УДК 539.3



В. М. Александров, Б. И. Сметанин

# СВЕРХЗВУКОВОЕ РАСКЛИНИВАНИЕ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ

Рассмотрена задача о продольном расклинивании бесконечной упругой полосы тонким гладким жестким клином. Клин движется симметрично относительно границ полосы с постоянной сверхзвуковой скоростью. Получены формулы, определяющие напряжения в области контакта клина с упругой средой и перемещения точек берегов разреза вне области контакта для некоторых соотношений между параметрами задачи. Установлены условия, при которых происходит отрыв среды от поверхности клина. В отличие от случая движения клина со скоростью, меньшей релеевской [1, 2], когда впереди клина образуется трещина, при движении клина со сверхзвуковой скоростью трещина не образуется. В аналогичной постановке исследовалась [3] контактная задача о движении со сверхвузковой скоростью по поверхности упругой полосы жесткого штампа с плоским гладким основанием.

1. Рассмотрим сначала вспомогательную задачу (плоская деформация) о движении с постоянной сверхзвуковой скоростью $V$ ($V > c_1 > c_2$, $c_1$ и $c_2$ — соответственно скорости звука продольных и поперечных волн в упругой среде) по поверхности упругой полосы толщины $h$ сосредоточенного усилия $P$. Пусть полоса жестко защемлена по основанию, тогда граничные условия вспомогательной задачи в подвижной системе координат, начало которой совмещено с точкой приложения сосредоточенной силы, будут иметь вид ($\delta(x)$ — дельта-функция)

$$\sigma_y = -P\delta(x), \quad \tau_{xy} = 0 \ (y = 0), \quad u = v = 0 \ (y = -h) \qquad (1.1)$$

Известно, что такая задача сводится к нахождению двух волновых функций, связанных через граничные условия, и может быть решена в замкнутом виде [3]. Для системы ударных волн, изображенных на фиг. 1, приведем окончательное выражение для перемещения точек верхней границы полосы в направлении оси $y$

$$v(x, 0) = P\Theta^{-1}[\Pi(x) - D_1\Pi(x + 2\beta h) - D_2\Pi(x + \beta h + \gamma h)] \qquad (1.2)$$

$$\Pi(t) = \begin{cases} 0 & (t > 0) \\ -1 & (t < 0) \end{cases}, \quad \Theta = G\frac{4\gamma(B+1)}{\gamma^2+1}$$

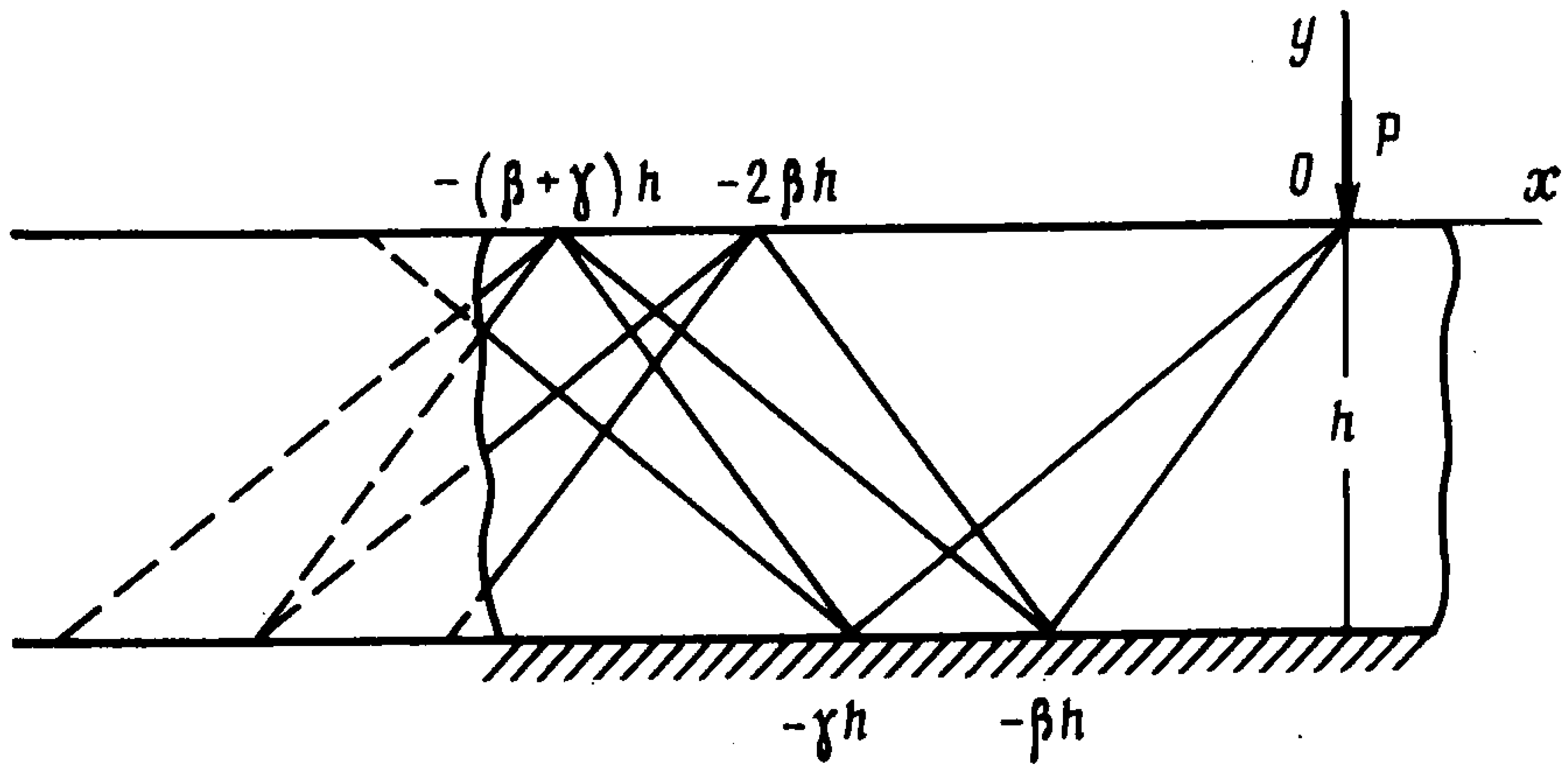
$$D_1 = 2B\frac{\beta\gamma - 1}{A}, \quad D_2 = 4\frac{\gamma^2 - 1}{A}, \quad A = (\beta\gamma + 1)(B + 1)$$

$$B = \frac{(\gamma^2 - 1)^2}{4\beta\gamma}, \quad \beta^2 = \frac{V^2}{c_1^2} - 1, \quad \gamma^2 = \frac{V^2}{c_2^2} - 1$$

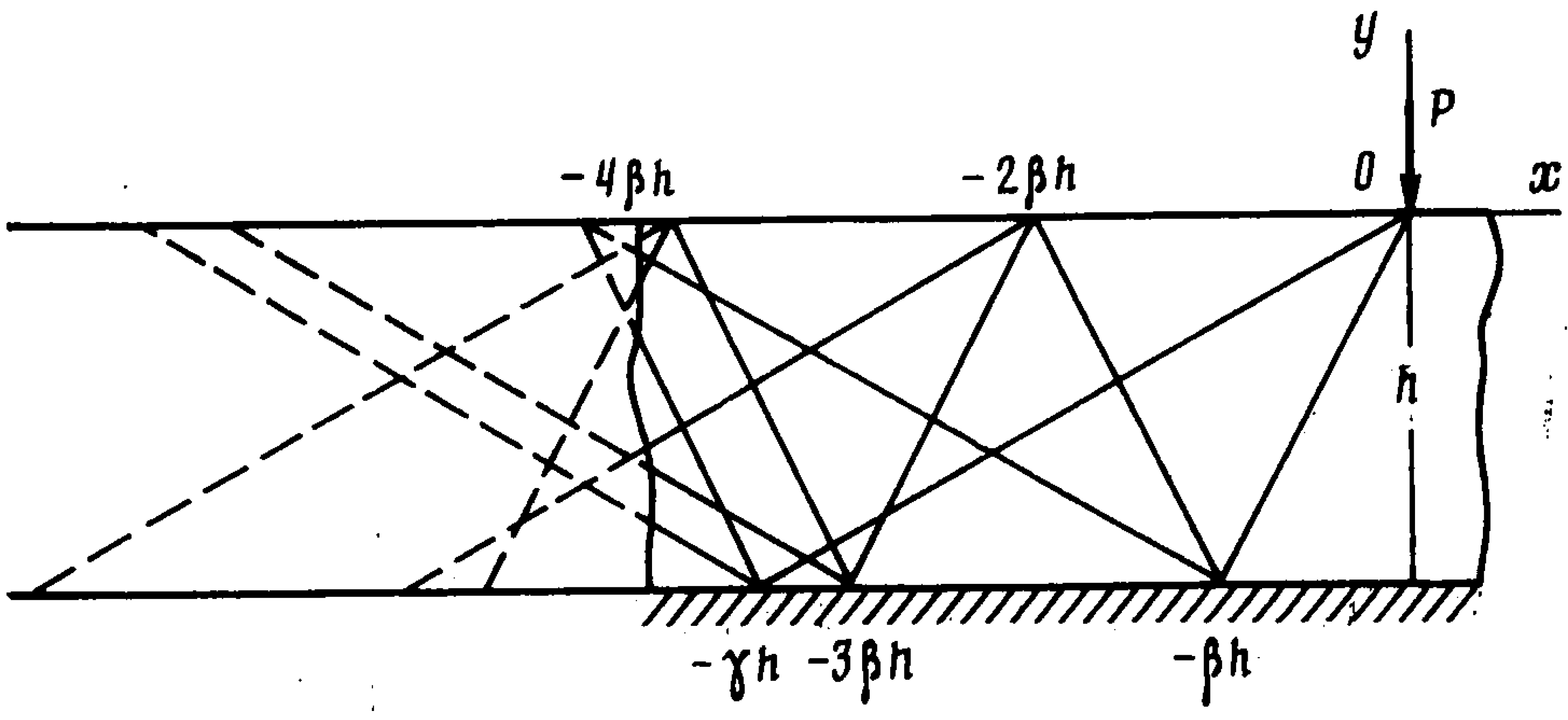
($G$ — модуль сдвига). Формула (1.2) справедлива при всех $x > -2\gamma h$, когда $2\beta > \gamma$, как это имеет место на фиг. 1, а также при всех $x > -4\beta h$ в случае $3\beta > \gamma > 2\beta$. При другой системе ударных волн, изображенных на фиг. 2, выражение для перемещения точек верхней границы полосы в направлении оси $y$ имеет вид

$$v(x, 0) = P\Theta^{-1}[\Pi(x) - D_1\Pi(x + 2\beta h) - D_3\Pi(x + 4\beta h)] \qquad (1.3)$$

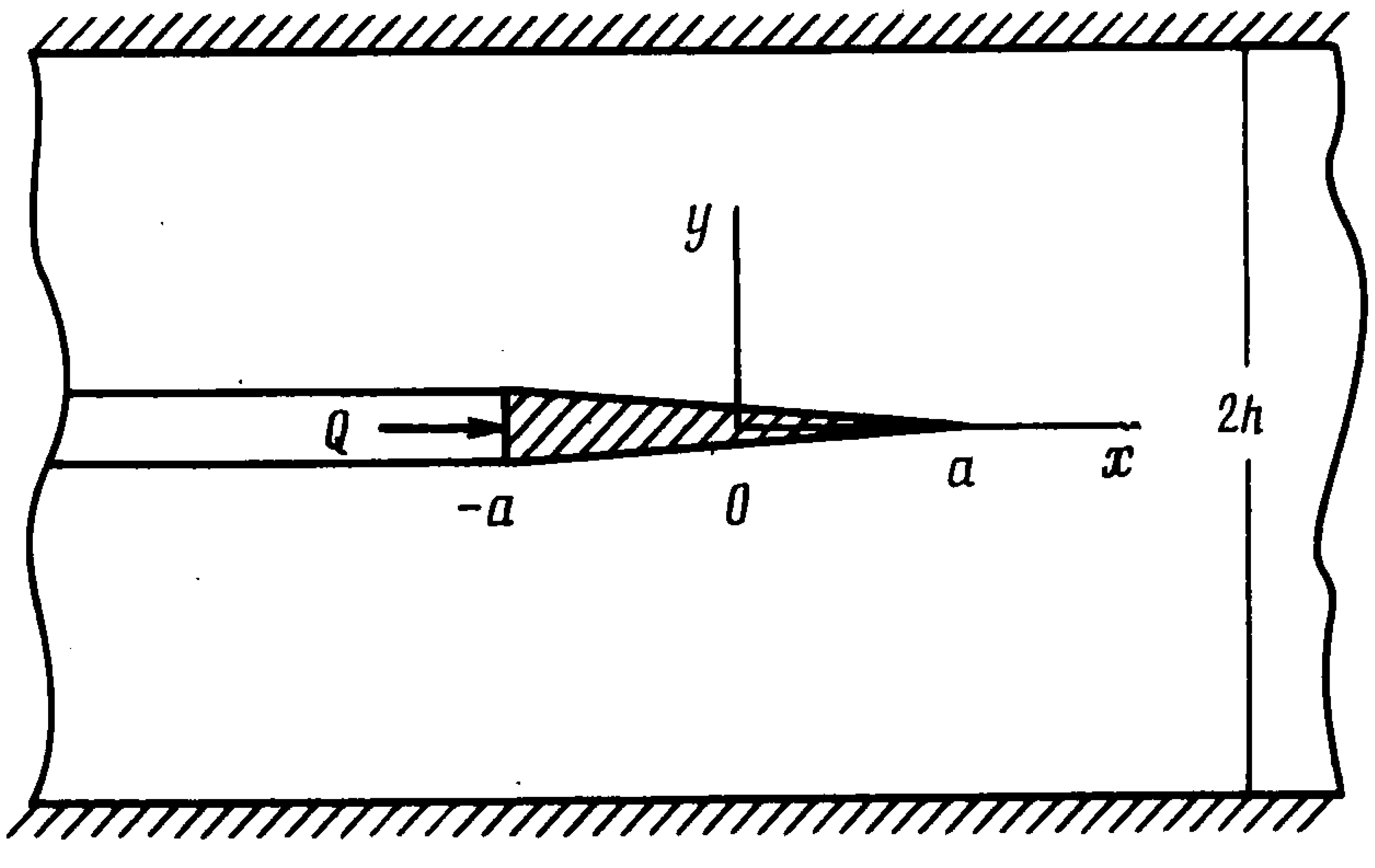
$$D_3 = 2B(\beta\gamma - 1)^2(1 - B)/A^2$$




Фиг. 1




Фиг. 2




Фиг. 3

Формула (1.3) справедлива при всех $x > -(\beta + \gamma)h$, когда $5\beta > \gamma > 3\beta$, а также при всех $x > -6\beta h$, когда $\gamma > 5\beta$ (фиг. 2 соответствует случаю $4\beta > \gamma > 3\beta$).

Положим $V^2/c_1^2 = \sigma$, тогда

$$\beta = \sqrt{\sigma - 1}, \quad \gamma = \sqrt{(\sigma/\varepsilon) - 1}, \quad \varepsilon = (1 - 2\nu)[2(1 - \nu)]^{-1} < {}^1/_2 \tag{1.4}$$

где $\nu$ — коэффициент Пуассона. В таблице даны значения величин $\gamma/\beta$, $B$, $\Theta/G$, $D_1$, $D_2$, $D_3$ в зависимости от параметра $\sigma$. Видно, что в основном $4 > \gamma/\beta > 2$, значения $\gamma/\beta > 4$ достигаются при малых $\varepsilon$ (для слабосжимаемых материалов), а значения $\gamma/\beta < 2$ достигаются при $\varepsilon$, близких к ${}^1/_2$.

Пользуясь принципом суперпозиции, найдем теперь решение задачи о движении со сверхзвуковой скоростью по поверхности упругой полосы распределенной на отрезке $-a \leqslant x \leqslant a$ нормальной нагрузки $q(x)$. На основании формулы (1.2) имеем соотношение

$$v(x, 0) = \Theta^{-1} \int_{-a}^{a} q(\xi) [\Pi(x - \xi) - D_1 \Pi(x + 2\beta h - \xi) - D_2 \Pi(x + \beta h + \gamma h - \xi)] d\xi \tag{1.5}$$

| $\varepsilon$ | $\sigma$ | $\gamma/\beta$ | $B$ | $\Theta/G$ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $^1/_4$ | 1 | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | −2 | 0 | −2 |
| | $1+\varepsilon$ | 4 | 2,25 | 5,2 | 0 | 1,846 | 0 |
| | $1+2\varepsilon$ | 3,162 | 2,530 | 5,262 | 0,323 | 1,756 | −0,0315 |
| | $1+3\varepsilon$ | 2,828 | 2,946 | 5,523 | 0,536 | 1,624 | −0,0950 |
| | $1+4\varepsilon$ | 2,646 | 3,402 | 5,823 | 0,698 | 1,495 | −0,1719 |
| | $\infty$ | 2 | $\infty$ | $\infty$ | 2 | 0 | −2 |
| $^1/_3$ | 1 | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | −2 | 0 | −2 |
| | $1+\varepsilon$ | 3 | 1 | 3,464 | 0 | 2 | 0 |
| | $1+2\varepsilon$ | 2,450 | 1,378 | 3,805 | 0,279 | 1,916 | −0,0106 |
| | $1+3\varepsilon$ | 2,236 | 1,789 | 4,158 | 0,490 | 1,773 | −0,0530 |
| | $1+4\varepsilon$ | 2,121 | 2,210 | 4,493 | 0,658 | 1,627 | −0,1184 |
| | $\infty$ | 1,732 | $\infty$ | $\infty$ | 2 | 0 | −2 |

справедливое при всех $x > -2\gamma h + a$, когда $2\beta > \gamma$, а также при всех $x > -4\beta h + a$, когда $3\beta > \gamma > 2\beta$. Это еще можно трактовать так, что соотношение (1.5) справедливо при $\lambda > \gamma^{-1}$ ($\lambda = h/a$ — относительная толщина полосы), когда $2\beta > \gamma$, а также при $\lambda > (2\beta)^{-1}$, когда $3\beta > > \gamma > 2\beta$. Аналогично на основании формулы (1.3) найдем соотношение

$$v(x,0) = \Theta^{-1} \int_{-a}^{a} q(\xi)\,[\Pi(x-\xi) - D_1\Pi(x+2\beta h-\xi) - D_3\Pi(x+4\beta h-\xi)]\,d\xi \tag{1.6}$$

справедливое при всех $x > -(\beta+\gamma)h + a$ $(\lambda > 2(\beta+\gamma)^{-1})$, когда $5\beta > \gamma > 3\beta$, а также при всех $x > -6\beta h + a$ $(\lambda > (3\beta)^{-1})$, когда $\gamma > > 5\beta$.

2. Перейдем к постановке основной задачи. Пусть упругую полосу толщины $2h$, защемленную по основаниям, рассекает, двигаясь с постоянной скоростью $V > c_1$ по оси $x$, жесткий клин длиной $2a$ и с углом при вершине $2\alpha$ (фиг. 3). К клину приложено толкающее усилие $Q$, действием сил трения в области контакта $|x| \leqslant a$ клина с полосой пренебрегаем. В силу симметрии задачи относительно оси $x$ можем далее рассматривать лишь область $-h \leqslant y \leqslant 0$, а считая, что величина $2\alpha a$ соизмерима с величиной упругих перемещений (т. е. считая, что клин достаточно тонкий) можем сносить граничные условия на ось $x$. С учетом сделанных допущений в подвижной системе координат, связанной с клином, будем иметь

$$\begin{gathered}\tau_{xy}(x,0) = 0, \quad \sigma_y(x,0) = 0 \quad (x < -a)\\ v(x,0) = 0 \ (x > a), \quad v(x,0) = -\alpha(a-x) \quad (|x| \leqslant a)\\ u(x,-h) = v(x,-h) = 0\end{gathered} \tag{2.1}$$

Заметим, что третье условие (2.1) при учете того, что движение клина сверхзвуковое, может быть заменено таким: $\sigma_y(x,0) = 0$ $(x > a)$.

Предположим далее, что относительная толщина полосы $\lambda$ настолько велика, что справедливы формулы (1.5) и (1.6). Тогда, удовлетворяя граничным условиям (2.1), при помощи (1.5) придем в случае $3\beta > \gamma$ к интегральному уравнению относительно контактного давления $q(\xi)$, представляющему собой равенство правой части (1.5) величине $\alpha(x-a)$ $(|x| \leqslant a)$. Аналогично при помощи (1.6) придем в случае $\gamma > 3\beta$ к интегральному уравнению, представляющему собой равенство правой части (1.6) величине $\alpha(x-a)$ $(|x| \leqslant a)$.

Дифференцируя эти интегральные уравнения по $x$ и принимая во внимание, что $\Pi'(t) = \delta(t)$, найдем

$$\int_{-a}^{a} q(\xi)\,[\delta(x-\xi) - D_1\delta(x+2\beta h-\xi) - D\delta(x+\Lambda h-\xi)]\,d\xi = \Theta\alpha \qquad (|x| \leqslant a) \tag{2.2}$$

$$D = D_2, \quad \Lambda = \beta + \gamma \tag{2.3}$$

$$D = D_3, \quad \Lambda = 4\beta \tag{2.4}$$

Если $\lambda > \beta^{-1}$, то на основании известных свойств дельта-функции из (2.2)—(2.4) получим выражение

$$q(x) = \Theta\alpha \tag{2.5}$$

которое одновременно удовлетворяет и исходным интегральным уравнениям. Далее толкающее усилие найдем по формуле

$$Q = 2\alpha \int_{-a}^{a} q(\xi)\,d\xi = 4a\Theta\alpha^2 \tag{2.6}$$

Учитывая соотношение $\int \Pi(t)\,dt = {}^1/_2\,(|t| - t)$, по формулам (1.5), (1.6) и (2.5) можем в каждом конкретном случае найти ширину разреза $\Gamma(x) = -2v(x, 0)$ за проникающим клином.

Из (1.5) определим:

для случая $2\beta > \gamma$

$$\begin{gathered}\Gamma(x) = 2\alpha\,\{2a + E_{12}(x)\,Y_{72}(x) + D_1(x-x_1)\,Y_{21}(x)\} \quad (\gamma - \beta \leqslant \lambda^{-1})\\ \Gamma(x) = 2\alpha\,\{2a + F_{12}(x)\,Y_{74}(x) + E_{12}(x)\,Y_{42}(x) + \\ + D_1(x-x_1)\,Y_{21}(x)\} \quad (\lambda^{-1} < \gamma - \beta < 2\lambda^{-1}) \\ \Gamma(x) = 2\alpha\,\{2a - 2a(D_1 + D_2)\,Y_{76}(x) + F_{12}(x)\,Y_{62}(x) - \\ - 2aD_1Y_{24}(x) + D_1(x-x_1)\,Y_{41}(x)\} \quad (2\lambda^{-1} < \gamma - \beta)\end{gathered} \tag{2.7}$$

для случая $3\beta > \gamma > 2\beta$

$$\begin{gathered}\Gamma(x) = 2\alpha\,\{2a + F_{12}(x)\,Y_{34}(x) + E_{12}(x)\,Y_{42}(x) + \\ + D_1(x-x_1)\,Y_{21}(x)\} \quad (\gamma - \beta < 2\lambda^{-1}) \\ \Gamma(x) = 2\alpha\,\{2a + F_{12}(x)\,Y_{32}(x) - 2aD_1Y_{24}(x) + D_1(x-x_1)\,Y_{41}(x)\} \\ (\gamma - \beta > 2\lambda^{-1},\ 3\beta - \gamma \leqslant 2\lambda^{-1}) \\ \Gamma(x) = 2\alpha\,\{2a - 2a(D_1 + D_2)\,Y_{36}(x) + F_{12}(x)\,Y_{62}(x) - \\ - 2aD_1Y_{24}(x) + D_1(x-x_1)\,Y_{41}(x)\} \quad (3\beta - \gamma > 2\lambda^{-1})\end{gathered} \tag{2.8}$$

Здесь и далее используются обозначения

$$\begin{gathered}x_1 = a - 2\beta h,\ x_2 = a - \beta h - \gamma h,\ x_3 = a - 4\beta h \\ x_4 = -a - 2\beta h,\ x_5 = a - 3\beta h - \gamma h,\ x_6 = -a - \beta h - \gamma h \\ x_7 = a - 2\gamma h,\ x_8 = -a - 4\beta h,\ x_9 = a - 6\beta h \\ Y_{ij}(x) = \Pi(x_i - x)\,\Pi(x - x_j), \quad Y_{ij}(x_i) = Y_{ij}(x_j) = 1 \\ E_{12}(x) = D_1(x-x_1) + D_2(x-x_2), \quad F_{1i}(x) = -2aD_1 + D_i(x-x_i)\end{gathered} \tag{2.9}$$

Аналогично из (1.6) при учете соотношения (2.5) определим

$$\begin{gathered}\Gamma(x) = 2\alpha\,\{2a + F_{13}(x)\,Y_{23}(x) - 2aD_1Y_{34}(x) + D_1(x-x_1)\,Y_{41}(x)\} \\ (0 < \gamma - 3\beta \leqslant 2\lambda^{-1}) \\ \Gamma(x) = 2\alpha\,\{2a - 2a(D_1 + D_3)\,\Pi(x - x_8) + F_{13}(x)\,Y_{83}(x) - \\ - 2aD_1Y_{34}(x) + D_1(x-x_1)\,Y_{41}(x)\} \quad (2\lambda^{-1} < \gamma - 3\beta < 2\beta)\end{gathered} \tag{2.10}$$

Формулами (2.7), (2.8), (2.10) можно пользоваться при соответствующих ограничениях на $x$, указанных при описании выражений (1.5) и (1.6). Как следует из равенств (2.7), (2.8), (2.10), $\Gamma(x)$ — кусочно-линейная функция. При $x_1 \leqslant x \leqslant -a$ ширина разреза постоянна и равна $4\alpha a$. При $x < x_1$ и некоторых соотношениях между параметрами задачи берега разреза вступают в контакт, однако в силу сверхзвукового характера движения клина это не приводит к изменению контактных давлений.

3. Если $\lambda < \beta^{-1}$, но $\lambda > 2(\beta + \gamma)^{-1}$ в случае (2.2), (2.3) или $\lambda > (2\beta)^{-1}$ в случае (2.2), (2.4), то из (2.2), (2.3) и (2.2), (2.4) будем иметь

$$q(x) = \Theta\alpha \quad (x_1 \leqslant x \leqslant a) \tag{3.1}$$
$$q(x) - D_1 q(x + 2\beta h) = \Theta\alpha \quad (-a \leqslant x < x_1)$$

Из условия $x_1 < -x_1 \leqslant x + 2\beta h \leqslant a$ при учете первого соотношения (3.1) следует

$$q(x + 2\beta h) = \Theta\alpha \quad (-a \leqslant x < x_1) \tag{3.2}$$

Из (3.1) и (3.2) получим

$$q(x) = \Theta\alpha \times \begin{cases} 1 & (x_1 \leqslant x \leqslant 0) \\ (1 + D_1) & (-a \leqslant x < x_1) \end{cases} \tag{3.3}$$

Заметим, что в [3] (§ 4, гл. 5) второе соотношение (3.1) ошибочно было принято за разностное уравнение. Вместо формул (4.41)—(4.48) [3] нужно использовать результат (3.3).

Формула (3.3) показывает, что контактное давление $q(x)$ всюду в области контакта $|x| \leqslant a$ при $1 + D_1 > 0$ положительно, а в точке $x = x_1$ при $D_1 \neq 0$ имеет скачок. По формуле (2.6) теперь найдем толкающее усилие $Q$, а по формулам (1.5) и (1.6) — ширину разреза. Проведя выкладки, будем соответственно иметь

$$Q = 4a\Theta\alpha^2 [1 + D_1 (1 - \beta\lambda)] \tag{3.4}$$

$$\Gamma(x) = 2\alpha] \times \begin{cases} [2a + D_1(a + x) + D_2(x - x_2)] & (x \leqslant x_2) \\ [2a + D_1(a + x)] & (x_2 < x \leqslant -a) \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\Gamma(x) = 2\alpha \times \begin{cases} [2a - 2\beta h D_1 + 2D_1^2(\beta h - a) + D_3(x - x_3)] & (x \leqslant x_4) \\ [2a + D_1(a + x) + (D_1^2 + D_3)(x - x_3)] & (x_4 < x \leqslant x_3) \\ [2a + D_1(a + x)] & (x_3 < x \leqslant -a) \end{cases} \tag{3.6}$$

При $1 + D_1 \leqslant 0$ в точке $x = x_1$ наступает отрыв среды от клина (величина $1 + D_1$, например, обращается в нуль при $\varepsilon = 1/4$, $\sigma \approx 1{,}0189$ и $\varepsilon = 1/3$, $\sigma \approx 1{,}0092$). Изменяя для случая $1 + D_1 \leqslant 0$ граничные условия и проведя соответствующие выкладки, найдем

$$q(x) = \Theta\alpha \quad (-a < x_1 \leqslant x \leqslant a), \quad Q = 4a\Theta\alpha^2\lambda\beta \tag{3.7}$$

$$\Gamma(x) = 2\alpha [2\beta h + D_1(x - x_1) + D_2(x - x_2)\Pi(x - x_2)] \; (x \leqslant x_1) \tag{3.8}$$

$$\Gamma(x) = 2\alpha \{2\beta h(1 - D_1) + (x - x_3)[D_1\Pi(x_3 - x) + D_3\Pi(x - x_3)]\} \quad (x \leqslant x_1) \tag{3.9}$$

В формулах (3.5), (3.8), полученных из (1.5) и (3.6), (3.9), полученных из (1.6), необходимо учитывать ограничения на $x$, указанные при описании выражений (1.5) и (1.6).

Если в случае (2.2), (2.4) величина $\lambda < (2\beta)^{-1}$, но $\lambda > 2(\beta + \gamma)^{-1}$, когда $5\beta > \gamma > 3\beta$, или $\lambda > (3\beta)^{-1}$, когда $\gamma > 5\beta$, то будем иметь

$$q(x) = \Theta\alpha \quad (x_1 \leqslant x \leqslant a)$$
$$q(x) - D_1 q(x + 2\beta h) = \Theta\alpha \quad (x_3 \leqslant x < x_1) \tag{3.10}$$
$$q(x) - D_1 q(x + 2\beta h) - D_3 q(x + 4\beta h) = \Theta\alpha \quad (-a \leqslant x < x_3)$$

Из (3.10) при учете значений

$$q(x+2\beta h)=\Theta\alpha\times\begin{cases}1 & (x_3\leqslant x<x_1),\\ (1+D_1) & (-a\leqslant x<x_3)\end{cases}\qquad(3.11)$$

$$q(x+4\beta h)=\Theta\alpha\quad(-a\leqslant x<x_3)$$

определим

$$q(x)=\Theta\alpha\times\begin{cases}1 & (x_1\leqslant x\leqslant a)\\ (1+D_1) & (x_3\leqslant x\leqslant x_1)\\ [D_1(1+D_1)+1+D_3] & (-a\leqslant x<x_3)\end{cases}\qquad(3.12)$$

Если в случае (2.2), (2.3) величина $\lambda<2(\beta+\gamma)^{-1}$, но $\lambda>\gamma^{-1}$, когда $2\beta>\gamma$, или $\lambda>(2\beta)^{-1}$, когда $3\beta>\gamma>2\beta$, то будем иметь соотношения, отличающиеся от (3.10) заменой на $x_3$ на $x_2$ и $D_3q(x+4\beta h)$ на $D_2q(x+\beta h+\gamma h)$.

По аналогии с предыдущим отсюда получим

$$q(x)=\Theta\alpha\times\begin{cases}1 & (x_1\leqslant x\leqslant a)\\ (1+D_1) & (x_2\leqslant x\leqslant x_1)\\ (1+D_1+D_2) & (-a\leqslant x<x_2)\end{cases}\qquad(3.13)$$

Из формул (3.12) и (3.13) видно, что контактное давление $q(x)$ всюду в области контакта $|x|\leqslant a$ положительно, если $1+D_1>0$ и соответственно $1+D_1+D_3>-D_1^2$ или $1+D_1+D_2>0$. Эти условия, как следует из таблицы, при $\sigma\geqslant1+\varepsilon$ всегда выполняются. Аналогично предыдущему для случаев (3.12) и (3.13) могут быть получены выражения, определяющие толкающее усилие $Q$ и ширину разреза $\Gamma(x)$, а также проведено исследование условий отрыва упругой среды от клина.

Заметим, что в случае не слишком малых углов раствора $2\alpha$ проникающего жесткого клина четвертого граничного условия (2.1) нужно было бы записать в виде $v(x,0)=-\sin\alpha\,(a-x)$ $(|x|\leqslant a)$. Раскладывая затем синус в ряд и удерживая члены порядка $\alpha^3$, можно по изложенной выше схеме аналитическим путем получить формулы для контактного давления $q(x)$ с точностью до членов порядка $\alpha^3$ и для толкающего усилия $Q$ с точностью до членов порядка $\alpha^4$. При этом главный член в разложении $Q$ по $\alpha$ без учета сил трения остался бы прежним, а именно, порядка $\alpha^2$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П.* О расклинивании хрупких тел // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 4. С. 667—682.
2. *Сметанин Б. И.* Задачи о расклинивании упругих тел // Статические и динамические смешанные задачи теории упругости. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1983. С. 54—56.
3. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 334 с.



Москва, Ростов н/Д

Поступила в редакцию 12.VI.1989