L_2(V_0)}$$

4. Основное неравенство. Пусть $\bar{\varkappa}_a{}^i$ — ортогональный тензор, доставляющий максимум функционалу $J(\varkappa_a{}^i, \bar{p}_j{}^b)$ при фиксированном $\bar{p}_j{}^b$. Это значит, что для любого $\varkappa_a{}^i$

$$J(\varkappa_a{}^i, \bar{p}_j{}^b) \leqslant J(\bar{\varkappa}_a{}^i, \bar{p}_j{}^b) \tag{4.1}$$

Далее положим, что тензор $\bar{p}_i{}^a$ статически допустимый. Если $x_0{}^i$ — минимизирующий элемент функционала $I^\circ(x^j)$, $\varkappa_{0a}{}^i$ — ортогональная часть его дисторсии, то

$$J(\varkappa_{0a}^i, p_{0j}^b) + I(\varkappa_{0a}^i, x_0{}^j) = 0$$

Здесь $p_{0j}{}^b$ — тензор напряжений Пиолы — Кирхгофа, соответствующий деформируемому положению упругого тела $x_0{}^i$. Тождество (3.1) с учетом сказанного можно переписать в виде

$$I(\bar{\varkappa}_a{}^i, x'^j) - J(\varkappa_{0a}^i, x_0{}^j) + J(\bar{\varkappa}_a{}^i, \bar{p}_j{}^b) - J(\varkappa_{0a}^i, p_{0b}^j) =$$

$$= J(\bar{\varkappa}_a{}^i \bar{p}_j{}^b) - J(\bar{\varkappa}_a{}^i, q_j{}^b) - \int\limits_{V_0} (\bar{p}_j{}^b - q_j{}^b)\, x_b{}'^j d\tau \tag{4.2}$$

Так как $I(\varkappa_{0a}{}^i, x_0{}^j) \leqslant I(\bar{\varkappa}_a{}^i, x'^j)$, то из (4.2) в силу (3.3) и (3.4) получим

$$E^*_{\varkappa_0}(\bar{\sigma}^{ab} - \sigma^{\circ ab}) \leqslant E_{\bar{\varkappa}}{}^*(\bar{\sigma}^{ab} - r^{ab}) \tag{4.3}$$

Окончательно на основании (3.5) имеем неравенство

$$\| \bar{p}_i{}^a - p_{0i}{}^p \|_{L_2(V_0)} \leqslant \frac{c_2}{c_1} \| \bar{p}_i{}^q - q_i{}^q \|_{L_2(V_0)} \tag{4.4}$$

представляющее собой основную цель данной работы. Оно, как и в геометрически линейных задачах, позволяет оценить разность в норме L_2 между статически допустимым полем напряжений Пиолы — Кирхгофа $\bar{p}_i{}^a$ и минимизирующим элементом функционала потенциальной энергии полулинейного упругого тела $p_{0i}{}^a$ через разность $\bar{p}_i{}^a - q_i{}^a$. Поле напряжений $q_i{}^a$ здесь не является кинематически допустимым, как это было в геометрически линейной задаче. Его отличие от истинного кинематически допустимого, соответствующего деформируемому состоянию x'^i в том, что последнее вычисляется по формуле (3.1) с $\Phi = \Phi(\varkappa_a'^i, x^j)$, где $\varkappa_a'^i$ — ортогональная часть дисторсии $x_a'^i$, а второе с $\Phi(\bar\varkappa_a^i, x^j)$.

Для приложений неравенства (4.4) необходимо лишь явно указать вид $\bar\varkappa_a^i$, который зависит от $\bar p_i^a$.

Верхняя грань функционала $J(\varkappa_a^i, \bar p_j^b)$ по всем $\varkappa_a^i$ в рассматриваемом случае сводится к поточечной максимизации функции $\Phi^*(\varkappa_a^i, \bar p_j^b)$. Последняя имеет вид (2.6). Так как $\bar\sigma^{ab}\bar\sigma_{ab} = \bar p_i^a p_a^i$ не зависит от $\varkappa_a^i$, то нахождение $\bar\varkappa_a^i$ сведется к нахождению максимизирующего элемента функции

$$\psi = -\frac{1}{4\mu}\frac{\lambda(\lambda+2\mu)}{(3\lambda+2\mu)^2}(\bar\sigma_a^a)^2 + \bar\sigma_a^a$$

где, как и ранее, $\bar\sigma_a^a = \bar p_i^a \varkappa_a^i$. Ясно, что $|\bar\sigma_a^a| \leqslant |\bar p|_a^a$.

График зависимости ψ от $z = \sigma_a^a$ представляет собой квадратную параболу с вершиной в точке $z_0 = 2E\nu^{-1}(1 + 2\lambda/(\lambda + 2\mu))$. Если рассматриваемые напряжения в полулинейном материале таковы, что $|p|_a^a \leqslant \leqslant z_0$, то ψ принимает свое максимальное значение при максимуме $\bar\sigma_a^a$. Ответ на вопрос, при каких $\varkappa_a^i$ величина $\bar\sigma_a^a$ максимальна, дает лемма 2. Получим, что если $\det\|\bar p_i^a\| \geqslant 0$, то $\bar\varkappa_i^a = \mu_i^a$, μ_i^a — ортогональная часть тензора $\bar p_i^a$. В случае, когда $\det\|p_i^a\| < 0$, $\bar\varkappa_i^a = \mu_i^b s_b^{\circ a}$, где $s_b^{\circ a}$ — ортогональная матрица, которая выбирается из условия $\max_{s_{ab}}\{|\bar p|_b^a s_a^b\}$, максимум ищется по ортогональным матрицам, которые в системе координат, главной для тензора $|\bar p|_b^a$, имеют вид (1.6).

Окончательно получаем, что справедлива

Теорема 2. Пусть $\bar p_i^a$ — некоторое поле напряжений Пиола — Кирхгофа, удовлетворяющее первым двум уравнениям (1.1), а q_i^a — поле напряжений, связанное с произвольным деформируемым состоянием упругого тела соотношением

$$q_i^a = \partial\Phi(\bar\varkappa_a^i, x^i)/\partial x_a^i|_{x^i = x'^i}$$

Тогда минимизирующий элемент x_0^i функционала потенциальной энергии $I^\circ(x^i)$ полулинейного материала связан с тензорами $\bar p_i^a$ и q_i^a соотношением (4.4), где

$$p_{0i}^a = \partial U/\partial x_a^i|_{x^i = x_0^i}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Гостехиздат, 1957. 476 с.
2. *Prager W., Synge J. L.* Approximations in Elastisity Based on the concept of function. // Quart. Appl. Math. 1947. V. 5. № 3. P. 241—269.
3. *Бердичевский В. Л.* Об одном вариационном принципе // Докл. АН СССР. 1974. Т. 215. № 6. С. 1329—1332.
4. *Бердичевский В. Л., Мисюра В. А.* О двойственном вариационном принципе в геометрически нелинейной теории упругости // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 2. С. 321—329.
5. *Лурье Л. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
6. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 447 с.
7. *Шойхет Б. А.* Одно энергетическое тождество в физически нелинейной упругости и оценки погрешности уравнений плит // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 2. С. 317—326.

Ленинград

Поступила в редакцию 27.VI.1989