

УДК 539.3

© 1990 г.

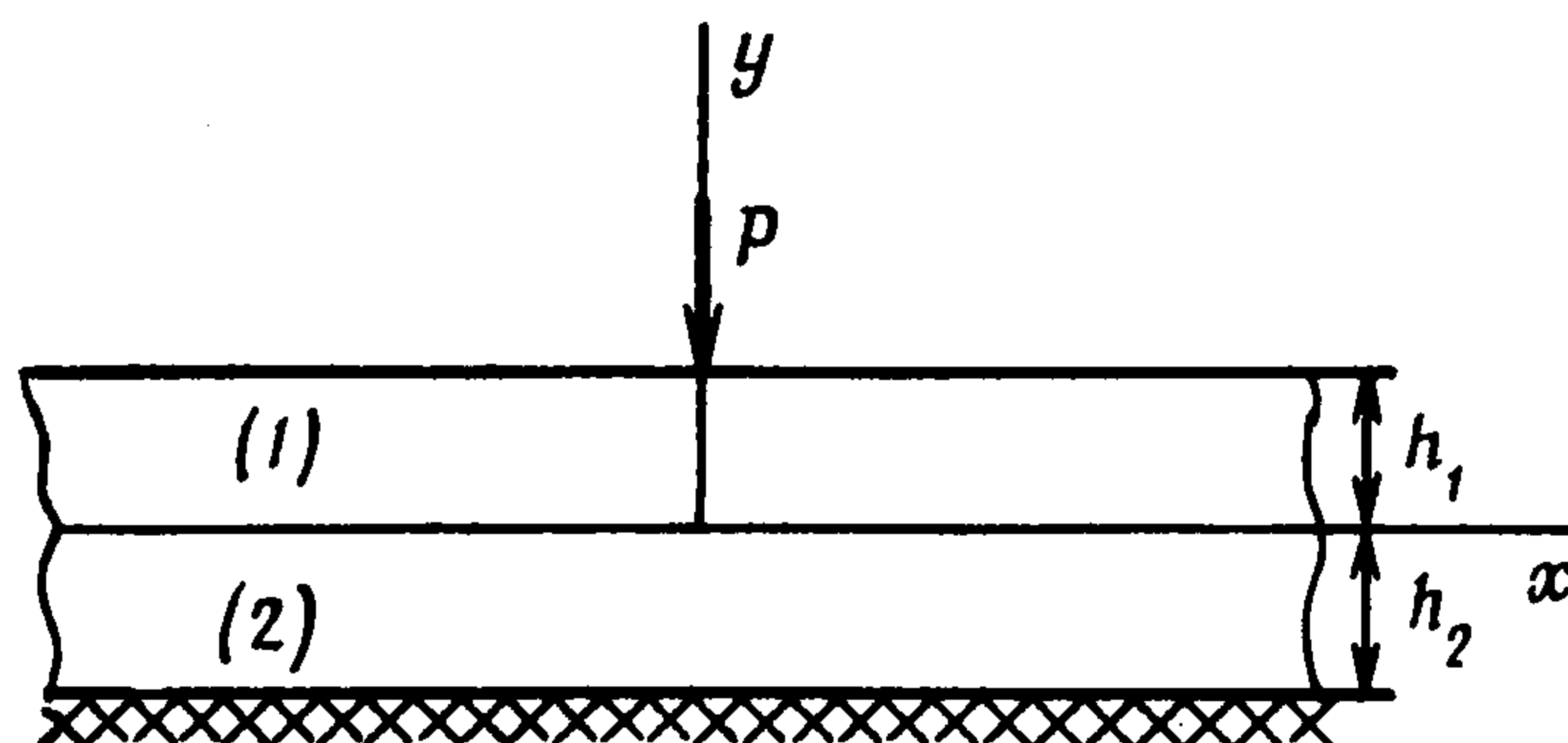
Л. А. Агаловян, М. Г. Асратян, Р. С. Геворкян

**К АСИМПТОТИЧЕСКОМУ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ О ДЕЙСТВИИ  
СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ И КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНОЙ  
НАГРУЗКИ НА ДВУХСЛОЙНУЮ ПОЛОСУ**

Асимптотический метод [1] применяется для решения нового класса задач теории упругости для двухслойной полосы, находящейся под воздействием сосредоточенных и кусочно-непрерывных нормальных нагрузок. Рассмотренные задачи являются основными, в частности, в расчетах упругих оснований и фундаментов по модели сжимаемого слоя [2, 3]. Путем сопряжения асимптотического решения для полосы [4] с решением задачи Фламана — Буссинеска получено решение задачи. Выведены достаточно простые асимптотические формулы для искомых полей напряжений и перемещений, которые могут найти непосредственные приложения. Указанный подход можно распространить также на слоистые пластинки.

1. Рассматриваются краевые задачи для двухслойной полосы, состоящей из изотропного и анизотропного слоев, находящихся в условиях полного контакта. Считается, что продольный край анизотропной части жестко закреплен, а на аналогичный край изотропной части действуют сосредоточенная сила и кусочно-непрерывная нормальная нагрузка. Рассмотрим сначала случай сосредоточенной силы.

Имеем двухслойную полосу  $\Omega = \{x, y: -l \leq x \leq l, -h_2 \leq y \leq h_1, 2l \gg h_1 + h_2\}$ , где слой  $0 \leq y \leq h_1$  изотропный, а слой  $-h_2 \leq y \leq 0$



Фиг. 1

анизотропный. Пусть на изотропный слой действует сосредоточенная нормальная сила

$$\sigma_{yy}(x, h_1) = -P\delta(x), \quad \sigma_{xy}(x, h_1) = 0 \quad (1.1)$$

а нижняя грань анизотропного слоя жестко закреплена:

$$u_x(x, -h_2) = u_y(x, -h_2) = 0 \quad (1.2)$$

Требуется определить напряженно-деформированное состояние такой полосы (фиг. 1), если на линии контакта слоев  $y = 0$  выполняются условия полного контакта

$$\sigma_{jy}^{(1)}(x, 0) = \sigma_{jy}^{(2)}(x, 0), \quad u_j^{(1)}(x, 0) = u_j^{(2)}(x, 0) \quad (1.3)$$

$(j = x, y)$

где индекс (1) соответствует изотропному слою, (2) — анизотропному. На боковых же гранях  $x = \pm l$  могут быть заданы произвольные условия

краевых задач теории упругости. В рассматриваемых задачах они непосредственно не влияют на ход определения внутреннего решения, ими обусловлен пограничный слой [4, 5].

Решение поставленной задачи (1.1), (1.2) ищем в виде

$$Q = \begin{cases} Q_1^{(a)} + Q^{(F)}, & 0 \leq y \leq h_1 \\ Q_2^{(a)}, & -h_2 \leq y \leq 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

где  $Q_1^{(a)}$  и  $Q_2^{(a)}$  — общие интегралы асимптотических решений смешанных краевых задач для полос  $\Omega_1 = \{x, y: -l \leq x \leq l, 0 \leq y \leq h_1\}$  и  $\Omega_2 = \{x, y: -l \leq x \leq l, -h_2 \leq y \leq 0, l \gg \max(h_1, h_2)\}$ , имеющие вид [4, 6]

$$\begin{aligned} Q_i^{(a)} &= \sum_{(s)} \varepsilon^{\kappa+s} Q^{(i,s)}, \quad \kappa_u = 0, \quad \kappa_\sigma = -1 \\ \sigma_{xy}^{(i,s)} &= \sigma_{xy0}^{(i,s)}(\xi) + \sigma_{xy*}^{(i,s)}(\xi, \zeta) \\ \sigma_{yy}^{(i,s)} &= \sigma_{yy0}^{(i,s)}(\xi) + \sigma_{yy*}^{(i,s)}(\xi, \zeta) \\ \sigma_{xx}^{(i,s)} &= - (a_{12}^{(i)} \sigma_{yy0}^{(i,s)} + a_{16}^{(i)} \sigma_{xy0}^{(i,s)}) / a_{11}^{(i)} + \sigma_{xx*}^{(i,s)}(\xi, \zeta) \\ u^{(i,s)} &= \zeta (A_{26}^{(i)} \sigma_{yy0}^{(i,s)} + A_{22}^{(i)} \sigma_{xy0}^{(i,s)}) + u_0^{(i,s)}(\xi) + u_*^{(i,s)}(\xi, \zeta) \\ v^{(i,s)} &= \zeta (A_{66}^{(i)} \sigma_{yy0}^{(i,s)} + A_{26}^{(i)} \sigma_{xy0}^{(i,s)}) + v_0^{(i,s)}(\xi) + v_*^{(i,s)}(\xi, \zeta) \\ \sigma_{xy*}^{(i,s)} &= - \int_0^\xi \frac{\partial \sigma_{xx}^{(i,s-1)}}{\partial \xi} d\zeta, \quad \sigma_{yy*}^{(i,s)} = - \int_0^\xi \frac{\partial \sigma_{xy}^{(i,s-1)}}{\partial \xi} d\zeta \\ \sigma_{xx*}^{(i,s)} &= - \frac{1}{a_{11}^{(i)}} (a_{12}^{(i)} \sigma_{yy*}^{(i,s)} + a_{16}^{(i)} \sigma_{xy*}^{(i,s)}) + \frac{1}{a_{11}^{(i)}} \frac{\partial u^{(i,s-1)}}{\partial \xi} \\ u_*^{(i,s)} &= \int_0^{\varepsilon \xi} \left( a_{16}^{(i)} \sigma_{xx*}^{(i,s)} + a_{26}^{(i)} \sigma_{yy*}^{(i,s)} + a_{66}^{(i)} \sigma_{xy*}^{(i,s)} - \frac{\partial v^{(i,s-1)}}{\partial \xi} \right) d\zeta \\ v_*^{(i,s)} &= \int_0^{\varepsilon \xi} (a_{12}^{(i)} \sigma_{xx*}^{(i,s)} + a_{22}^{(i)} \sigma_{yy*}^{(i,s)} + a_{26}^{(i)} \sigma_{xy*}^{(i,s)}) d\zeta \\ \xi &= x/l, \quad \zeta = y/h_2 = y l \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon = h_2/l \quad (h_2 > h_1) \\ u^{(i)} &= u_x^{(i)}/l, \quad v^{(i)} = u_y^{(i)}/l, \quad i = 1, 2 \\ A_{66}^{(i)} &= (a_{11}^{(i)} a_{22}^{(i)} - a_{12}^{(i)2}) / a_{11}^{(i)}, \quad A_{22}^{(i)} = (a_{11}^{(i)} a_{66}^{(i)} - a_{16}^{(i)2}) / a_{11}^{(i)} \\ A_{26}^{(i)} &= (a_{11}^{(i)} a_{26}^{(i)} - a_{12}^{(i)} a_{16}^{(i)}) / a_{11}^{(i)} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Решение (1.5) для каждого  $(i)$  содержит по четыре произвольные функции интегрирования  $\sigma_{xy0}^{(i,s)}$ ,  $\sigma_{yy0}^{(i,s)}$ ,  $u_0^{(i,s)}$ ,  $v_0^{(i,s)}$ ;  $Q^{(F)}$  — удовлетворяющее условиям

$$\sigma_{xy}^{(F)}(x, h_1) = 0, \quad \sigma_{yy}^{(F)}(x, h_1) = -P \delta(x) \quad (1.6)$$

решение задачи Фламана — Буссинеска для полуплоскости  $\Omega = \{x, y: -\infty < x < \infty, -\infty < y \leq h_1\}$ , которое для кусочно-непрерывной нагрузки имеет вид [7]

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^{(F)} &= \frac{2}{\pi} I_{12}, \quad \sigma_{yy}^{(F)} = \frac{2}{\pi} I_{03}, \quad \sigma_{xx}^{(F)} = \frac{2}{\pi} I_{21} \\ u_x^{(F)} &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{\pi E} \int_a^b p(\xi) \operatorname{arctg} \frac{x-\xi}{y-h_1} d\xi - \frac{1+\nu}{\pi E} I_{11} \\ u_y^{(F)} &= \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \int_a^b p(\xi) \ln r(\xi, y) d\xi + \frac{1+\nu}{\pi E} I_{20} \end{aligned}$$

$$r = r(\xi, y) = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - h_1)^2} \quad (1.7)$$

$$I_{\alpha\beta} = \int_a^b p(\xi) \frac{(x - \xi)^\alpha (y - h_1)^\beta}{r^\gamma} d\xi$$

где  $\gamma = 4$  при  $\alpha + \beta = 3$  и  $\gamma = 2$  при  $\alpha + \beta = 2$ .

Удовлетворив на  $y = 0$  условиям контакта (1.3) граничным условиям (1.1) и (1.2), получаем

$$\begin{aligned} u_0^{(2,s)} &= u_0^{(1,s)} + u_0^{(F,s)}(0), \quad v_0^{(2,s)} = v_0^{(1,s)} + v_0^{(F,s)}(0) \\ \sigma_{xy0}^{(2,s)} &= \sigma_{xy0}^{(1,s)} + \sigma_{xy}^{(F,s)}(0), \quad \sigma_{yy0}^{(2,s)} = \sigma_{yy0}^{(1,s)} + \sigma_{yy}^{(F,s)}(0) \\ \sigma_{xy0}^{(1,s)} &= -\sigma_{xy*}^{(1,s)}(\zeta_0), \quad \sigma_{yy0}^{(1,s)} = -\sigma_{yy*}^{(1,s)}(\zeta_0), \quad \zeta_0 = h_1/h_2 \\ u_0^{(2,s)} &= (A_{26}^{(2)}\sigma_{yy0}^{(2,s)} + A_{22}^{(2)}\sigma_{xy0}^{(2,s)}) - u_*^{(2,s)} \quad (\zeta = -1) \\ v_0^{(2,s)} &= (A_{66}^{(2)}\sigma_{yy0}^{(2,s)} + A_{26}^{(2)}\sigma_{xy0}^{(2,s)}) - v_*^{(2,s)} \quad (\zeta = -1) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Отсюда однозначно определяются функции интегрирования

$$\begin{aligned} \sigma_{xy0}^{(1,s)} &= -\sigma_{xy*}^{(1,s)}(\zeta_0), \quad \sigma_{yy0}^{(1,s)} = -\sigma_{yy*}^{(1,s)}(\zeta_0) \\ \sigma_{xy0}^{(2,s)} &= -\sigma_{xy*}^{(1,s)}(\zeta_0) + \sigma_{xy}^{(F,s)}(0), \quad \sigma_{yy0}^{(2,s)} = -\sigma_{yy*}^{(1,s)}(\zeta_0) + \sigma_{yy}^{(F,s)}(0) \\ u_0^{(2,s)} &= A_{26}^{(2)}(\sigma_{yy}^{(F,s)}(0) - \sigma_{yy*}^{(1,s)}(\zeta_0)) + A_{22}^{(2)}(\sigma_{xy}^{(F,s)}(0) - \sigma_{xy*}^{(1,s)}(\zeta_0)) - u_*^{(2,s)} \quad (\zeta = -1) \\ v_0^{(2,s)} &= A_{66}^{(2)}(\sigma_{yy}^{(F,s)}(0) - \sigma_{yy*}^{(1,s)}(\zeta_0)) + A_{26}^{(2)}(\sigma_{xy}^{(F,s)}(0) - \sigma_{xy*}^{(1,s)}(\zeta_0)) - v_*^{(2,s)} \quad (\zeta = -1) \\ u_0^{(1,s)} &= u_0^{(2,s)} - u_0^{(F,s)}(0), \quad v_0^{(1,s)} = v_0^{(2,s)} - v_0^{(F,s)}(0) \end{aligned} \quad (1.9)$$

где  $\sigma_{xy}^{(F,s)}(0) = \sigma_{yy}^{(F,s)}(0) = u_0^{(F,s)}(0) = v_0^{(F,s)}(0) = 0$  при  $s \neq 0$ , а  $\sigma_{xy}^{(F,0)}(0) = \sigma_{xy}^{(F)}(x = l\xi, y = 0)$ ,  $\sigma_{yy}^{(F,0)}(0) = \sigma_{yy}^{(F)}(x = l\xi, y = 0)$ ,  $u_0^{(F,0)}(0) = l^{-1}u_x^{(F)}(x = l\xi, y = 0)$ ,  $v_0^{(F,0)}(0) = l^{-1}u_y^{(F)}(x = l\xi, y = 0)$  определяются из (1.7) подстановкой  $x = l\xi, y = 0$ . Таким образом, по формулам (1.4), (1.7) и рекуррентным соотношениям (1.5), (1.9) можно вычислить решение поставленной задачи с любой асимптотической точностью.

Ограничившись точностью  $O(\varepsilon^2)$  определения искомых величин, что обычно бывает достаточным для практических приложений, будем иметь решение (штрих означает производную по  $x$ ):

для изотропного слоя  $0 \leq y \leq h_1$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^{(1)} &= \sigma_{xy}^{(F)}, \quad \sigma_{yy}^{(1)} = \sigma_{yy}^{(F)} \\ \sigma_{xx}^{(1)} &= \sigma_{xx}^{(F)} + \frac{h_2}{a_{11}^{(1)}} \left( A_{26}^{(2)}\bar{\sigma}'_{yy} + A_{22}^{(2)}\bar{\sigma}'_{xy} - \frac{1}{h_2}\bar{u}' \right) \\ u_x^{(1)} &= u_x^{(F)} - \bar{u} + h_2(A_{26}^{(2)}\bar{\sigma}'_{yy} + A_{22}^{(2)}\bar{\sigma}'_{xy}) + y\bar{v}' - \left[ A_{66}^{(2)}yh_2 + \frac{1}{2}h_2^2 \left( \frac{a_{12}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}} A_{22}^{(2)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{a_{16}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}} A_{26}^{(2)} + A_{66}^{(2)} \right) \right] \bar{\sigma}'_{yy} - \left( \frac{1}{2} A_{26}^{(2)}yh_2 + \frac{a_{26}^{(2)} - a_{16}^{(2)}}{2a_{11}^{(2)}} A_{22}^{(2)}h_2^2 \right) \bar{\sigma}'_{xy} \quad (1.10) \\ u_y^{(1)} &= u_y^{(F)} - \bar{v} + h_2(A_{66}^{(2)}\bar{\sigma}'_{yy} + A_{26}^{(2)}\bar{\sigma}'_{xy}) + \frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}yh_2(A_{26}^{(2)}\bar{\sigma}'_{yy} + A_{22}^{(2)}\bar{\sigma}'_{xy}) + \\ &\quad + \frac{1}{2}h_2^2 \left( \frac{a_{12}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}} A_{22}^{(2)} - \frac{a_{26}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}} A_{26}^{(2)} + A_{66}^{(2)} \right) \bar{\sigma}'_{xy} \\ a_{11}^{(1)} &= a_{22}^{(1)} = \frac{1 - \nu^2}{E}, \quad a_{12}^{(1)} = -\frac{\nu(1 + \nu)}{E} \end{aligned}$$

для анизотропного слоя  $-h_2 \leq y \leq 0$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^{(2)} &= \bar{\sigma}_{xy} + y \left( \frac{a_{12}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}} \bar{\sigma}'_{yy} + \frac{a_{26}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}} \bar{\sigma}'_{xy} \right) \\ \sigma_{yy}^{(2)} &= \bar{\sigma}_{yy} - y \bar{\sigma}'_{xy} \\ \sigma_{xx}^{(2)} &= -\frac{1}{a_{11}^{(2)}} (a_{12}^{(2)} \bar{\sigma}'_{yy} + a_{26}^{(2)} \bar{\sigma}'_{xy}) - y \left[ \frac{a_{12}^{(2)} a_{16}^{(2)}}{(a_{11}^{(2)})^2} \bar{\sigma}'_{yy} + \frac{a_{26}^{(2)} a_{16}^{(2)} - a_{12}^{(2)} a_{11}^{(2)}}{(a_{11}^{(2)})^2} \bar{\sigma}'_{xy} \right] + \\ &\quad + \frac{1}{a_{11}^{(2)}} (y + h_2) (A_{26}^{(2)} \bar{\sigma}'_{yy} + A_{22}^{(2)} \bar{\sigma}'_{xy}) \\ u_x^{(2)} &= (y + h_2) (A_{26}^{(2)} \bar{\sigma}'_{yy} + A_{22}^{(2)} \bar{\sigma}'_{xy}) + \frac{1}{2} (y^2 - h_2^2) \times \\ &\quad \times \left[ \left( \frac{a_{12}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}} A_{22}^{(2)} + \frac{a_{16}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}} A_{26}^{(2)} - A_{66}^{(2)} \right) \bar{\sigma}'_{yy} + \left( \frac{a_{16}^{(2)} + a_{26}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}} A_{22}^{(2)} - 2A_{26}^{(2)} \right) \bar{\sigma}'_{xy} \right] + \\ &\quad + h_2 (y + h_2) \left[ \left( \frac{a_{16}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}} A_{26}^{(2)} - A_{66}^{(2)} \right) \bar{\sigma}'_{yy} + \left( \frac{a_{16}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}} A_{22}^{(2)} - A_{26}^{(2)} \right) \bar{\sigma}'_{xy} \right] \\ u_y^{(2)} &= (y + h_2) (A_{66}^{(2)} \bar{\sigma}'_{yy} + A_{26}^{(2)} \bar{\sigma}'_{xy}) + y (y + h_2) \frac{a_{12}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}} A_{26}^{(2)} \bar{\sigma}'_{yy} + \\ &\quad + \frac{1}{2} (y^2 - h_2^2) \left( \frac{a_{26}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}} A_{26}^{(2)} + \frac{a_{12}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}} A_{22}^{(2)} - A_{66}^{(2)} \right) \bar{\sigma}'_{xy} + h_2 (y + h_2) \frac{a_{12}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}} A_{22}^{(2)} \bar{\sigma}'_{xy} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xy} &= \sigma_{xy}^{(F)}(y=0) = \frac{2P}{\pi} \frac{xh_1^2}{(x^2 + h_1^2)^2} \\ \bar{\sigma}_{yy} &= \sigma_{yy}^{(F)}(y=0) = -\frac{2P}{\pi} \frac{h_1^3}{(x^2 + h_1^2)^2} \\ \bar{u} &= u_x^{(F)}(y=0) = -\frac{P(1+\nu)(1-2\nu)}{\pi E} \operatorname{arctg} \frac{x}{h_1} + \frac{P(1+\nu)}{\pi E} \frac{xh_1}{r^2(0,0)} \\ \bar{v} &= u_y^{(F)}(y=0) = \frac{2P(1-\nu^2)}{\pi E} \ln r(0,0) + \frac{P(1+\nu)}{\pi E} \frac{x^2}{r^2(0,0)} \end{aligned} \quad (1.12)$$

2. Если нагрузка, действующая на край  $y = h_1$ , задана в виде кусочно-непрерывной функции

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x, y = h_1) &= \sigma_{yy}^+(x) = \begin{cases} -p(x), & a \leq x \leq b \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases} \\ \sigma_{xy}(x, y = h_1) &= \sigma_{xy}^+(x) = 0, \quad -l \leq x \leq l \end{aligned} \quad (2.1)$$

то решение (1.10), (1.11) сохраняет свой вид, но  $\sigma_{xx}^{(F)}$ ,  $\sigma_{yy}^{(F)}$ ,  $u_j^{(F)}$  ( $j = x, y$ ) задаются уже по формулам (1.7), а  $\bar{\sigma}_{jy} = \sigma_{jy}^{(F)}(x, 0)$ ,  $\bar{u} = u_x^{(F)}(x, 0)$ ,  $\bar{v} = u_y^{(F)}(x, 0)$ .

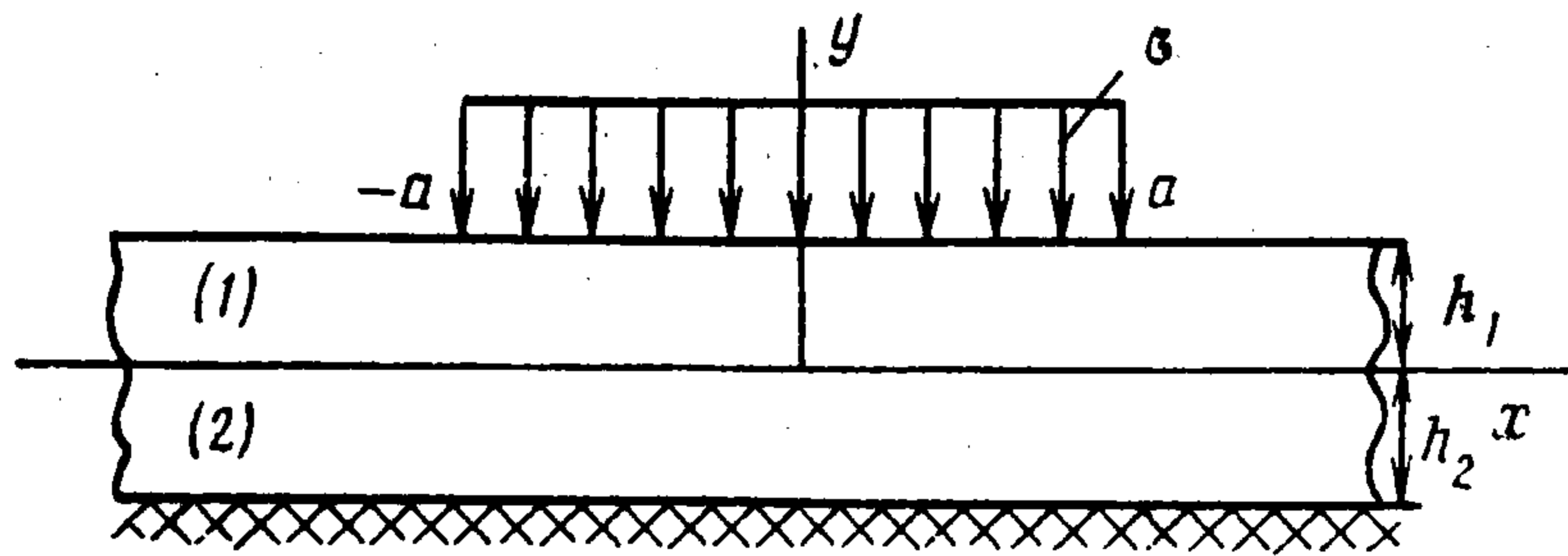
Приведем решения для некоторых часто встречающихся случаев.

а) Пусть на край  $y = h_1$  полосы действует равномерно распределенная кусочно-непрерывная нормальная нагрузка (фиг. 2)

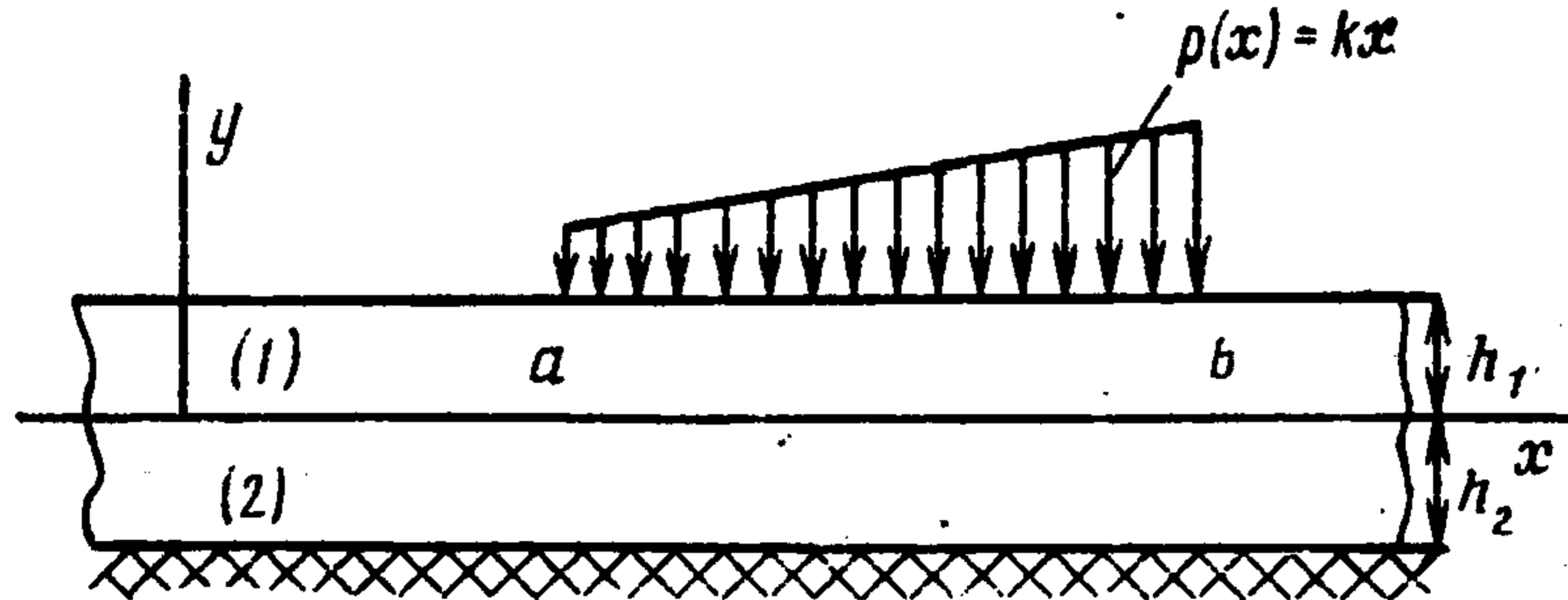
$$p(x) = \begin{cases} \text{const}, & -a \leq x \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases} \quad (2.2)$$

Для изотропной части полосы  $0 \leq y \leq h_1$  с точностью  $O(\varepsilon^2)$  имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^{(1)} &= \sigma_{xy}^{(1)} + \frac{\sigma}{\pi} A(x, y) \\ \sigma_{xy}^{(1)} &= \frac{\sigma}{\pi} \left[ \frac{(x+a)(y-h_1)}{r^2(-a, y)} - \frac{(x-a)(y-h_1)}{r^2(a, y)} \right] \\ \sigma_{xx}^{(1)} &= -\sigma_{xy}^{(1)} + \frac{\sigma}{\pi} A(x, y) + \frac{Eh_2}{1-\nu} \left( A_{26}^{(2)} \bar{\sigma}'_{yy} + A_{22}^{(2)} \bar{\sigma}'_{xy} - \frac{1}{h_2} \bar{u}' \right) \end{aligned}$$



Фиг. 2



Фиг. 3

$$\begin{aligned}
 u_x^{(1)} = & \frac{(1+\nu)(1-2\nu)\sigma}{\pi E} \left[ (x+a) \operatorname{arctg} \frac{x+a}{y-h_1} - (x-a) \operatorname{arctg} \frac{x-a}{y-h_1} \right] + \\
 & + \frac{2(1-\nu)\sigma}{\pi E} (y-h_1) \ln \frac{r(a,y)}{r(-a,y)} - \bar{u} + h_2 (A_{26}^{(2)} \bar{\sigma}_{yy} + A_{22}^{(2)} \bar{\sigma}_{xy}) + y \bar{v}' - \\
 & - \left[ A_{66}^{(2)} y h_2 + \frac{1}{2} h_2^2 \left( \frac{a_{12}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}} A_{22}^{(2)} - \frac{a_{16}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}} A_{26}^{(2)} + A_{66}^{(2)} \right) \right] \bar{\sigma}'_{yy} - \\
 & - \left( \frac{1}{2} A_{26}^{(2)} y h_2 + \frac{a_{26}^{(2)} - a_{16}^{(2)}}{2a_{11}^{(2)}} A_{22}^{(2)} h_2^2 \right) \bar{\sigma}'_{xy} \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_y^{(1)} = & \frac{(1+\nu)(3-2\nu)\sigma}{\pi E} [2a - (y-h_1) A(x,y)] + \\
 & + \frac{2(1-\nu^2)\sigma}{\pi E} [(x+a) \ln r(-a,y) - (x-a) \ln r(a,y)] - \\
 & - \bar{v} + h_2 (A_{66}^{(2)} \bar{\sigma}_{yy} + A_{26}^{(2)} \bar{\sigma}_{xy}) - \frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu} A_{26}^{(2)} y h_2 \bar{\sigma}'_{yy} - \\
 & - \left[ \frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu} A_{22}^{(2)} y h_2 - \frac{1}{2} \frac{a_{12}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}} A_{22}^{(2)} h_2^2 + \frac{1}{2} \frac{a_{26}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}} A_{26}^{(2)} h_2^2 - \frac{1}{2} A_{66}^{(2)} h_2^2 \right] \bar{\sigma}'_{xy} \\
 & A(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{2a(y-h_1)}{x^2 - a^2 + (y-h_1)^2}
 \end{aligned}$$

а величины анизотропной части  $-h_2 \leq y \leq 0$  определяются по формулам (1.11), но в (1.11) и в (2.3) следует принимать

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_{yy} = \bar{\sigma}_{xy} + \frac{\sigma}{\pi} A(x,0), \quad \bar{\sigma}_{xy} = \frac{\sigma}{\pi} \left[ \frac{h_1(x-a)}{r^2(a,0)} - \frac{h_1(x+a)}{r^2(-a,0)} \right] \\
 \bar{u} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)\sigma}{\pi E} \left[ (x-a) \operatorname{arctg} \frac{x-a}{h_1} - (x+a) \operatorname{arctg} \frac{x+a}{h_1} \right] - \\
 - \frac{2(1-\nu^2)\sigma}{\pi E} h_1 \ln \frac{r(a,0)}{r(-a,0)} \quad (2.4) \\
 \bar{v} = \frac{(1+\nu)(3-2\nu)\sigma}{\pi E} [2a + h_1 A(x,0)] + \\
 + \frac{(1-\nu^2)\sigma}{\pi E} [(x+a) \ln r(-a,0) - (x-a) \ln r(a,0)]
 \end{aligned}$$

б) На край  $y = h_1$  действует нормальная нагрузка, меняющаяся на участке  $a \leq x \leq b$  линейно (фиг. 3)

$$p(x) = \begin{cases} kx, & a \leq x \leq b \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases} \quad (2.5)$$

Напряженно-деформированные состояния в слоях полосы определяются соответственно по формулам (1.10), (1.11), куда следует подставлять

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^{(F)} &= \frac{k}{\pi} \left[ \frac{b(y-h_1)^2}{r^2(b,y)} - \frac{a(y-h_1)^2}{r^2(a,y)} \right] + \frac{k}{\pi} (y-h_1) B \\ \sigma_{yy}^{(F)} &= \frac{k}{\pi} (y-h_1) \left[ \frac{x(b-x) - (y-h_1)^2}{r^2(b,y)} - \frac{x(a-x) - (y-h_1)^2}{r^2(a,y)} \right] - \frac{kx}{\pi} B \\ \sigma_{xx}^{(F)} &= \frac{2k}{\pi} (y-h_1) \ln \frac{r(b,y)}{r(a,y)} - \frac{kx}{\pi} B + \\ &+ \frac{k(y-h_1)}{\pi} \left[ \frac{x(x-b) + (y-h_1)^2}{r^2(b,y)} - \frac{x(x-a) + (y-h_1)^2}{r^2(a,y)} \right] \\ u_x^{(F)} &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)k}{2\pi E} \left\{ r^2(b,y) \operatorname{arctg} \frac{x-b}{y-h_1} - r^2(a,y) \operatorname{arctg} \frac{x-a}{y-h_1} + \right. \\ &+ 2x(y-h_1) \ln \frac{r(b,y)}{r(a,y)} - 2x \left[ (x-b) \operatorname{arctg} \frac{x-b}{y-h_1} - (x-a) \operatorname{arctg} \frac{x-a}{y-h_1} \right] + \\ &+ (a-b)(y-h_1) \left. \right\} + \frac{(1+\nu)k}{\pi E} (y-h_1) \left[ (y-h_1) E + x \ln \frac{r(b,y)}{r(a,y)} + b-a \right] \\ u_y^{(F)} &= \frac{(1-\nu^2)k}{2\pi E} \left[ r^2(b,y) \ln r(b,y) - r^2(a,y) \ln r(a,y) + 6x(b-a) + \right. \\ &+ 2(a^2-b^2) - 2x(x-b) \ln r(b,y) + 2x(x-a) \ln r(a,y) + x(y-h_1) B + \\ &+ \left. \frac{(1+\nu)k}{2\pi E} \left[ b^2 - a^2 + 2(y-h_1)^2 \ln \frac{r(a,y)}{r(b,y)} - 2x(y-h_1) B \right] \right] \\ B &= \operatorname{arctg} \frac{(a-b)(y-h_1)}{(x-a)(x-b) + (y-h_1)^2} \\ \bar{u} &= u_x^{(F)}(x,0), \quad \bar{v} = u_y^{(F)}(x,0), \quad \bar{\sigma}_{xy} = \sigma_{xy}^{(F)}(x,0), \quad \bar{\sigma}_{yy} = \sigma_{yy}^{(F)}(x,0) \end{aligned}$$

Аналогичным образом выписываются решения и для других случаев.

Все выписанные выше решения справедливы начиная с расстояний от поперечных кромок  $x = \pm l$ , равных зоне простираения погранслоев. Указанную зону можно установить изложенным в [5] способом. Вблизи кромок  $x = \pm l$ , чтобы иметь полное представление о характере распределения напряжений и перемещений, необходимо к указанному решению добавить решение типа пограничного слоя.

Таким образом, сопрягая решение задачи Фламана — Буссинеска с асимптотическим решением задачи для полосы можно существенно расширить область приложений асимптотических решений [4, 6, 8]. Отметим также, что первый слой тоже может являться анизотропным, в этом случае необходимо оперировать решением задачи Фламана для анизотропной полуплоскости. Изложенный подход применим также в аналогичных задачах для слоя и пластинок.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 4. С. 668—686.
2. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз, 1960. 491 с.
3. Горбунов-Пасадов М. И., Маликова Т. А. Расчет конструкций на упругом основании. М.: Стройиздат, 1973. 627 с.
4. Агаловян Л. А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела. Механика. Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1982. Вып. 2. С. 7—12.
5. Агаловян Л. А. Упругий пограничный слой для одного класса плоских задач. Механика. Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1984. Вып. 3. С. 51—58.
6. Агаловян Л. А., Геворкян Р. С. Неклассические краевые задачи пластин с общей анизотропией // Тр. 4-го Всесоюз. симпозиума по механике конструкций из композиционных материалов. Новосибирск: Наука, 1984. С. 105—110.
7. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 464 с.
8. Агаловян Л. А., Геворкян Р. С. Об асимптотическом решении смешанных трехмерных задач для двухслойных анизотропных пластинок // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 2. С. 271—278.