Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 5, 1990

УДК 539.3:514.86

Г. Л. Бровко

МАТЕРИАЛЬНЫЕ И ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СРЕД

С позиции общей теории определяющих соотношений (ОС) классической механики сплошной среды, основанной на принципах детерминизма и причинности, локальности, независимости от системы отсчета и на гипотезе макрофизической определимости, рассматриваются вопросы обоснованности материальных и пространственных представлений ОС сред, их соответствия (эквивалентности) друг другу, а также вопросы явного разрешения неявных форм ОС (в материальном и пространственном представлениях).

При построении ОС при конечных деформациях для сложных сред и процессов наряду с традиционными подходами механики сплошной среды, непосредственно согласующимися с постулатом макроскопической определимости [1, 2] и, как правило, выраженными изначально в терминах тензоров материального типа, используемых при лагранжевом описании движения среды (см., например, [2—7]), или явно подразумевающими связь с такими тензорами (например, [8—19]), применяются подходы, основанные на введении тензоров пространственного типа, используемых при эйлеровом описании (например, [20—28]). К числу последних относятся многочисленные работы по пластичности, предлагающие экстраполировать тем или иным способом известные при малых деформациях ОС на случай конечных деформаций в эйлеровом описании.

При этом возникают принципиально важные вопросы: 1) законна ли такая экстраполяция с позиции общей классической теории ОС, т. е. согласуется ли в принципе полученное ОС с постулатом макроскопической определимости (пример работы [28] являет один из вариантов такой ошибочной несогласованности), 2) каково пространственное представление (эйлерова форма) построенного или известного материального (лагранжева) ОС и наоборот, 3) если ОС построено в неявной форме, особенно в терминах пространственных тензоров (например, в виде дифференциального уравнения с объективными производными), то разрешимо ли оно однозначно относительно тензора напряжений (т. е. выполнен ли принцип детерминизма) и какова процедура такого решения (интегрирования дифференциальных уравнений с объективными производными). Исследование этих вопросов могло бы содействовать анализу, упорядочению и развитию исследований по построению ОС сложных сред при конечных деформациях в направлении последовательной разработки теории эксперимента.

В данной работе выводится множество общих приведенных форм ОС классической механики сплошной среды, в том числе ОС постулата макроскопической определимости А. А. Ильюшина и ОС Нолла, и получены ответы на сформулированные выше вопросы, проиллюстрированные примерами.

1. Тензорные характеристики механических процессов. Эквивалентность тензоров и отображений. В движении деформируемой среды с лагранжевым законом движения и аффинором деформации

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{a}, t), \quad \mathbf{A} = \nabla_\mathbf{a}\mathbf{f} \equiv \mathbf{QX} \equiv \mathbf{YQ} \tag{1.1}$$

(где $\mathbf{a}$, $\mathbf{x}$ — радиус-векторы точки среды в отсчетной (недеформированной) и актуальной (деформированной) конфигурациях, t — время, $\nabla_\mathbf{a}$ — оператор-градиент по $\mathbf{a}$; $\mathbf{Q}$ — ортогональный, $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ — симметричные правый и левый тензоры полярного разложения $\mathbf{A}$) для описания механических процессов в материальной окрестности точки тела используются тензоры различных рангов r над основным (трехмерным) векторным пространством: скаляры φ ($r = 0$), векторы $\mathbf{u}$, $\mathbf{z}$ ($r = 1$), тензоры $\mathbf{U}$, $\mathbf{Z}$ второго

($r = 2$) и более высоких рангов. Ограничиваясь здесь для простоты обозначений случаем $r \leqslant 2$, выделим подобно [6, 7, 16] множества тензорных характеристик φ, $\mathbf{u}$, $\mathbf{z}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{Z}$, преобразующихся при изменении системы отсчета к характеристикам φ_*, $\mathbf{u}_*$, $\mathbf{z}_*$, $\mathbf{U}_*$, $\mathbf{Z}_*$ по формулам

$$\varphi_* \equiv \varphi, \quad \mathbf{u}_* \equiv \mathbf{u}, \quad \mathbf{z}_* \equiv \boldsymbol{\Theta}\mathbf{z}, \quad \mathbf{U}_* \equiv \mathbf{U}, \quad \mathbf{Z}_* \equiv \boldsymbol{\Theta}\mathbf{Z}\boldsymbol{\Theta}^T \tag{1.2}$$

где $\boldsymbol{\Theta} \equiv \boldsymbol{\Theta}(t)$ — ортогональный тензор перехода к новой системе отсчета.

Примерами таких величин могут служить для φ плотность массы, внутренней энергии, а также скалярные инварианты остальных величин (1.2), для $\mathbf{u}$ и $\mathbf{z}$ — векторы элементарных материальных волокон соответственно в отсчетной $\delta\mathbf{a}$ и актуальной $\delta\mathbf{x}$ конфигурациях, а также собственные векторы любых тензоров $\mathbf{U}$ и $\mathbf{Z}$ из (1.2) соответственно, примерами для $\mathbf{U}$ и $\mathbf{Z}$ — соответственно правый $\mathbf{X}$ и левый $\mathbf{Y}$ тензоры искажений из (1.1), меры деформации Коши $\mathbf{C} = \mathbf{X}^2$ и Фингера $\mathbf{F} = \mathbf{Y}^2$, тензоры деформации Грина $\mathbf{E}_\mathrm{I} = {}^1/_2(\mathbf{C} - \mathbf{I})$ и Альманзи $\mathbf{E}_\mathrm{I} = {}^1/_2(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-1})$ ($\mathbf{I}$ — единичный тензор), материальная производная $\mathbf{E}_\mathrm{I}^{\cdot}$ и тензор скоростей деформаций $\mathbf{V}$, тензоры напряжений Пиолы — Кирхгоффа второго рода $J\boldsymbol{\Sigma}_\mathrm{I} = J\mathbf{A}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{A}^{-1T}$ и Коши $\mathbf{S}$ ($J = |\det \mathbf{A}|$) и т. п. [1—29].

Тензоры $\mathbf{u}$, $\mathbf{U}$ и др. преобразующиеся подобно им ($r \geqslant 1$), назовем материально (отсчетно) ориентированными (или для краткости — правыми), а тензоры $\mathbf{z}$, $\mathbf{Z}$ и подобные им ($r \geqslant 1$) — пространственно ориентированными (или кратко — левыми). Все тензоры ($r \geqslant 0$) из (1.2) назовем объективными (в литературе последних лет название «объективные», или «независимые от системы отсчета», или «индифферентные» часто относят лишь к левым тензорам (см., например, [9—12, 16])). Они, как показывают приведенные выше примеры, могут служить для объективного описания механических процессов: материально ориентированные — с позиции наблюдателя, связанного с материальной частицей (в отсчетной конфигурации), пространственно ориентированные — с позиции пространственного наблюдателя, объективные скаляры — с обеих точек зрения. Так, с этих точек зрения деформированное и напряженное состояние в материальной частице среды полностью описывается соответственно правыми тензорами $\mathbf{X}$ и $\boldsymbol{\Sigma}_\mathrm{I}$ (при лагранжевом описании), и левыми тензорами $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{S}$ (при эйлеровом описании).

Основываясь далее на лагранжевом (материальном, отсчетном) описании, будем рассматривать все объективные тензоры. Обозначим $M^{(r)}$ и $S^{(r)}$ ($r \geqslant 1$) множества правых и левых тензорных процессов ранга r а $M^{(0)} \equiv S^{(0)}$ — множество объективных скаляров для данной материальной частицы. Ясно, что $M^{(r)}$, $S^{(r)}$ составляют лишь подмноджества всех механических тензорных характеристик (тензорных процессов).

Подобно известным связям $\delta\mathbf{x} = \mathbf{A}\delta\mathbf{a}$, $\mathbf{Y} = \mathbf{Q}\mathbf{X}\mathbf{Q}^T$, $\mathbf{S} = \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}_\mathrm{I}\mathbf{A}^T$ правые и левые тензоры, описывающие с указанных точек зрения одни и те же механические процессы, могут быть связаны соотношениями эквивалентности вида

$$\mathbf{z} = \boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}, \quad \mathbf{Z} = \boldsymbol{\Delta}\mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda} \tag{1.3}$$

где $\boldsymbol{\Delta}$ и $\boldsymbol{\Lambda}$ — невырожденные тензоры второго ранга, преобразующиеся при изменении системы отсчета подобно (1.2) по формулам

$$\boldsymbol{\Delta}_* \equiv \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\Delta}, \quad \boldsymbol{\Lambda}_* \equiv \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Theta}^T \tag{1.4}$$

Наиболее простой случай соотношений типа (1.3), реализованный для $\boldsymbol{\Delta} \equiv \boldsymbol{\Lambda}^T$, рассмотрен в [29]. Не ограничиваясь этим случаем, отметим, что тензоры $\boldsymbol{\Delta}$, $\boldsymbol{\Lambda}$, удовлетворяющие (1.4), допускают однозначное представление вида

$$\Delta \equiv \Theta\Xi, \quad \Lambda \equiv \Upsilon Q^T \ (\Xi, \Upsilon \in M^{(2)}) \tag{1.5}$$

где Q из (1.1). Таким образом, выбор тензоров Δ, Λ, определяющий соотношения эквивалентности (1.3), сводится к выбору правых тензоров Ξ, Υ. Если тензоры Δ, Λ (или Ξ, Υ) определяются процессом аффинора деформации **A** данной материальной частицы:

$$\Delta = l\,[\mathbf{A}], \ \Lambda = m\,[\mathbf{A}], \ \Xi = l_0\,[\mathbf{A}], \ \Upsilon = m_0\,[\mathbf{A}] \tag{1.6}$$

то их выбор сводится к выбору отображений l, m, удовлетворяющих (1.4), или l_0, m_0, принимающих значения в $M^{(2)}$.

Для выбранных Δ, Λ соотношения (1.3) при учете (1.4) или (1.5) устанавливают взаимно однозначное соответствие между множествами $M^{(r)}$ и $S^{(r)}$ тензорных процессов ранга r, а также для любого отображения $L_M: M^{(p)} \to M^{(q)}$ индуцируют действие отображения L_S: $S^{(p)} \to S^{(q)}$:

$$L_S[\varphi] = L_M[\varphi] \quad (p = q = 0), \quad L_S[\varphi] = \Delta L_M[\varphi] \quad (p = 0, \quad q = 1)$$

$$L_S[\varphi] = \Delta L_M[\varphi]\Lambda \quad (p = 0, \ q = 2), \quad L_S[\mathbf{z}] = L_M[\Delta^{-1}\mathbf{z}] \quad (p = 1, \ q = 0)$$

$$L_S[\mathbf{z}] = \Delta L_M[\Delta^{-1}\mathbf{z}] \quad (p = q = 1), \quad L_S[\mathbf{z}] = \Delta L_M[\Delta^{-1}\mathbf{z}]\Lambda \quad (p = 1, q = 2)$$

$$L_S[\mathbf{Z}] = L_M[\Delta^{-1}\mathbf{Z}\Lambda^{-1}] \quad (p = 2, \ q = 0)$$

$$L_S[\mathbf{Z}] = \Delta L_M[\Delta^{-1}\mathbf{Z}\Lambda^{-1}] \quad (p = 2, q = 1) \tag{1.7}$$

$$L_S[\mathbf{Z}] = \Delta L_M[\Delta^{-1}\mathbf{Z}\Lambda^{-1}]\Lambda \quad (p = q = 2)$$

и наоборот, для любого $L_S: S^{(p)} \to S^{(q)}$, используя формулы, обратные к (1.7), получаем $L_M: M^{(p)} \to M^{(q)}$. В частности, если $L_M: M^{(r)} \to M^{(r)}$ — оператор материального дифференцирования, то, обозначая его точкой: $(\cdot)^{\bullet}$, а его пространственный аналог $L_S[\cdot]$ — через $D[\cdot]$, получим

$$D[\varphi] \equiv \varphi^{\bullet} \ (r = 0), \ D[\mathbf{z}] \equiv \Delta(\Delta^{-1}\mathbf{z})^{\bullet} \equiv \mathbf{z}^{\bullet} - \mathbf{G}_\Delta\mathbf{z} \ (r = 1),$$

$$D[\mathbf{Z}] \equiv \Delta(\Delta^{-1}\mathbf{Z}\Lambda^{-1})^{\bullet}\Lambda \equiv \mathbf{Z}^{\bullet} - \mathbf{G}_\Delta\mathbf{Z} - \mathbf{Z}\mathbf{G}_\Lambda \quad (r = 2) \tag{1.8}$$

$$(\mathbf{G}_\Delta = \Delta^{\bullet}\Delta^{-1}, \quad \mathbf{G}_\Lambda = \Lambda^{-1}\Lambda^{\bullet})$$

При помощи соотношений типа (1.3), (1.8) с учетом (1.6) на базе левых тензоров $\mathbf{V}$, $\mathbf{S} \in S^{(2)}$ ($\mathbf{V} = \mathrm{sym}\,(\mathbf{A}^{\bullet}\mathbf{A}^{-1})$ — тензор скоростей деформаций, S — тензор напряжений Коши) могут быть введены тензорные меры деформаций $\Psi \in M^{(2)}$, $\mathbf{E} \in S^{(2)}$ и напряжений $\Sigma \in M^{(2)}$ уравнениями

$$\Psi^{\bullet} = \Delta_1^{-1}\mathbf{V}\Lambda_1^{-1}, \quad D[\mathbf{E}] = \mathbf{V}, \quad \Sigma = \Delta_2^{T}\mathbf{S}\Lambda_2^{T} \tag{1.9}$$

где Δ_l, Λ_l ($l = 1, 2$) — невырожденные тензоры, удовлетворяющие соотношениям (1.4), (1.6), $D_1[\cdot] \equiv D[\cdot]$ из (1.8) с $\Delta \equiv \Delta_1$, $\Lambda \equiv \Lambda_1$, и тогда $\mathbf{E} \equiv \Delta\Psi\Lambda$.

Формулы (1.8), (1.9) охватывают как частные случаи известные [2—27, 29] производные левых векторов и тензоров, а также тензорные меры деформаций и напряжений, получаемые различным выбором Δ_l, Λ_l ($l = 1, 2$).

2. Независимость отображений и уравнений от системы отсчета. Для описания связей механических процессов в данной материальной окрестности точки тела, как правило, используются отображения (функции, функционалы, операторы), не зависящие от системы отсчета, т. е. правила задания (определения) их одинаковы во всех системах отсчета. А именно, отображение $L: \Gamma \to \Pi$, где Γ и Π — множества каких-либо наборов $\gamma \in \Gamma$ и $\pi \in \Pi$ скалярных, векторных, тензорных характеристик механических процессов, будем называть не зависящим от системы отсчета, если при переходе к произвольной новой системе отсчета (когда γ, π, Γ, Π, L преобразуются к γ_*, π_*, Γ_*, Π_*, L_*) имеем $\Gamma_* = \Gamma$, $\Pi_* = \Pi$ (сохранение области определения и области значений), а также любое из следующих двух (равносильных) утверждений:

$$L_* = L, \ \pi_* = L[\gamma_*], \ \forall\gamma \in \Gamma \tag{2.1}$$

Примерами таких отображений для различных Г и П могут служить операторы дифференцирования, интегрирования по времени, операции сложения, умножения скалярных, векторных и тензорных величин (процессов). В случаях, когда аргументы или значения отображений L преобразуются при переходе к новой системе отсчета по определенным формулам (например, вида (1.2) или (1.4)), для отображения L, не зависящего от системы отсчета, удается получить универсальное каноническое представление (общую приведенную форму). Такой пример дает

Лемма 1. Если выполнены соотношения (1.4) (или (1.5)) и отображения l и m (или l_0 и m_0) в (1.6) не зависят от системы отсчета, то отображения l_0 и m_0 (или l и m) не зависят от системы отсчета, и имеют место представления:

$$\begin{gathered} l[\mathbf{A}] = \mathbf{Q}l[\mathbf{X}] \equiv \mathbf{Q}l_0[\mathbf{X}], \quad m[\mathbf{A}] = m[\mathbf{X}]\mathbf{Q}^T \equiv m_0[\mathbf{X}]\mathbf{Q}^T \\ l_0[\mathbf{A}] = l_0[\mathbf{X}] \equiv l[\mathbf{X}], \quad m_0[\mathbf{A}] = m_0[\mathbf{X}] \equiv m[\mathbf{X}] \end{gathered} \tag{2.2}$$

Представляют интерес операторы L_M и L_S из (1.7).

Лемма 2. Отображение $L = L_M : M^{(p)} \to M^{(q)}$ не зависит от системы отсчета тогда и только тогда, когда оно инвариантно относительно сдвигов временного аргумента:

$$\pi(t) = L[\gamma(\tau)] \Rightarrow \pi(t + c) = L[\gamma(r + c)], \ \forall c = \text{const}$$

Для таких L_M отображения L_S из (1.7), рассматриваемые как операторы лишь над $\mathbf{z} \in S^{(1)}$, $\mathbf{Z} \in S^{(2)}$ и т. п. ($p, q \geqslant 1$), не являются, вообще говоря, независимыми от системы отсчета. Однако в их определение (1.7) входят тензоры $\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{\Lambda}$ из (1.4), т. е. L_S параметризованы тензорами $\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{\Lambda}$, и тогда L_S, рассматриваемые как отображения пар тензоров $\gamma = \{\mathbf{z}; \mathbf{\Delta}\}$ или троек тензоров $\gamma = \{\mathbf{Z}; \mathbf{\Delta}, \mathbf{\Lambda}\}$ в $S^{(q)}$ и т. п., не зависят от системы отсчета в смысле (2.1).

Это видно из следующего более общего утверждения (далее ограничимся тензорами лишь второго ранга $\mathbf{U}$, $\mathbf{Z}$).

Лемма 3. Пусть для тензорных процессов $\mathbf{U} \in M^{(2)}$ и $\mathbf{Z} \in S^{(2)}$ выполнены соотношения (1.3)—(1.5) с невырожденными $\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{\Lambda}$ и заданы параметризованные тензорами $\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{\Lambda}$ отображения $L_0[\mathbf{U}; \mathbf{\Delta}, \mathbf{\Lambda}]$ и $L_1[\mathbf{Z}; \mathbf{\Delta}, \mathbf{\Lambda}]$ со значениями в множестве тензорных процессов второго ранга, в любой системе отсчета взаимно однозначно связанные соотношением типа (1.7) и обратным к нему:

$$\begin{gathered} L_1[\mathbf{Z}; \mathbf{\Delta}, \mathbf{\Lambda}] = \mathbf{\Delta}L_0[\mathbf{\Delta}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{\Lambda}^{-1}; \mathbf{\Delta}, \mathbf{\Lambda}]\mathbf{\Lambda} \\ L_0[\mathbf{U}; \mathbf{\Delta}, \mathbf{\Lambda}] = \mathbf{\Delta}^{-1}L_1[\mathbf{\Delta}\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}; \mathbf{\Delta}, \mathbf{\Lambda}]\mathbf{\Lambda}^{-1} \end{gathered} \tag{2.3}$$

Тогда: 1) L_0 принимает значения в $M^{(2)}$ в том и только в том случае, когда L_1 принимает значения в $S^{(2)}$); 2) L_0 и L_1 не зависят от системы отсчета лишь одновременно; 3) L_0 и L_1 изотропны по совокупности аргументов лишь одновременно; 4) если L_0 и L_1 не зависят от системы отсчета и принимают значения в $M^{(2)}$ и $S^{(2)}$ соответственно, то они допускают следующие представления (общие приведенные формы):

$$\begin{gathered} L_0[\mathbf{U}; \mathbf{\Delta}, \mathbf{\Lambda}] \equiv L_{00}[\mathbf{U}; \mathbf{\Xi}, \mathbf{\Upsilon}] \equiv \mathbf{\Xi}^{-1}L_{10}[\mathbf{\Xi}\mathbf{U}\mathbf{\Upsilon}; \mathbf{\Xi}, \mathbf{\Upsilon}]\mathbf{\Upsilon}^{-1} \\ L_1[\mathbf{Z}; \mathbf{\Delta}, \mathbf{\Delta}] \equiv \mathbf{Q}L_{10}[\mathbf{Q}^T\mathbf{Z}\mathbf{Q}; \mathbf{\Xi}, \mathbf{\Upsilon}]\mathbf{Q}^T \equiv \mathbf{\Delta}L_{00}[\mathbf{\Delta}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{\Lambda}^{-1}; \mathbf{\Xi}, \mathbf{\Upsilon}]\mathbf{\Lambda} \end{gathered} \tag{2.4}$$

где L_{00} и L_{10} инвариантны относительно сдвигов временного аргумента.

Следствие. 1. Параметризованное тензорами $\boldsymbol{\Delta}$, $\boldsymbol{\Lambda}$ отображение L_S из (1.7) не зависит от системы отсчета лишь одновременно с L_M.

Следствие 2. Если в условиях леммы 3 в (1.5) выбраны $\boldsymbol{\Xi} \equiv \boldsymbol{\Upsilon} \equiv \mathbf{I}$, то приведенные формы (2.4) имеют простой вид:

$$L_0 [\mathbf{U};\ \boldsymbol{\Delta},\ \boldsymbol{\Lambda}] \equiv L_{00} [\mathbf{U}],$$
$$L_1 [\mathbf{Z};\ \boldsymbol{\Delta},\ \boldsymbol{\Lambda}] \equiv \mathbf{Q}L_{00} [\mathbf{Q}^T\mathbf{Z}\mathbf{Q}]\, \mathbf{Q}^T \equiv \mathbf{Q}L_{00} [\mathbf{U}]\, \mathbf{Q}^T \qquad (2.5)$$
$$(L_{00} [\mathbf{U}] \equiv L_0 [\mathbf{U};\ \mathbf{I},\ \mathbf{I})]$$

Пример 1. Пусть

$$L_0 [\mathbf{U};\ \boldsymbol{\Delta},\ \boldsymbol{\Lambda}] \equiv f_0 (\mathbf{U},\ \mathbf{U}^{\cdot}\ ,\ \ldots,\ \mathbf{U}^{(k)};\ \boldsymbol{\Xi},\ \boldsymbol{\Upsilon})$$

— тензорнозначная (второго ранга) функция от текущих значений аргументов. Тогда согласно (2.3), (2.4)

$$L_1 [\mathbf{Z}; \boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{\Lambda}] \equiv \boldsymbol{\Delta} f_0 (\boldsymbol{\Delta}^{-1}\mathbf{Z}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}, \boldsymbol{\Delta}^{-1}D [\mathbf{Z}]\, \boldsymbol{\Lambda}^{-1}, \ldots, \boldsymbol{\Delta}^{-1}D [\mathbf{Z}]\, \boldsymbol{\Lambda}^{-1}; \boldsymbol{\Xi}, \boldsymbol{\Upsilon})\, \boldsymbol{\Lambda} =$$
$$=: f_1 (\mathbf{Z}, D [\mathbf{Z}], \ldots, D^k [\mathbf{Z}]; \boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{\Lambda})$$

— также тензорнозначная функция. В частности, при $\boldsymbol{\Xi} \equiv \boldsymbol{\Upsilon} \equiv \mathbf{I}$ имеем (2.5) с

$$L_{00} [\mathbf{U}] \equiv f_0 (\mathbf{U},\ \mathbf{U}^{\cdot},\ \ldots,\ \mathbf{U}^{(k)};\ \mathbf{I},\ \mathbf{I}) =: f (\mathbf{U},\ \mathbf{U}^{\cdot}\ ,\ \ldots,\ \mathbf{U}^{(k)})$$

причем, если f_0 и f_1 (а значит, и f) изотропны по совокупности переменных, то (2.5) принимает вид

$$L_0 [\mathbf{U}; \boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{\Lambda}] \equiv f (\mathbf{U}, \mathbf{U}^{\cdot}, \ldots, \mathbf{U}^{(k)})$$
$$L_1 [\mathbf{Z}; \boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{\Lambda}] \equiv f (\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^{\circ}, \ldots, \mathbf{Z}^{\circ(k)})$$

где $\mathbf{Z}^{\circ}$, $\mathbf{Z}^{\circ\circ}$, . . ., $\mathbf{Z}^{\circ(k)}$ — нейтральные производные [6, 7, 11—13, 15—17, 20] до порядка k включительно.

Лемма 3 устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами параметризованных тензорами $\boldsymbol{\Delta}$, $\boldsymbol{\Lambda}$ отображений L_0 и L_1, их свойствами и дает их приведенные формы. Следствия 1 и 2 показывают, что отсутствие параметризации отображения L_0 (когда $L_0 = L_M$) не снимает параметризации отображения L_1 ($L_1 = L_S$) и не приводит к существенному упрощению свойств (лемма 2) или общих приведенных форм (2.4) отображений $L_0 = L_M$ и $L_1 = L_S$. Напротив, отсутствие параметризации отображения L_1, не зависящего от системы отсчета, приводит к существенно более узкому подклассу отображений L_1 и их материальных аналогов L_0, и к приведенным формам более специального вида, чем (2.4).

Аналогичные понятия и утверждения можно распространить на случай, когда соответствие между тензорными процессами γ и π задается в неявной форме, а именно, в виде уравнения, вообще говоря, параметризованного совокупностью χ некоторых других тензорных процессов:

$$H\ [\gamma\ (\tau),\ \ \pi\ (\tau);\ \ \chi\ (\tau)] = 0 \qquad (2.6)$$

Назовем уравнение (2.6) не зависящим от системы отсчета, если во всех системах отсчета оно имеет одно и то же множество решений — наборов тензорных процессов $\{\gamma,\ \pi;\ \chi\}$, т. е. ядро H сохраняется:

$$H = 0 \Leftrightarrow H_* = 0\ \ (\mathrm{Ker}\, H = \mathrm{Ker}\, H_*) \qquad (2.7)$$

Очевидно, что в случае однозначной разрешимости уравнения (2.6) относительно π в виде некоторого отображения $L\ [\gamma;\ \chi]$ определение (2.7) соответствует независимости L от системы отсчета в смысле (2.1). С другой стороны, если H — независимое от системы отсчета отображение в смысле (2.1), то уравнение (2.6) не зависит от системы отсчета в смысле (2.7). Для уравнений (2.6), (2.7) справедливы утверждения, аналогичные приведенным выше для операторов вида (2.1).

Лемма 4. Пусть для тензорных процессов $\mathbf{U}$, $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Z}$, $\mathbf{T}$, эквивалентных в смысле (1.3) попарно: $\mathbf{Z} = \boldsymbol{\Delta}_1\mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda}_1$, $\mathbf{T} = \boldsymbol{\Delta}_2^{-1T}\mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}_2^{-1T}$, где $\boldsymbol{\Delta}_l$, $\boldsymbol{\Lambda}_l$ $(l = 1, 2)$ невырожденны и удовлетворяют соотношениям (1.4), (1.5), заданы уравнения $H_0[\mathbf{U}, \mathbf{P}; \Delta_l, \Lambda_l] = 0$ и $H_1[\mathbf{Z}, \mathbf{T}; \Delta_l, \Lambda_l] = 0$, связанные при указанных $\mathbf{U}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{T}$ соотношениями эквивалентности, т. е.

$$
\begin{aligned}
H_1[\mathbf{Z}, \mathbf{T}; \Delta_l, \Lambda_l] = 0 \Leftrightarrow H_0[\Delta_1^{-1}\mathbf{Z}\Lambda_1^{-1}, \Delta_2{}^T\mathbf{T}\Lambda_2{}^T; \Delta_l, \Lambda_l] = 0 \\
H_0[\mathbf{U}, \mathbf{P}; \Delta_l, \Lambda_l] = 0 \Leftrightarrow H_1[\Delta_1\mathbf{U}\Lambda_1, \Delta_2^{-1T}\mathbf{P}\Lambda_2^{-1T}; \Delta_l, \Lambda_l] = 0
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Тогда: 1) $\mathbf{U}, \mathbf{P} \in M^{(2)} \Leftrightarrow \mathbf{Z}, \mathbf{T} \in S^{(2)}$; 2) уравнения $H_0 = 0$ и $H_1 = 0$ не зависят от системы отсчета лишь одновременно; 3) уравнения $H_0 = 0$ и $H_1 = 0$ изотропны по совокупности своих неизвестных (и параметров) лишь одновременно; 4) если $\mathbf{U}, \mathbf{P} \in M^{(2)}$, $\mathbf{Z}, \mathbf{T} \in S^{(2)}$ и уравнения $H_0 = 0$ и $H_1 = 0$ не зависят от системы отсчета, то они допускают следующие приведенные формы:

$$
\begin{aligned}
H_0[\mathbf{U}, \mathbf{P}; \Delta_l, \Lambda_l] = 0 \Leftrightarrow H_{00}[\mathbf{U}, \mathbf{P}; \Xi_l, \Upsilon_l] = 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow H_{10}[\Xi_1\mathbf{U}\Upsilon_1, \Xi_2^{-1T}\mathbf{P}\Upsilon_2^{-1T}; \Xi_l, \Upsilon_l] = 0 \\
H_1[\mathbf{Z}, \mathbf{T}; \Delta_l, \Lambda_l] = 0 \Leftrightarrow H_{10}[\mathbf{Q}^T\mathbf{Z}\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^T\mathbf{T}\mathbf{Q}; \Xi_l, \Upsilon_l] = 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow H_{00}[\Delta_1^{-1}\mathbf{Z}\Lambda^{-1}, \Delta_2{}^T\Lambda_2{}^T; \Xi_l, \Upsilon_l] = 0
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

где $H_{00} = 0$ и $H_{10} = 0$ инвариантны относительно сдвига временного аргумента.

Утверждения следствий 1 и 2 аналогично переносятся на случай уравнений (2.8), (2.9). Так, при $\Xi_l \equiv \Upsilon_l \equiv \mathbf{I}$ получаем (2.9) в виде:

$$
\begin{aligned}
H_0[\mathbf{U}, \mathbf{P}; \Delta_l, \Lambda_l] = 0 \Leftrightarrow H_{00}[\mathbf{U}, \mathbf{P}] = 0 \\
H_1[\mathbf{Z}, \mathbf{T}; \Delta_l, \Lambda_l] = 0 \Leftrightarrow H_{00}[\mathbf{Q}^T\mathbf{Z}\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^T\mathbf{T}\mathbf{Q}] = 0
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Пример 2. Аналогично указанному в примере 1 зададим уравнение $H_0 = 0$ в виде обыкновенного дифференциального уравнения

$$h_0(\mathbf{U}, \mathbf{U}^{\cdot}, \ldots, \mathbf{U}^{(k)}, \mathbf{P}, \mathbf{P}^{\cdot}, \ldots, \mathbf{P}^{(m)}; \Xi_l, \Upsilon_l) = 0$$

Тогда по (2.8), (2.9) имеем уравнение $H_1 = 0$ в виде

$$
\begin{aligned}
h_0(\Delta_1^{-1}\mathbf{Z}\Lambda_1^{-1}, \Delta_1^{-1}D_1[\mathbf{Z}]\Lambda_1^{-1}, \ldots, \Delta_1^{-1}D_1{}^k[\mathbf{Z}]\Lambda_1^{-1} \\
\Delta_2{}^T\mathbf{T}\Lambda_2{}^T\Delta_2{}^TD_2[\mathbf{T}]\Lambda_2{}^T, \ldots, \Delta_2{}^TD_2[\mathbf{T}]\Lambda_2{}^T; \Xi_l, \Upsilon_l) = 0
\end{aligned}
$$

т. е. после переобозначений

$$h_1(\mathbf{Z}, D_1[\mathbf{Z}], \ldots, D_1{}^k[\mathbf{Z}], \mathbf{T}, D_2[\mathbf{T}], \ldots, D_2{}^m[\mathbf{T}]; \Delta_l, \Lambda_l) = 0$$

При $\Xi_l \equiv \Upsilon_l \equiv \mathbf{I}$ имеем (2.10) с

$$H_{00}[\mathbf{U}, \mathbf{P}] \equiv h_0(\mathbf{U}, \mathbf{U}^{\cdot}, \ldots, \mathbf{U}^{(k)}, \mathbf{P}, \mathbf{P}^{\cdot}, \ldots, \mathbf{P}^{(m)}; \mathbf{I}, \mathbf{I}) =: h(\mathbf{U}, \mathbf{U}^{\cdot}, \ldots, \mathbf{U}^{(k)}, \mathbf{P}, \mathbf{P}^{\cdot}, \ldots, \mathbf{P}^{(m)})$$

причем, если уравнения $h_0 = 0$ (и $h_1 = 0$), а значит, и $h = 0$ изотропны по совокупности неизвестных, то уравнение $H_1 = 0$ принимает вид

$$h(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^{\circ}, \ldots, \mathbf{Z}^{\circ(k)}, \mathbf{T}, \mathbf{T}^{\circ}, \ldots, \mathbf{T}^{\circ(m)}) = 0$$

3. Определяющие соотношения (ОС): явные и неявные приведенные формы. В механике сплошной среды при построении ОС, связывающих характеристики напряженного и деформированного состояния (ограничимся изотермическими процессами), принимаются основные принципы: детерминизма и причинности, локальности, независимости от системы отсчета. В классической теории ОС, предусматривающей выполнение гипотезы макрофизической определимости [1, 2], в качестве характеристик напряженного и деформированного состояния используются классические тензорные меры напряжений и деформаций второго ранга, в принципе воспроизводимые в М-опытах [1] с однородными образцами и их состояниями (назовем меры напряжений σ и деформаций ε, воспроизводимые в таких опытах, макроскопическими).

В качестве макроскопических мер ε и σ могут быть использованы аффинор деформации $\mathbf{A}$, тензор напряжений Коши $\mathbf{S}$, различные правые и левые меры, включая (1.9), и другие. Правыми мерами напряжений и деформаций назовем любые правые тензорные процессы второго ранга $\sigma_0, \varepsilon_0 \in M^{(2)}$, истории которых до любого момента t взаимно однозначно и независимо от системы отсчета связаны с историями до момента t тензоров Σ_{I} и $\mathbf{X}$, причем ε_0 и $\mathbf{X}$ связаны независимо:

$$\begin{gathered}\varepsilon_0(\mathbf{a}, t) = \operatorname{def}[\mathbf{X}(\mathbf{a}, \tau)]_{\tau \leqslant t}, \quad \sigma_0(\mathbf{a}, t) = \operatorname{str}[\mathbf{X}(\mathbf{a}, \tau), \Sigma_{\mathrm{I}}(\mathbf{a}, \tau)]_{\tau \leqslant t} \\ \mathbf{X}(\mathbf{a}, t) = \operatorname{Def}[\varepsilon_0(\mathbf{a}, \tau)]_{\tau \leqslant t}, \quad \Sigma_{\mathrm{I}}(\mathbf{a}, t) \operatorname{Str}[\varepsilon_0(\mathbf{a}, \tau), \sigma_0(\mathbf{a}, t)]_{\tau \leqslant t}\end{gathered} \tag{3.1}$$

Левыми мерами напряжений и деформаций σ_1, ε_1 назовем любые пространственные аналоги тензоров σ_0, ε_0, построенные подобно (1.9) по (1.3), (1.6), (2.2):

$$\sigma_1 = \Delta_2^{-1T}\sigma_0\Lambda_2^{-1T}, \quad \varepsilon_1 = \Delta_1\varepsilon_0\Lambda_1 \tag{3.2}$$

При учете лемм 1—3 и следствий (разд. 2) получаем теорему.

Теорема 1. ОС любой среды имеет бесконечно много общих материальных (в терминах σ_0, ε_0) и пространственных (в терминах σ_1, ε_1) представлений в виде

$$\begin{gathered}\sigma_0(\mathbf{a}, t) = L_0[\varepsilon_0(\mathbf{a}, \tau)]_{\tau \leqslant t} \\ \sigma_1(\mathbf{a}, t) = L_1[\varepsilon_1(\mathbf{a}, \tau); \Delta_l(\mathbf{a}, \tau), \Lambda_l(\mathbf{a}, \tau)]_{\tau \leqslant t}\end{gathered} \tag{3.3}$$

где выполнены соотношения (1.3)—(1.6), (2.2), (3.1), (3.2) с невырожденными Δ_l, Λ_l ($l = 1, 2$), отображения L_0, L_1 не зависят от системы отсчета, принимают значения соответственно в множествах $\{\sigma_0\} \subset M^{(2)}$ и $\{\sigma_1\} \subset S^{(2)}$, связаны соотношениями

$$\begin{gathered}L_1[\varepsilon_1; \Delta_l, \Lambda_l]_{\tau \leqslant t} = \Delta_2^{-1T} L_0[\Delta_1^{-1}\varepsilon_1\Lambda_1^{-1}]_{\tau \leqslant t}\Lambda_2^{-1T} \\ L_0[\varepsilon_0]_{\tau \leqslant t} = \Delta_2{}^T L_1[\Delta_1\varepsilon_0\Lambda_1; \Delta_l, \Lambda_l]_{\tau \leqslant t}\Lambda_2{}^T\end{gathered} \tag{3.4}$$

и допускают следующие общие приведенные формы:

$$\begin{gathered}L_0[\varepsilon_0]_{\tau \leqslant t} = F_0[\varepsilon_0]_{\tau \leqslant t} \equiv \Xi_2{}^T F_1[\Xi_1\varepsilon_0\Upsilon_1]_{\tau \leqslant t}\Upsilon_2{}^T \\ L_1[\varepsilon_1; \Delta_l, \Lambda_l]_{\tau \leqslant t} = \mathbf{Q}F_1[\mathbf{Q}^T\varepsilon_1\mathbf{Q}]_{\tau \leqslant t}\mathbf{Q}^T \equiv \Delta_2^{-1T}F_0[\Delta_1^{-1}\varepsilon_1\Lambda_1^{-1}]_{\tau \leqslant t}\Lambda_2^{-1T}\end{gathered} \tag{3.5}$$

с отображениями F_0, F_1, инвариантными относительно сдвига временного аргумента.

Следствие 3. ОС постулата макроскопической определимости А. А. Ильюшина и ОС Нолла

$$\Sigma_{\mathrm{I}} = \Phi[\Psi_{\mathrm{I}}]_{\tau \leqslant t}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{Q}R[\mathbf{X}]_{\tau \leqslant t}\mathbf{Q}^T \tag{3.6}$$

эквивалентны между собой, являются общими формами вида (3.5) и описывают свойства любой среды.

Аналогично при учете леммы 4 имеет место

Теорема 2. Неявное задание ОС любой среды имеет бесконечно много материальных и пространственных представлений в виде уравнений

$$\begin{gathered}H_0[\sigma_0(\mathbf{a}, \tau), \varepsilon_0(\mathbf{a}, \tau)]_{\tau \leqslant t} = 0 \\ H_1[\sigma_1(\mathbf{a}, \tau), \varepsilon_1(\mathbf{a}, \tau); \Delta_l(\mathbf{a}, \tau), \Lambda_l(\mathbf{a}, \tau)]_{\tau \leqslant t} = 0 \quad (l = 1, 2)\end{gathered} \tag{3.7}$$

не зависящих от системы отсчета, связанных (при учете выражений (1.3)—(1.6), (2.2), (3.1), (3.2)) соотношениями эквивалентности

$$\begin{gathered}H_1[\sigma_1, \varepsilon_1; \Delta_l, \Lambda_l]_{\tau \leqslant t} = 0 \Leftrightarrow H_0[\Delta_2{}^T\sigma_1\Lambda_2{}^T, \Delta_1^{-1}\varepsilon_1\Lambda_1^{-1}]_{\tau \leqslant t} = 0 \\ H_0[\sigma_0, \varepsilon_0]_{\tau \leqslant t} = 0 \Leftrightarrow H_1[\Delta_2^{-1T}\sigma_0\Lambda_2^{-1T}, \Delta_1\varepsilon_0\Lambda_1; \Delta_l, \Delta_l]_{\tau \leqslant t} = 0\end{gathered} \tag{3.8}$$

и допускающих следующие общие приведенные формы:

$$H_0[\sigma_0, \varepsilon_0]_{\tau\leqslant t} = 0 \Leftrightarrow N_0[\sigma_0, \varepsilon_0]_{\tau\leqslant t} = 0 \Leftrightarrow N_1[\Xi_2^{-1T}\sigma_0\Upsilon_2^{-1T},\ \Xi_1\varepsilon_0\Upsilon_1]_{\tau\leqslant t} = 0$$
$$H_1[\sigma_1, \varepsilon_1; \Delta_l, \Lambda_l]_{\tau\leqslant t} = 0 \Leftrightarrow N_1[\mathbf{Q}^T\sigma_1\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^T\varepsilon_1\mathbf{Q}]_{\tau\leqslant t} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow N_0(\Delta_2{}^T\sigma_1\Lambda_2{}^T, \Delta_1^{-1}\varepsilon_1\Lambda_1^{-1}]_{\tau\leqslant t} = 0 \tag{3.9}$$

с уравнениями $N_0 = 0$ и $N_1 = 0$, инвариантными относительно сдвига временного аргумента.

Аналогично (3.6) неявные общие формы ОС А. А. Ильюшина и Нолла имеют вид

$$N_{0\mathrm{I}}[\Sigma_\mathrm{I}, \Psi_\mathrm{I}]_{\tau\leqslant t} = 0, \quad N_{1N}[\mathbf{Q}^T\mathbf{S}\mathbf{Q}, \mathbf{X}]_{\tau\leqslant t} = 0 \tag{3.10}$$

Следствие 4. Неявные материальные и пространственные представления ОС (3.7)—(3.9) разрешимы в виде явных материальных и пространственных представлений для σ_0 (**a**, t) и σ_1 (**a**, t) (выполнен принцип детерминизма и причинности) лишь одновременно и притом соответственно в виде (3.3)—(3.5).

Теоремы 1, 2 и следствие 4 показывают возможности реализации основных принципов классической теории ОС механики сплошной среды и дают ответы на основные вопросы, поставленные в начале работы.

4. **Примеры.** Теоремы 1 и 2 также иллюстрируются примерами 1 и 2 разд. 2 и позволяют в конкретных случаях переходить от материальных представлений ОС к пространственным представлениям и наоборот, причем с различными Δ_l, Λ_l ($l = 1, 2$).

Так, по теореме 1, полагая $\sigma_0 = \Sigma_\mathrm{I}$, $\varepsilon_0 = \mathbf{C}$, $\sigma_1 = \mathbf{S}$, $\varepsilon_1 = \mathbf{F}$, причем $\Delta_1 = \mathbf{Q}$, $\Lambda_1 = \mathbf{Q}^T$, $\Delta_2 = \mathbf{A}^{-1T}$, $\Lambda_2 = A^{-1}$, получим ОС нелинейно упругого изотропного тела [10] в материальном (в терминах Σ_I, **C**) и пространственном (в терминах **S**, **F**) представлениях:

$$\Sigma_\mathrm{I} = f_0\mathbf{C}^{-1} + f_1\mathbf{I} + f_2\mathbf{C}, \quad \mathbf{S} = f_0\mathbf{I} + f_1\mathbf{F} + f_2\mathbf{F}^2 \tag{4.1}$$

и соответственно в лагранжевых и эйлеровых компонентах [1] (начальная лагранжева и эйлерова системы координат — прямоугольные декартовы)

$$S^{ij} = f_0g^{ij} + f_1\delta_{ij} + f_2g_{ij}, \quad \sigma_{ij} = f_0\delta_{ij} + f_1g_0{}^{ij} + f_2g_0^{ik}g_0^{kj}$$
$$\left(g_{ij} = \frac{\partial x_m}{\partial a_i}\frac{\partial x_m}{\partial a_j}, \quad g^{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial x_m}\frac{\partial a_j}{\partial x_m}, \quad g_0{}^{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial a_m}\frac{\partial x_j}{\partial a_m}\right) \tag{4.2}$$

где f_0, f_1, f_2 функции инвариантов тензора **C** (или **F**), x_i, a_i — декартовы компоненты векторов x, a, (из (1.1)). Полагая $\sigma_0 = \Sigma_\mathrm{I}$, $\varepsilon_0 = \Psi_\mathrm{I} \equiv {}^1/_2\,(\mathbf{C} - \mathbf{I})$, $\sigma_1 = \mathbf{S}$, $\varepsilon_1 = \mathbf{E}_\mathrm{I} \equiv {}^1/_2\,(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-1})$ и соответственно $\Delta_1 = \mathbf{A}^{-1T}$, $\Lambda_1 = \mathbf{A}^{-1}$, $\Delta_2 = \mathbf{A}^{-1T}$, $\Lambda_2 = \mathbf{A}^{-1}$, при учете уравнений (1.9) получаем оба представления ОС теории пластичности малой кривизны (изначально заданные [30, 31] в пространственном представлении):

$$\Sigma_\mathrm{I} - \sigma\mathbf{C}^{-1} = k\,(\mathbf{C}^{-1}\Psi_\mathrm{I}^{\cdot} - v\mathbf{I})\,\mathbf{C}^{-1}, \quad \mathbf{S} - \sigma\mathbf{I} = k\,(\mathbf{V} - v\mathbf{I})$$
$$(k = 2\Phi\,(s)/3v_u) \tag{4.3}$$

или в лагранжевых и эйлеровых компонентах соответственно:

$$S^{ij} - \sigma g^{ij} = -k\,({}^1/_2 g^{\cdot ij} + vg^{ij}), \quad \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij} = k\,(v_{ij} - v\delta_{ij}) \tag{4.4}$$

Здесь Φ — известная функция материала, v_{ij} — эйлеровы компоненты тензора скоростей деформаций **V**, а скорость средней деформации v, интенсивность скоростей деформаций v_u и длина дуги траектории деформации s выражаются через инварианты как тензора **V**, так и тензора **C** и его производной, гидростатическое напряжение σ выражается как через **S**, так и через Σ_I вместе с **C**.

Аналогична (4.3), (4.4) формулировка ОС вязкой жидкости в терминах тех же тензоров и их компонент.

Теорема 2 позволяет четырехчленное ОС с производной Яуманна, заданное в терминах пространственно ориентированных тензоров **S**, **V**, записать также эквивалентно в терминах материально ориентированных тензоров Σ_I, C

$$\Sigma_I^{\cdot} + {}^1/_2 C^{-1} C^{\cdot} \Sigma_I + {}^1/_2 \Sigma_I C^{\cdot} C^{-1} = a\Sigma_I - {}^1/_2 b\, (C^{-1})^{\cdot} + cC^{-1}$$
$$S^* = aS + bV + cI \tag{4.5}$$

и в компонентах

$$S^{\cdot ij} + {}^1/_2 g^{ik} \dot{g}_{km} S^{mj} + {}^1/_2 g^{jm} \dot{g}_{mk} S^{ik} = aS^{ij} - {}^1/_2 b g^{\cdot ij} + cg^{ij}$$
$$\frac{d\sigma_{ij}}{dt} - \omega_{ik}\sigma_{kj} + \sigma_{ik}\omega_{kj} = a\sigma_{ij} + bv_{ij} + c\delta_{ij} \tag{4.6}$$

где $(\cdot)^*$ — производная Яуманна, ω_{ij} — компоненты тензора скоростей вращений (спина), a, b, c — функции (функционалы) произвольных (раздельных и совместных) инвариантов тензоров S и V (или Σ_I и C с его производной). Как частный случай (4.5), (4.6) получаются записи ОС теории пластического течения (малой кривизны) (4.3), (4.4) ОС линейной гипоупругости [3,25], трехчленных ОС пластичности [1,32], принятых для конечных деформаций в терминах пространственных тензоров S и V.

Важно отметить, что, как показывает следствие 4, пример 2 разд. 2 и настоящий частный пример (4.5), (4.6), вопрос об однозначной разрешимости уравнений вида (3.7) с пространственными мерами $\sigma \equiv \sigma_1$, $\varepsilon \equiv \varepsilon_1$ относительно σ_1 (a, t), т. е. о выполнении принципа детерминизма и причинности, сводится к вопросу о разрешимости соответствующего уравнения для правых мер σ_0, ε_0. В случае примера 2 разд. 2 и ОС (4.5), (4.6), решение системы дифференциальных (дифференциально-функциональных) уравнений с параметризованными (параметризованными тензорами (1.4), определяемыми по (1.6), (2.2) неизвестным (произвольным) пространственным движением элемента среды) дифференциальными операторами (например, производной Яуманна) сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных (дифференциально-функциональных) уравнений с непараметризованными операторами материального дифференцирования по времени относительно материальных тензоров, что представляет собой несравненно более простую задачу. Полученное же решение для материальных (правых) тензорных мер позволяет по (3.5) немедленно записать решение исходного уравнения (3.7) для пространственных (левых) мер.

Так, для модели вязкоупругого тела типа Максвелла при конечных деформациях, заданных в терминах левых тензоров S и V уравнением типа (3.7):

$$D\,[S] = EV - T^{-1}S \tag{4.7}$$

(оператор D [S] определен по (1.8), например, здесь с $\Lambda \equiv \Lambda^T \equiv A^{-1T}$; E, T — постоянные), такая процедура дает явную форму решения

$$S = EE_I - \frac{E}{T} A^{-1T} \left(\int_0^t A^T E_I A \exp\left(-\frac{t-\tau}{T}\right) d\tau \right) A^{-1}$$
$$E_I = {}^1/_2 (I - F^{-1}) \tag{4.8}$$

где E_I — тензор деформаций Альманзи.

5. Выводы. Введенные понятия правых и левых объективных тензоров и соотношения эквивалентности (1.3) между ними устанавливают взаимно однозначную связь между отображениями правых и левых тензоров, используемых соответственно в лагранжевом и эйлеровом описаниях характеристик движения и механических свойств сред. Понятия независимости отображений и уравнений от системы отсчета дают эффективные возможности построения общих приведенных форм таких отображений и уравнений, связывающих объективные тензоры различных типов, в том числе приведенных форм определяющих соотношений (уравнений состояния), включая их «лагранжевы» и «эйлеровы» формулировки.

С использованием этих понятий для классической механики сплошной среды, предусматривающей относительно ОС выполнение указанных в разд. 3 основных принципов и гипотезы макрофизической определимости, получено исчерпывающее множество общих приведенных форм ОС (каждая из которых соответствует конкретному выбору мер напряжений и деформаций), причем как в явном, так и в неявном виде, и показано, что классическое ОС постулата макроскопической определимости А. А. Ильюшина и Нолла являются эквивалентными общими приведенными формами. В свою очередь, конкретный выбор мер напряжений и деформаций может диктоваться либо удобством расчетов или обработки и интерпретации экспериментальных данных, либо стремлением удовлетворить определенным (предполагаемого вида) закономерностям или зависимостям для рассматриваемого класса материалов (процессов), т. е. такой выбор может являться существенным элементом построения теории ОС.

Вопрос об однозначной разрешимости уравнений (неявных форм), заданных в терминах левых тензоров и, как правило, параметризованных тензорами, определяемыми неизвестным (произвольным) пространственным движением элемента среды, сводится при помощи разработанного аппарата эквивалентных представлений к разрешимости соответствующих непараметризованных уравнений для правых мер деформаций и напряжений (в частности, параметризованные дифференциальные уравнения с объективными производными левых тензоров сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно правых тензоров).

Полученные результаты могут быть распространены на тензоры более высокого ранга ($r > 2$). Интерес представляет исследование специальной структуры (приведенной формы) непараметризованных отображений левых тензоров в левые, структуры отображений тензоров других типов, включая отображения тензоров различных рангов. Дополнительные формы описания отображений (заданных явно и неявно) может дать исследование тензоров «смешанного» типа (для тензоров второго ранга — (1.4)) и их связей с рассмотренными правыми и левыми тензорами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
2. *Ильюшин А. А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1978. 287 с.
3. *Грин А. Е., Адкинс Дж. Е.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. 455 с.
4. *Седов Л. И.* Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 284 с.
5. *Green A. E., Naghdi P. M.* Some remarks on elastic — plastic deformation at finite strain // Intern. J. Eng. Sci. 1971. V. 9. No 12. P. 1219—1229.
6. *Бровко Г. Л.* Следствия постулата макроскопической определимости для различных мер деформаций и напряжений // Проблемы механики деформируемого твердого тела. Калинин: Изд. Калинин. ун-та, 1986. С. 96—102.
7. *Бровко Г. Л.* Некоторые подходы к построению определяющих соотношений пластичности при больших деформациях // Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ, 1987. С. 68—81.
8. *Ломакин В. А.* Большие деформации трубы и полого шара // Инж. сб. Т. 21. 1955. С. 61—73.
9. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир. 1975. 592 с.
10. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
11. *Поздеев А. А., Трусов П. В., Няшин Ю. И.* Большие упругопластические деформации. М.: Наука, 1986. 232 с.
12. *Левитас В. И.* Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев: Наук. думка, 1987. 228 с.
13. *Черных К. Ф.* Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988. 190 с.
14. *Кондауров В. И.* Уравнения релаксационного типа для вязкоупругих сред с конечными деформациями // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 791—800.
15. *Толоконников Л. А., Маркин А. А.* Определяющие соотношения при конечных деформациях // Проблемы механики деформируемого твердого тела. Калинин: Изд. Калинин. ун-та, 1986. С. 49—57.
16. *Бровко Г. Л.* Общие принципы и постановки задач пластичности при конечных деформациях // Аннот. докл. 6-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике, Ташкент, 1986 г. Ташкент: Фан, 1986. С. 136.

17. *Бровко Г. Л.* Класс моделей упругих тел при конечных деформациях и устойчивость равновесия // Устойчивость в механике деформируемого твердого тела. Калинин: Изд. Калин. ун-та, 1986. С. 111—121.
18. *Simo J. C.*, *Ortiz M.* A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations // Comput. Meth. Appl. Mech. and Eng. 1985. V. 49. No 2. P. 221—245.
19. *Hill R.* Aspects of invariance in solid mechanics // Advances in Applied Mechanics. N.— Y.; L.: Acad Press. 1978. V. 18. P. 1—75.
20. *Dienes J. K.* On the analysis of rotation and stress rate in deforming bodies // Acta Mech. 1979. V. 32. No. 4. P. 217—232.
21. *Nemat — Nasser S.* Decomposition of strain measures and their rates in finite deformation elastoplasticity // Intern. J. Solids and Struct. 1979. V. 15. No. 2. P. 155—166.
22. *Nagtegaal J. C.*, *de Jong J. E.* Some aspects of nonisotropic work hardening in finite strain plasticity // Plasticity of metals at finite strain: Theory, Experiment and Computation. Stanford Univ. and Dept. Mech. Eng., R. P. I., 1982. P. 65—102.
23. *Lee E. H.*, *Mallett R. L.*, *Wertheimer T. B.* Stress analysis for Anisotropic hardening in finite-deformation plasticity // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1983. V. 50. No. 3. P. 554—560.
24. *Dafalias Y. F.* Corotational rates for kinematic hardening at large plastic deformations // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1983. V. 50. No 3. P. 561—565.
25. *Atluri S. N.* On constitutive relations at finite strain: Hypoelasticity and elastoplasticity with isotropic or kinematic hardening // Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng. 1984. V. 43. No. 2. P. 137—171.
26. *Reed K. W.*, *Atluri S. N.* Constitutive modeling and computational implementation for finite strain plasticity // Intern. J. of Plast. 1985. V. 1. No 1. P. 63—87.
27. *Metzger D. R.*, *Dubey R. N.* Corotational rates in constitutive modelling of elastic — plastic deformations // Intern. J. of Plast. 1987. V. 3. No 4. P. 341—368.
28. *Bell J. F.* Contemporary perspectoves in finite strain plasticity // Intern. J. of Plast. 1985. V.; P. 3—27.
29. *Ogden R. W.* On Eulerian and Lagrangean objectivity in continuum mechanics // Arch. Mech. 1984. V. 36. No. 2. P. 207—218.
30. *Ильюшин А. А.* Некоторые вопросы теории пластического течения // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. № 2. С. 64—86.
31. *Ильюшин А. А.*, *Ленский В. С.* Сопротивление материалов. М.: Физматгиз, 1959. 371 с.
32. *Ленский В. С.*, *Ленский Э. В.* Трехчленное соотношение общей теории пластичности // Изв. АН СССР. МТТ. № 4. 1985. С. 111—115.

Москва

Поступила в редакцию
10.XI.1988