

УДК 539.3

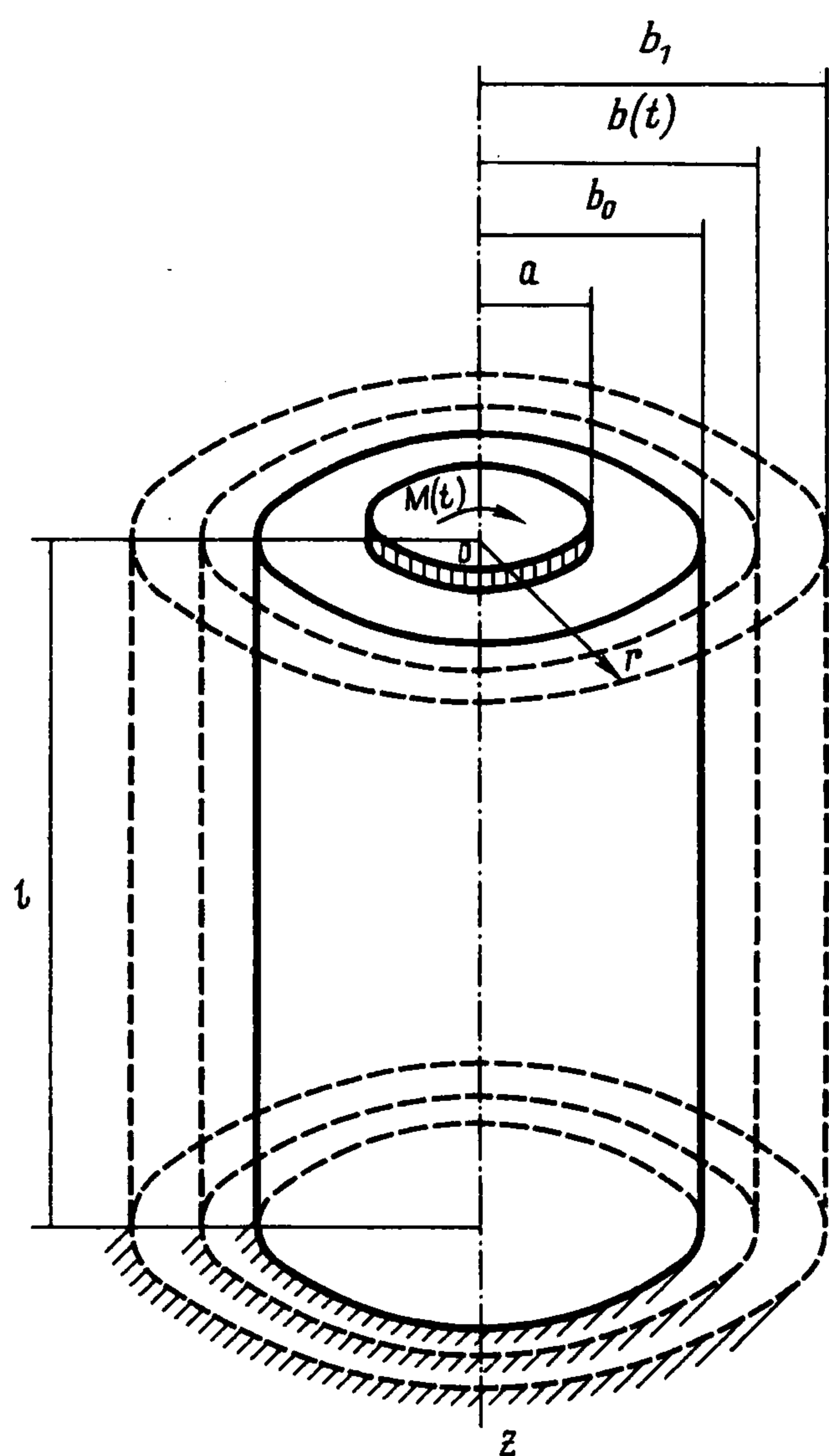
© 1990 г.

А. В. Манжиров

## О КРУЧЕНИИ РАСТУЩЕГО ЦИЛИНДРА ЖЕСТКИМ ШТАМПОМ

Рассматривается контактная задача кручения вязкоупругого стареющего растущего цилиндра жестким штампом. Выводятся и исследуются парные сумматорные уравнения, отражающие математическое содержание задачи на различных этапах процесса наращивания. Обсуждаются результаты численного анализа и особенности качественного поведения основных характеристик.

**1. Постановка и вывод парных сумматорных уравнений контактной задачи.** Предположим, что в нулевой момент времени из стареющего вязкоупругого материала изготовлен достаточно длинный круговой цилиндр



Фиг. 1

длины  $l$  и радиуса  $b_0$  (отношение  $l$  к  $b_0$  достаточно велико). Один из торцов цилиндра сцеплен с недеформируемым основанием, а к другому соосно прикреплен жесткий круговой в плане штамп с плоской подошвой радиуса  $a < b_0$ . В момент времени  $\tau_0$  на штамп начинает действовать крутящий момент  $M(t)$ , поворачивающий его на угол  $\alpha(t)$ . Боковая поверхность цилиндра свободна от напряжений.

В момент времени  $\tau_1$  к боковой поверхности цилиндра начинается приток вещества. При этом новые приращиваемые элементы не напряжены и момент их изготовления совпадает с моментом изготовления исходного тела. В момент присоединения происходит сцепление каждого элемента с недеформируемым основанием со стороны закрепленного торца.

Закон роста цилиндра полностью задается функцией  $b(t)$ , характеризующей изменение его радиуса с течением времени. Естественно, что

$b(\tau_1) = b_0$ .

Наращивание прекращается в момент времени  $\tau_2$ . К этому моменту радиус цилиндра принимает значение  $b_1$  ( $b(\tau_2) = b_1$ ), а его боковая поверхность свободна от воздействий и при  $t \geq \tau_2$ . Контактная задача наращивания изучается в рамках квазистатического приближения при отсутствующих объемных силах [1, 2] (фиг. 1).

Цилиндр считается относительно длинным в процессе роста и после его прекращения (отношения  $l/b(t)$  и  $l/b_1$  достаточно велики).

Рассмотрим основные соотношения поставленной задачи на интервале времени  $t \in [\tau_0, \tau_1]$ . Для исходного вязкоупругого стареющего цилиндра имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\varphi}}{r} &= 0 \quad (\nabla \cdot \sigma = 0) \\ z = 0, \quad 0 \leq r \leq a: u_\varphi &= \alpha(t)r; \quad z = 0, \quad a \leq r \leq b_0: \tau_{\varphi z} = 0 \\ r = b_0, \quad 0 \leq z \leq l: \tau_{r\varphi} &= 0; \quad z = l, \quad 0 \leq r \leq b_0: u_\varphi = 0 \quad (1.1) \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right), \quad \varepsilon_{\varphi z} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \quad (\varepsilon = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]) \\ \sigma &= 2G(t) (\mathbf{I} + \mathbf{F}(\tau_0, t)) \varepsilon, \quad (\mathbf{I} - \mathbf{S}(\tau_0, t)) = (\mathbf{I} + \mathbf{F}(\tau_0, t))^{-1} \\ \mathbf{S}(\tau_0, t) f(t) &= \int_{\tau_0}^t f(\tau) K_1(t, \tau) d\tau, \quad K_1(t, \tau) = G(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{G(\tau)} + \omega(t, \tau) \right] \end{aligned}$$

где  $\sigma$  и  $\varepsilon$  — тензоры напряжений и деформации с ненулевыми компонентами  $\tau_{r\varphi}$ ,  $\tau_{\varphi z}$  и  $\varepsilon_{r\varphi}$ ,  $\varepsilon_{\varphi z}$  соответственно,  $\mathbf{u}$  — вектор перемещения с единственной ненулевой компонентой  $u_\varphi$ ,  $K_1(t, \tau)$ ,  $\omega(t, \tau)$  и  $G(t)$  — ядро ползучести, мера ползучести и модуль упругомгновенной деформации при чистом сдвиге. Аргументы  $r, z, t$  в случаях, когда это не затруднит чтения формул, будем опускать.

Положим

$$\sigma^\circ = (\mathbf{I} - \mathbf{S}(\tau_0, t)) \sigma G^{-1} \quad (1.2)$$

и подействуем оператором  $(\mathbf{I} - \mathbf{S}(\tau_0, t))$  на выражения из (1.1), содержащие  $\sigma$  и его компоненты. Тогда с учетом (1.2) получим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{r\varphi}^\circ}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}^\circ}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\varphi}^\circ}{r} &= 0 \quad (\nabla \cdot \sigma^\circ = 0) \\ z = 0, \quad 0 \leq r \leq a: u_\varphi &= \alpha(t)r; \quad z = 0, \quad a \leq r \leq b_0: \tau_{\varphi z}^\circ = 0 \\ r = b_0, \quad 0 \leq z \leq l: \tau_{r\varphi}^\circ &= 0; \quad z = l, \quad 0 \leq r \leq b_0: u_\varphi = 0 \quad (1.3) \\ \varepsilon &= 1/2 [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T], \quad \sigma^\circ = 2\varepsilon \end{aligned}$$

На основании (1.3) определим, что перемещение  $u_\varphi$  удовлетворяет уравнению

$$D u_\varphi = \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r^2} = 0 \quad (1.4)$$

В соответствии с [3] возьмем решение уравнения (1.4) в форме (см. [4—7])

$$\begin{aligned} u_\varphi(r, z, t) &= l b_0^{-1} d_0(t) r (1 - z l^{-1}) + \\ &+ \sum \delta_n^{-1} d_n(t) J_1(r \delta_n) \operatorname{sh}[\delta_n(l - z)] \operatorname{sh}^{-1}(\delta_n l) \end{aligned} \quad (1.5)$$

где  $d_k(t)$  ( $k = 0, \dots, \infty$ ) — неизвестные функции времени,  $\delta_n$  ( $n = 1, \dots, \infty$ ) — неопределенные постоянные,  $J_\nu(x)$  — функция Бесселя порядка  $\nu$ . Здесь и далее суммирование ведется от  $n = 1$  до  $n = \infty$ .

Заметим, что выражение (1.5) для перемещения  $u_\varphi$  удовлетворяет граничному условию из (1.3) на закрепленном торце цилиндра при  $z = l$  и позволяет записать компоненты тензора операторных напряжений  $\sigma^\circ$  в виде (см. (1.1), (1.3))

$$\begin{aligned} \tau_{\varphi z}^\circ(r, z, t) &= -b_0^{-1} d_0(t) r - \\ &- \sum d_n(t) J_1(r \delta_n) \operatorname{ch}[\delta_n(l - z)] \operatorname{sh}^{-1}(\delta_n l) \quad (1.6) \\ \tau_{r\varphi}^\circ(r, z, t) &= - \sum d_n(t) J_2(r \delta_n) \operatorname{sh}[\delta_n(l - z)] \operatorname{sh}^{-1}(\delta_n l) \end{aligned}$$

Воспользовавшись граничным условием из (1.3) на боковой поверхности цилиндра ( $r = b_0$ ) и (1.6), найдем множество постоянных  $\delta_n$ . Действительно, приравнявая выражение для  $\tau_{r\varphi}^\circ$  нулю при  $r = b_0$  получим, что  $\delta_n = \lambda_n b_0^{-1}$ , где  $\lambda_n$  — корни уравнения  $J_2(\lambda_n) = 0$ .

Удовлетворяя, наконец, граничным условиям при  $z = 0$ , для отыскания последовательности функций  $d_k(t)$  будем иметь следующие парные сумматорные уравнения:

$$\begin{aligned} lb_0^{-1}d_0(t)r + \sum b_0\lambda_n^{-1}d_n(t)J_1(b_0^{-1}\lambda_nr) &= \alpha(t)r \quad (0 \leq r \leq a) \\ b_0^{-1}d_0(t)r + \sum d_n(t)J_1(b_0^{-1}\lambda_nr)\operatorname{cth}(b_0^{-1}\lambda_nl) &= 0 \quad (a \leq r \leq b) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Поскольку  $\lambda_n \geq \lambda_1 = 3,8317$  и  $lb_0^{-1} = \kappa_0 \gg 1$ , то  $\operatorname{cth}(b_0^{-1}\lambda_nl)$  с высокой степенью точности можно положить равным единице и исследовать уравнения (1.7) в форме [3]

$$u_\varphi(r, 0, t) = \kappa_0 d_0(t)r + \sum b_0\lambda_n^{-1}d_n(t)J_1(b_0^{-1}\lambda_nr) = \alpha(t)r \quad (0 \leq r \leq a) \quad (1.8)$$

$$\tau_{\varphi z}^\circ(r, 0, t) = b_0^{-1}d_0(t)r + \sum d_n(t)J_1(b_0^{-1}\lambda_nr) = 0 \quad (a \leq r \leq b_0)$$

Парные сумматорные уравнения (1.8) описывают поставленную контактную задачу на интервале  $t \in [\tau_0, \tau_1]$ , причем само время входит в них параметрически. К построению решения (1.8) обратимся несколько ниже, предварительно получив разрешающие уравнения задачи в процессе непрерывного наращивания и после остановки роста. Отметим только, что истинные напряжения восстанавливаются по найденным  $\tau_{r\varphi}^\circ$  и  $\tau_{\varphi z}^\circ$  по формуле

$$\sigma(r, z, t) = G(t) \left[ \sigma^\circ(r, z, t) + \int_{\tau_0}^t \sigma^\circ(r, z, \tau) R_1(t, \tau) d\tau \right] \quad (1.9)$$

где  $R_1(t, \tau)$  — резольвента ядра  $K_1(t, \tau)$ .

Пусть  $t \in [\tau_1, \tau_2]$ . Тогда начально-краевая задача для скручиваемого штампом растущего цилиндра имеет вид [1, 2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\varphi}}{r} &= 0 \quad (\nabla \cdot \sigma = 0) \\ z = 0, \quad 0 \leq r \leq a: \quad u_\varphi &= \alpha(t)r; \quad z = 0, \quad a \leq r \leq b(t): \quad \tau_{\varphi z} = 0 \\ r = b(t), \quad 0 \leq z \leq l: \quad \tau_{r\varphi} &= 0, \quad \tau_{\varphi z} = 0 \quad (\sigma = \sigma^* = 0), \quad t = \tau^*(r) \\ z = l, \quad 0 \leq r \leq b(t): \quad u_\varphi &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\dot{\varepsilon}_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right), \quad \dot{\varepsilon}_{\varphi z} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \quad \left( \dot{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\nabla u + (\nabla u)^T] \right)$$

$$\sigma = 2G(t) (I + F(\tau_0(r), t)) \varepsilon, \quad \tau_0(r) = \begin{cases} \tau_0, & r \leq b_0 \\ \tau^*(r), & b_0 \leq r \leq b(t) \end{cases}$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени,  $\sigma^*$  — задаваемый на поверхности роста тензор напряжений, характеризующий натяг приращиваемых элементов (при отсутствии натяга  $\sigma^* = 0$ ),  $\tau^*(r)$  — момент присоединения к основному цилиндру элементов с координатой  $r$ , причем  $\tau^*(b(\tau)) = \tau$ .

Запишем оператор, обратный к  $(I + F(\tau_0(r), t))$ , следующим образом ( $h(r - b_0)$  — функция Хевисайда):

$$(I - S(\tau_0(r), t)) f(t) = (I - S(\tau^\circ(r), t)) f(t) - [1 - h(r - b_0)] S^t(\tau_0, \tau_1) f(t) \quad (1.11)$$

$$S^t(\tau_0, \tau_1) f(t) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} f(\tau) K_1(t, \tau) d\tau, \quad \tau^\circ(r) = \tau_1 + h(r - b_0) [\tau^*(r) - \tau_1]$$

Действуя оператором (1.11) на соотношения из (1.10), с учетом обозначения  $\sigma^\circ = (\mathbf{I} - \mathbf{S}(\tau_0(r), t)) \sigma G^{-1}$  будем иметь

$$\frac{\partial \tau_{r\varphi}^\circ}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}^\circ}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\varphi}^\circ}{r} = 0 \quad (\nabla \cdot \sigma^\circ = 0)$$

$$z = 0, \quad 0 \leq r \leq a: \quad u_\varphi = \alpha(t)r; \quad z = 0, \quad a \leq r \leq b(t): \quad \tau_{\varphi z}^\circ = 0 \quad (1.12)$$

$$r = b(t), \quad 0 \leq z \leq l: \quad \tau_{r\varphi}^\circ = 0, \quad \tau_{\varphi z}^\circ = 0 \quad (\sigma^\circ = \sigma^{\circ*} = \sigma^* G^{-1} = 0),$$

$$t = \tau^*(r)$$

$$z = l, \quad 0 \leq r \leq b(t): \quad u_\varphi = 0$$

$$\varepsilon^\circ = 1/2 [\nabla \mathbf{u}^\circ + (\nabla \mathbf{u}^\circ)^T], \quad \sigma^\circ = 2\varepsilon$$

Для справедливости соотношений (1.12), очевидно, достаточно показать, что

$$\frac{\partial}{\partial r} (\mathbf{I} - \mathbf{S}(\tau_0(r), t)) \tau_{r\varphi} G^{-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{S}(\tau_0(r), t)) \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} G^{-1}$$

В самом деле (см. (1.11))

$$\frac{\partial \tau_{r\varphi}^\circ}{\partial r} = (\mathbf{I} - \mathbf{S}(\tau_0(r), t)) \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} G^{-1} + h(r - b_0) \frac{\partial \tau^*(r)}{\partial r} \times$$

$$\times \tau_{r\varphi}^* G^{-1} (\tau^*(r)) K_1(t, \tau^*(r)) + \delta(r - b_0) \mathbf{S}^t(\tau_0, \tau_1) \tau_{r\varphi} G^{-1}$$

причем второе и третье слагаемые в правой части этого равенства равны нулю по условиям задачи:  $\tau_{r\varphi}^* = 0$  и  $\tau_{r\varphi} = 0$  при  $t \in [\tau_0, \tau_1]$ ,  $r = b_0$ ,  $0 \leq z \leq l$  ( $\delta(r - b_0)$  — дельта-функция Дирака).

Дифференцируя теперь по времени уравнение равновесия, определяющие соотношения, первое, второе и четвертое граничные условия из (1.12) и действуя оператором дивергенции на начально-краевое условие  $\sigma^\circ = \sigma^{\circ*}$ , получим следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial \tau_{r\varphi}^{\circ\circ}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}^{\circ\circ}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\varphi}^{\circ\circ}}{r} = 0 \quad (\nabla \cdot \sigma^{\circ\circ} = 0)$$

$$z = 0, \quad 0 \leq r \leq a: \quad u_\varphi^\circ = \alpha^\circ(t)r$$

$$z = 0, \quad a \leq r \leq b(t): \quad \tau_{\varphi z}^{\circ\circ} = 0$$

$$r = b(t), \quad 0 \leq z \leq l: \quad \tau_{r\varphi}^{\circ\circ} = 0, \quad t = \tau^*(r) \quad (1.13)$$

$$z = l, \quad 0 \leq r \leq b(t): \quad u_\varphi^\circ = 0$$

$$\varepsilon^{\circ\circ} = 1/2 [\nabla \mathbf{u}^\circ + (\nabla \mathbf{u}^\circ)^T], \quad \sigma^{\circ\circ} = 2\varepsilon^\circ$$

Видно, что скорость перемещения  $u_\varphi^\circ$  удовлетворяет уравнению  $\mathbf{D}u_\varphi^\circ = 0$  (см. (1.4)), а выражения для  $u_\varphi^\circ$  и скоростей операторных напряжений  $\tau_{r\varphi}^{\circ\circ}$  и  $\tau_{\varphi z}^{\circ\circ}$  могут быть записаны в форме

$$u_\varphi^\circ(r, z, t) = lb^{-1}(t) d_0^\circ(t) r (1 - zl^{-1}) + \sum \eta_n^{-1}(t) d_n^\circ(t) J_1[r\eta_n(t)] \times$$

$$\times \text{sh}[\eta_n(t)(l - z)] \text{sh}^{-1}[\eta_n(t)l]$$

$$\tau_{\varphi z}^{\circ\circ}(r, z, t) = -b^{-1}(t) d_0^\circ(t) r - \sum d_n^\circ(t) J_1[r\eta_n(t)] \text{ch}[\eta_n(t)(l -$$

$$- z)] \text{sh}^{-1}[\eta_n(t)l] \quad (1.14)$$

$$\tau_{r\varphi}^{\circ\circ}(r, z, t) = - \sum d_n^\circ(t) J_2[r\eta_n(t)] \text{sh}[\eta_n(t)(l - z)] \text{sh}^{-1}[\eta_n(t)l]$$

Здесь  $d_k^\circ(t)$  ( $k = 0, \dots, \infty$ ) и  $\eta_n(t)$  ( $n = 1, \dots, \infty$ ) — последовательности подлежащих определению функций.

Удовлетворяя крайевым условиям из (1.13), с учетом того, что  $lb^{-1}(t) \gg \gg 1$ , придем к парным сумматорным уравнениям для отыскания  $d_k^\circ(t)$ :

$$u_\varphi^\circ(r, 0, t) = \kappa(t) d_0^\circ(t) r + \sum b(t) \lambda_n^{-1} d_n^\circ(t) J_1[b^{-1}(t) \lambda_n r] = \alpha^\circ(t) r$$

$$(0 \leq r \leq a)$$

$$\tau_{\varphi z}^{\circ} (r, 0, t) = b^{-1} (t) d_0^{\circ} (t) r + \sum d_n^{\circ} (t) J_1 [b^{-1} (t) \lambda_n r] = 0 \quad (1.15)$$

$$(a \leq r \leq b (t))$$

$$\eta_n (t) = \lambda_n b^{-1} (t), \quad \kappa (t) = lb^{-1} (t), \quad \tau_1 \leq t \leq \tau_2$$

Если  $d_k^{\circ} (t)$  найдены, а значит,  $\sigma^{\circ}$  и  $u^{\circ}$ , то тензор напряжений  $\sigma$  и вектор перемещения  $u$  восстанавливаются по формулам

$$\sigma (r, z, t) = G (t) \left\{ \frac{\sigma (r, z, \tau_0 (r))}{G (\tau_0 (r))} \left[ 1 + \int_{\tau_0 (r)}^t R_1 (t, \tau) d\tau \right] + \right.$$

$$\left. + \int_{\tau_0 (r)}^t \left[ \sigma^{\circ} (r, z, \tau) + \int_{\tau_0 (r)}^{\tau} \sigma^{\circ} (r, z, \xi) d\xi R_1 (t, \tau) \right] d\tau \right\} \quad (1.16)$$

$$u (r, z, t) = u (r, z, \tau_0 (r)) + \int_{\tau_0 (r)}^t u^{\circ} (r, z, \tau) d\tau$$

Краевая задача для наращиваемого цилиндра после прекращения роста  $t \geq \tau_2 = \tau^* (b_1)$  имеет вид (1.10), где только  $b (t) = b_1$  и на поверхности цилиндра ставится обычное граничное условие  $\tau_{r\varphi} = 0$ . Аналогично предыдущему ее можно привести к краевой задаче в скоростях перемещений и операторных напряжениях с решением в форме (1.14) при условии  $b (t) = b_1$ . Разрешающие парные сумматорные уравнения сохраняют вид (1.15), где  $b (t) = b_1$ ,  $\kappa (t) = \kappa_1 = lb_1^{-1}$ ,  $\eta_n (t) = \eta_n = \lambda_n b_1^{-1}$ ,  $t \geq \tau_2$ . После их решения напряжения  $\tau_{r\varphi}$ ,  $\tau_{\varphi z}$  и перемещение  $u_{\varphi}$  определяются при помощи (1.16). Следует заметить, что зависимость  $\sigma^{\circ}$  и  $u^{\circ}$  от времени  $t$  является параметрической.

К полученным парным сумматорным уравнениям необходимо добавить условие равновесия штампа, справедливое на всем интервале времени:

$$M (t) = -2\pi \int_0^a \tau (\rho, t) \rho^2 d\rho, \quad \tau (\rho, t) = \tau_{\varphi z} (\rho, 0, t) \quad (1.17)$$

На основании (1.17) можно получить и следующие условия:

$$M^{\circ} (t) = (I - S (\tau_0, t)) M (t) G^{-1} (t) = -2\pi \int_0^a \tau^{\circ} (\rho, t) \rho^2 d\rho \quad (\tau_0 \leq t \leq \tau_1) \quad (1.18)$$

$$M^{\circ} (t) = \frac{M^{\circ} (t)}{G (t)} + \int_{\tau_0}^t \frac{\partial M (\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \omega (t, \tau)}{\partial t} d\tau + M (\tau_0) \frac{\partial \omega (t, \tau_0)}{\partial t} =$$

$$= -2\pi \int_0^a \tau^{\circ} (\rho, t) \rho^2 d\rho \quad (t \geq \tau_1) \quad (1.19)$$

более удобные для построения решения контактной задачи в ряде случаев.

Приведенные выше рассуждения распространяются на случай  $\tau_{\varphi z}^* \neq 0$ , т. е. наращивания цилиндра с некоторым натягом присоединяемых элементов. Для этого варианта задачи в соотношениях (1.13) изменяется только условие на поверхности роста:

$$r = b (t), \quad 0 \leq z \leq l: \quad \tau_{r\varphi}^{\circ} = \frac{\partial \tau_{\varphi z}^*}{\partial z} G^{-1} \left| \frac{\partial \tau^* (r)}{\partial r} \right|^{-1}, \quad t = \tau^* (r)$$

Фактически должны выполняться довольно естественные условия отсутствия воздействий на поверхность тела, к которой будет происходить приток вещества, и на саму поверхность роста в процессе наращивания [2].

**2. Решение парных сумматорных уравнений контактной задачи.** Разрешающие парные уравнения задачи на трех основных интервалах вре-

мени представимы едиными соотношениями:

$$\begin{aligned} \zeta \varphi_0 x + \sum \lambda_n^{-1} \varphi_n J_1(\lambda_n x) &= \psi x \quad (0 \leq x \leq c) \\ -p(x) = \varphi_0 x + \sum \varphi_n J_1(\lambda_n x) &= 0 \quad (c \leq x \leq 1) \end{aligned} \quad (2.1)$$

где при  $t \in [\tau_0, \tau_1]$  полагаем  $\zeta = \kappa_0$ ,  $\varphi_k = d_k(t)$  ( $k = 0, \dots, \infty$ ),  $p(x) = \tau^\circ(xb_0, t)$ ,  $\psi = \alpha(t)$ ,  $c = ab_0^{-1}$ ,  $x = rb_0^{-1}$ , при  $t \in [\tau_1, \tau_2]$  имеем  $\zeta = \kappa(t)$ ,  $\varphi_k = d_k^\circ(t)$ ,  $\psi = \alpha^\circ(t)$ ,  $p(x) = \tau^{\circ\circ}(xb(t), t)$ ,  $c = ab^{-1}(t)$ ,  $x = rb^{-1}(t)$ , а для  $t \geq \tau_2$  в отличие от предыдущего  $\zeta = \kappa_1$ ,  $b(t) = b_1$ .

Построим решение уравнений (2.1), следуя [8] (см. также [5]). Пусть

$$p(x) = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \int_x^c g(\xi) (\xi^2 - x^2)^{-1/2} d\xi \right] h(c-x) \quad (2.2)$$

Ряд из второго уравнения (2.1) представляет собой разложение Дини [9] функции  $-p(x)$ , коэффициенты  $\varphi_k$  ( $k = 0, \dots, \infty$ ) которого при учете (2.2) даются формулами

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= -4 \int_0^1 x^2 p(x) dx = 8 \int_0^c \xi g(\xi) d\xi \\ \varphi_n &= -2J_1^{-2}(\lambda_n) \int_0^1 xp(x) J_1(\lambda_n x) dx = 2J_1^{-2}(\lambda_n) \int_0^c g(\xi) \sin(\lambda_n \xi) d\xi \\ &\quad (n = 1, \dots, \infty) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в первое уравнение (2.1) и пользуясь техникой из [8, 10—13], получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода для определения функции  $g(x)$ :

$$\begin{aligned} g(x) + \int_0^c g(\xi) k(x, \xi) d\xi &= \frac{4\psi x}{\pi} \quad (1 \leq x \leq c) \\ k(x, \xi) &= \frac{16}{\pi} (1 - 2\zeta) x\xi + \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{K_2(y)}{I_2(y)} [8x\xi I_2(y) - \operatorname{sh} xy \operatorname{sh} \xi y] dy \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $K_\nu(y)$ ,  $I_\nu(y)$  — функции Бесселя мнимого аргумента порядка  $\nu$ .

Решение уравнения (2.4) дает, очевидно, и полное решение поставленной контактной задачи. Оно может быть найдено численно [3] либо при помощи итерационных методов [5, 14]. Здесь рассмотрим один способ построения приближенного решения (2.4), предложенный в [3]. Отметим, что при  $\zeta \geq 10$  отклонение приближенного решения от численного не превышает 8,5% при  $c = 0,7$ , 7% при  $c = 0,6$  и 1% при  $c \leq 0,5$ .

Воспользуемся тем, что величина  $\zeta$  достаточно велика, и ограничимся первым членом выражения для ядра  $k(x, \xi)$  (см. (2.4))

$$g(x) + \frac{16}{\pi} (1 - 2\zeta) x \int_0^c g(\xi) \xi d\xi = \frac{4\psi x}{\pi} \quad (1 \leq x \leq c) \quad (2.5)$$

Тогда, подставляя  $g(x) = Ax$  в (2.5) и определяя  $A$ , будем иметь в силу (2.2)

$$p(x) = -4\psi [\pi + 16(2\zeta - 1)c^3/3]^{-1} x (c^2 - x^2)^{-1/2} \quad (1 \leq x \leq c) \quad (2.6)$$

На основании (2.6) зависимости операторных контактных напряжений и их скоростей от угла поворота штампа могут быть записаны в форме

$$(0 \leq r \leq a)$$

$$\tau^\circ(r, t) = \alpha(t) W(r, b_0) \quad (\tau_0 \leq t \leq \tau_1) \quad (2.7)$$

$$\tau^\circ(r, t) = \alpha^\circ(t) W(r, b(t)) \quad (\tau_1 \leq t \leq \tau_2) \quad (2.8)$$

$$\tau^\circ(r, t) = \alpha^\circ(t) W(r, b_1) \quad (t \geq \tau_2) \quad (2.9)$$

$$W(r, \xi) = -4/[\pi + 16(2l\xi^{-1} - 1)a^3\xi^{-3}/3], \quad r(d^2 - r^2)^{-1/2}$$

При заданном угле поворота штампа по формулам (2.7) — (2.9) сразу находятся  $\tau^\circ(r, t)$ ,  $\tau^\circ(r, t)$  и при помощи ранее описанных соотношений восстанавливаются контактные напряжения  $\tau(r, t)$ . Момент, действующий на штамп, вычисляется по формуле (1.17). Заметим, что при  $\alpha(t) = \text{const}$  взаимное влияние исходного цилиндра и вновь образующейся ненапряженной его части не проявляется.

При заданном крутящем моменте  $M(t)$  на основании (1.9), (1.18) и (2.7) будем иметь

$$\tau(r, t) = 3M(t) (4\pi a^3)^{-1} r (a^2 - r^2)^{-1/2} \quad (2.10)$$

$$\alpha(t) = B(b_0) (I - S(\tau_0, t)) M(t)/G(t) \quad (\tau_0 \leq t \leq \tau_1)$$

$$B(\xi) = 3/(16a^3) + (2l - \xi)/(\pi\xi^4)$$

Воспользовавшись (1.16), (1.19), (2.8), (2.9), в конечном итоге для контактных напряжений при  $t \geq \tau_1$  получим соотношение (2.10), а для угла поворота — следующие выражения:

$$\alpha^\circ(t) = M^\circ(t) B(b(t)), \quad \alpha(t) = \alpha(\tau_1) + \int_{\tau_1}^t \alpha^\circ(\tau) d\tau \quad (\tau_1 \leq t \leq \tau_2)$$

$$\alpha^\circ(t) = M^\circ(t) B(b_1), \quad \alpha(t) = \alpha(\tau_2) + \int_{\tau_2}^t \alpha^\circ(\tau) d\tau \quad (t \geq \tau_2)$$

Оказывается, что при кручении штампа моментом сил процесс наращивания цилиндра мало влияет на распределение контактных напряжений, если радиусы штампа и цилиндра не очень близки (конкретные отношения даны выше). Однако в этом же случае проявляется существенная зависимость угла поворота штампа от момента времени, с которого цилиндр начинает расти, и от скорости роста.

**3. Численный пример.** Рассмотрим поставленную контактную задачу, считая, что цилиндр изготавливается из бетона с модулем упругомгновенной деформации сдвига  $G(t) = G = \text{const}$  и мерой ползучести при сдвиге в форме [15, 16]

$$\omega(t, \tau) = (D_0 + Fe^{-\beta\tau}) (1 - e^{-\gamma(t-\tau)})$$

Сделаем замену переменных по формулам

$$r^* = ra^{-1}, \quad \rho^* = \rho a^{-1}, \quad t^* = t\tau_0^{-1}, \quad \tau^* = \tau\tau_0^{-1}, \quad \tau^*(r^*, t^*) = \tau(r, t) G^{-1}$$

$$\tau_1^* = \tau_1\tau_0^{-1}, \quad \tau_2^* = \tau_2\tau_0^{-1}, \quad M^*(t^*) = M(t) G^{-1} a^{-3}, \quad \alpha^*(t^*) = \alpha(t)$$

$$\beta^* = \beta\tau_0, \quad \gamma^* = \gamma\tau_0, \quad b_0^* = b_0 a^{-1}, \quad b_1^* = b_1 a^{-1}$$

$$b^*(t^*) = b(t) a^{-1}, \quad l^* = la^{-1}, \quad D_0^* = D_0 G, \quad F^* = FG$$

и, опуская звездочки в обозначениях, зададимся следующими значениями функций и параметров:

$$b_0 = 1/0,7, \quad l = 20/0,7, \quad b(t) = b_0 (t + \tau_2 - 2\tau_1) (\tau_2 - \tau_1)^{-1}$$

$$b_1 = 2b_0, \quad M(t) = 1, \quad D_0 = 0,251, \quad F = 1,818$$

$$\beta = 0,31, \quad \gamma = 0,6, \quad \tau_0 = 10 \text{ сут}$$

Видно, что за время наращивания радиус цилиндра увеличивается вдвое. Скорость роста постоянна и определяется только моментами начала и прекращения наращивания. Крутящий момент, действующий на штамп, не изменяется с течением времени.

Кроме того, на протяжении всего процесса отношение длины цилиндра к его радиусу больше либо равно 10, а отношение радиуса штампа к радиусу цилиндра не превосходит 0,7, т. е. можно воспользоваться формулами приближенного решения.

По поводу распределения контактных напряжений достаточно сослаться на выражение (2.10), отметить, что оно (распределение) практически не зависит от свойств материала и при постоянном крутящем моменте с достаточной степенью точности может считаться неизменным ( $\tau(r, t) = 3r/[4\pi(1 - r^2)^{1/2}]$ ).

Поведение угла поворота штампа в зависимости от основных характеристик процесса кусочно-непрерывного наращивания цилиндра требует более детального анализа.

На фиг. 2 три нижние кривые показывают изменения угла поворота  $\alpha$  по времени  $t$  для цилиндра, наращивание которого начинается одновременно с приложением крутящего момента ( $\tau_1 = 1$ ) при разных скоростях роста  $b'(t)$ :  $b'(t) = b_0/9$  ( $\tau_2 = 10$ ) — сплошная линия,  $b'(t) = b_0/3$  ( $\tau_2 = 4$ ) — штрихпунктирная линия,  $b'(t) = b_0$  ( $\tau_2 = 2$ ) — штриховая линия. Вертикальными сплошными прямыми отмечены моменты остановки роста.

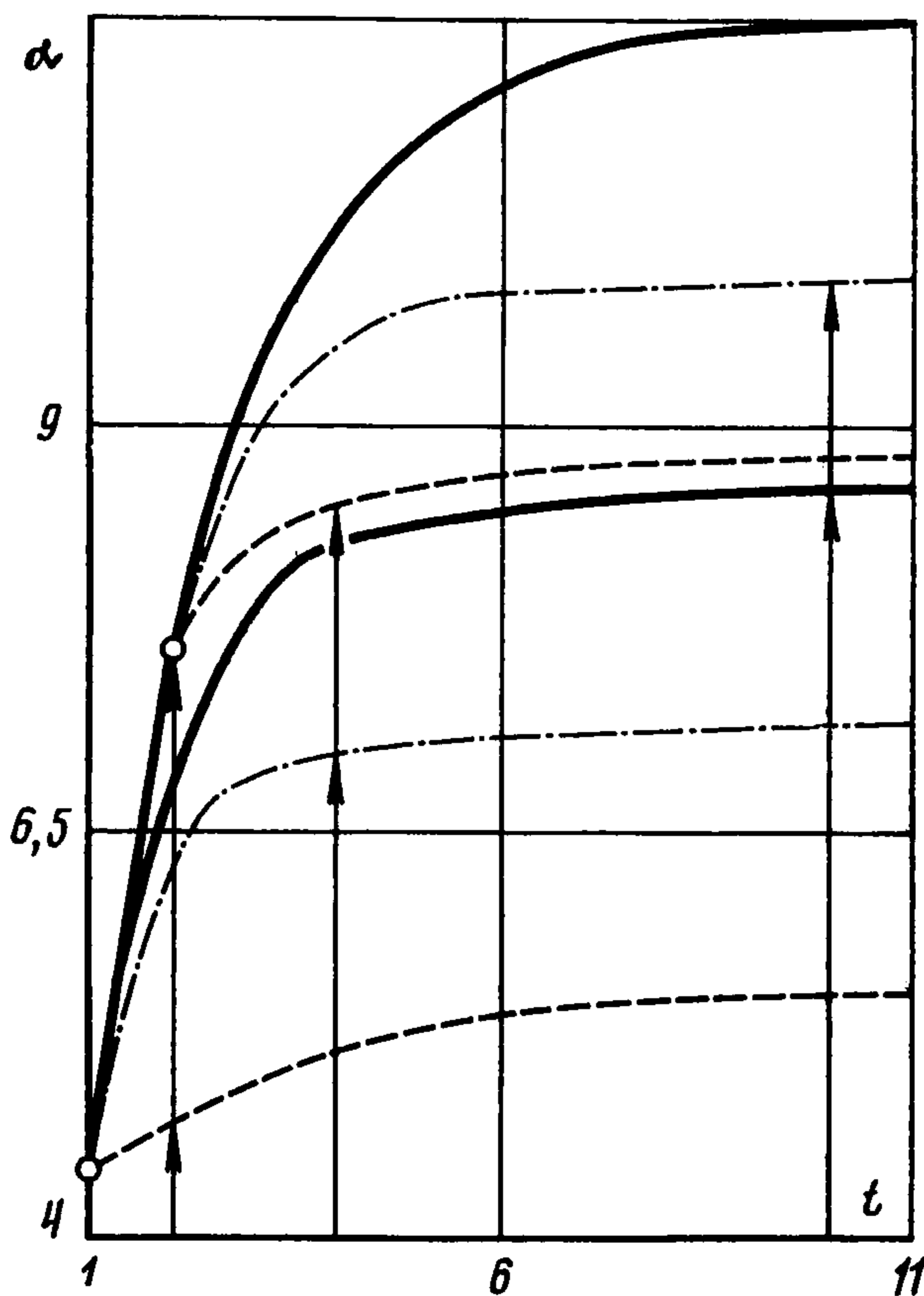
Три верхние кривые на фиг. 2 соответствуют зависимостям угла поворота штампа от времени при разных скоростях наращивания  $b'(t)$  для цилиндра, загружаемого в момент времени 1 и начинающего расти в момент времени  $\tau_1 = 2$ :  $b'(t) = b_0/8$  ( $\tau_2 = 10$ ) — штрихпунктирная линия,  $b'(t) = b_0/2$  ( $\tau_2 = 4$ ) — штриховая линия. Сплошной линией для сравнения показано изменение угла поворота штампа, скручивающего цилиндр фиксированного радиуса  $b_0$ . Участки кривых, расположенные между вертикальными сплошными прямыми, характеризуют поведение угла поворота штампа на интервалах непрерывного наращивания цилиндра.

Графики демонстрируют существенную зависимость угла поворота  $\alpha(t)$  от скорости наращивания и момента начала наращивания. Так предельное значение приращения угла поворота штампа  $\Delta(\infty)$  ( $\Delta(t) = \alpha(t) - \alpha(\tau_0)$ ) при медленном наращивании цилиндра может превосходить то же значение при быстром наращивании в 2,7 раза. При постоянном крутящем моменте существует характерный момент времени, начиная с которого влиянием процесса кусочно-непрерывного наращивания на характеристики контактного взаимодействия можно пренебречь. В этом же случае проявляется сильная зависимость предельного значения угла поворота штампа от интервала времени между моментами начала нагружения и начала роста.

Автор благодарит Н. Х. Арутюняна за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х., Дроздов А. Д., Наумов В. Э. Механика растущих вязкоупруго-пластических тел. М.: Наука, 1987. 471 с.
2. Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В. Контактные задачи механики растущих тел // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 1. С. 145—158.
3. Sneddon I. N., Srivastav R. P., Mathur S. C. The Reissner — Sagoci problem for a long cylinder of finite radius // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1966. V. 19. Pt 2. P. 123—129.
4. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 686 с.
5. Бородачев Н. М., Бородачева Ф. Н. Контактная задача о кручении полубесконечного упругого цилиндра, боковая поверхность которого свободна от напряжений // Изв. АН АрмССР. Механика. 1966. Т. 19. № 5. С. 13—21.
6. Баблян А. А., Тоноян В. С. Некоторые задачи кручения валов переменного сечения со смешанными граничными условиями // Изв. АН АрмССР. Серия физ.-мат. наук. 1961. Т. 14. № 6. С. 49—63.



Фиг. 2

7. Развитие теории контактных задач в СССР / Под ред. Галина Л. А. М.: Наука, 1976. 493 с.
8. *Srivastav R. P.* Dual series relations. II. Dual relations involving Dini series // Proc. Roy. Soc. Edin. A. 1962—1963. V. 66. Pt 3. P. 161—172.
9. *Вамсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. Ч. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1949. 799 с.
10. *Sneddon I. N., Srivastav R. P.* Dual series relations. I. Dual relations involving Fourier—Bessel series // Proc. Roy. Soc. Edin. A. 1962—1963. V. 66. Pt 3. P. 150—160.
11. *Srivastav R. P.* Dual series relations. III. Dual relations involving trigonometric series // Proc. Roy. Soc. Edin. A. 1962—1963. V. 66. Pt 3. P. 173—184.
12. *Cooke J. C.* The solution of triple and quadruple integral equations and Fourier — Bessel series // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1972. V. 25. Pt 2. P. 247—263.
13. *Уфлянд Я. С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л.: Наука, 1977. 220 с.
14. *Sneddon I. N., Tait R. J.* The effect of a pennyshaped crack on the distribution of stress in a long circular cylinder // Intern. J. Eng. Sci. 1963. V. 1. № 3. P. 391—409.
15. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.; Л.: Гостехиздат, 1952. 324 с.
16. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.

Москва

Поступила в редакцию  
6.X.1989