

УДК 539.3

© 1990 г.

Г. А. Морарь, Г. Я. Попов

К ПОСТРОЕНИЮ РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Разрывные решения уравнений упругости для пространства построены в [1] обобщенным методом интегральных преобразований. Здесь используется иной подход. Сначала строится решение от сосредоточенного скачка смещений или напряжений, которое играет роль функции Грина (функции влияния), затем решение уравнений теории упругости с заданными скачками смещений и напряжений, распределенных по поверхности дефекта, т. е. разрывные решения получаются соответствующим интегрированием указанных функций влияния. Дано приложение разрывных решений к задаче об изучении поведения напряжений в окрестности вершины тонкого жесткого клиновидного включения.

Другие подходы к построению разрывных решений на примере теории пластин и оболочек предложены в [2—4].

1. Разрывные решения в декартовых координатах. Пусть в упругом пространстве в плоскости $z = 0$ имеется дефект, т. е. область Ω , при переходе через которую поля напряжений и смещений терпят разрыв. Для скачков введем обозначения

$$\begin{aligned} \langle u_x \rangle (x, y) &= u_x(x, y, -0) - u_x(x, y, +0), \dots \\ \langle \sigma_z \rangle (x, y) &= \sigma_z(x, y, -0) - \sigma_z(x, y, +0) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Предположим, что смещение u_x претерпевает при $z = 0$ сосредоточенный скачок вида

$$\langle u_x \rangle = [u_x] \delta(x) \delta(y) \quad (1.2)$$

где $[u_x]$ — величина скачка, $\delta(x)$ — дельта-функция.

Уравнения равновесия в перемещениях при наличии массовых сил имеют вид [5]

$$\|L\| \{U\} = \mu^{-1} \{V\} \quad (1.3)$$

где $\{U\} = \|u_x u_y u_z\|^T$ — вектор перемещений, $\{V\} = \|XYZ\|^T$ — вектор объемных сил; μ — модуль сдвига; $\|L\|$ — матрица дифференциальных операторов размером 3×3 с компонентами

$$\begin{aligned} l_{11} &= \frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, & l_{12} &= l_{21} = \frac{(1-\kappa)}{\kappa} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ l_{13} &= l_{31} = \frac{(1-\kappa)}{\kappa} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}, & l_{22} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ l_{23} &= l_{32} = \frac{(1-\kappa)}{\kappa} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}, & l_{33} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned}$$

Здесь $\kappa = 1/2 (1 - 2\nu)/(1 - \nu)$, ν — коэффициент Пуассона.

Для получения решения системы (1.3), при отсутствии массовых сил и наличии скачка (1.2), применим по z интегральное преобразование Фурье по обобщенной схеме [1] с параметром λ . Разбивая промежуток интегрирования на интервалы $(-\infty, -0)$, $(+0, \infty)$, интегрируя по частям и сохраняя скачки всех функций при $z = 0$, получим

$$\frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 u_{x\lambda}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{x\lambda}}{\partial y^2} - \lambda^2 u_{x\lambda} + \frac{(1-\kappa)}{\kappa} \frac{\partial^2 u_{y\lambda}}{\partial x \partial y} - \frac{(1-\kappa) i\lambda}{\kappa} \frac{\partial u_{z\lambda}}{\partial x} = f_{1\lambda}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(1-\kappa)}{\kappa} \frac{\partial^2 u_{x\lambda}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_{y\lambda}}{\partial x^2} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 u_{y\lambda}}{\partial y^2} - \lambda^2 u_{y\lambda} - \frac{(1-\kappa) i\lambda}{\kappa} \frac{\partial u_{z\lambda}}{\partial y} = f_{2\lambda} \quad (1.4) \\
& - \frac{(1-\kappa) i\lambda}{\kappa} \left(\frac{\partial u_{x\lambda}}{\partial x} + \frac{\partial u_{y\lambda}}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 u_{z\lambda}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{z\lambda}}{\partial y^2} - \frac{\lambda^2}{\kappa} u_{z\lambda} = f_{3\lambda} \\
& f_{1\lambda} = i\lambda \langle u_x \rangle - \left\langle \frac{\partial u_x}{\partial z} \right\rangle - \frac{(1-\kappa)}{\kappa} \frac{\partial}{\partial x} \langle u_z \rangle \\
& f_{2\lambda} = i\lambda \langle u_y \rangle - \left\langle \frac{\partial u_y}{\partial z} \right\rangle - \frac{(1-\kappa)}{\kappa} \frac{\partial}{\partial y} \langle u_z \rangle
\end{aligned}$$

$$f_{3\lambda} = -\frac{(1-\kappa)}{\kappa} \left(\frac{\partial}{\partial x} \langle u_x \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle u_y \rangle \right) - \frac{1}{\kappa} \left\langle \frac{\partial u_z}{\partial z} \right\rangle + \frac{i\lambda}{\kappa} \langle u_z \rangle$$

Буквой λ помечена трансформанта Фурье соответствующей функции, например,

$$u_{x\lambda} = \int_{-\infty}^{\infty} u_x(x, y, z) e^{i\lambda z} dz$$

Напишем закон Гука для напряжений σ_z , τ_{zx} , τ_{zy} в форме

$$\begin{aligned}
\sigma_z &= \frac{\mu}{\kappa} \left[\frac{\partial u_z}{\partial z} + (1-2\kappa) \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \right] \\
\tau_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \quad \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)
\end{aligned} \quad (1.5)$$

Потребуем, чтобы при переходе через плоскость $z = 0$ только смещение u_x претерпевало скачок вида (1.2), а смещения u_y , u_z и напряжения σ_z , τ_{zx} , τ_{zy} были непрерывными, т. е.

$$\langle u_y \rangle = \langle u_z \rangle = 0, \quad \langle \sigma_z \rangle = \langle \tau_{zx} \rangle = \langle \tau_{zy} \rangle = 0 \quad (1.6)$$

Записывая далее соотношения (1.5) в скачках и учитывая (1.6), получим

$$\left\langle \frac{\partial u_x}{\partial z} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial u_y}{\partial z} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial u_z}{\partial z} \right\rangle = -(1-2\kappa) [u_x] \delta'(x) \delta(y)$$

Тогда правые части уравнений (1.4) примут вид

$$f_{1\lambda} = i\lambda [u_x] \delta(x) \delta(y), \quad f_{2\lambda} = 0, \quad f_{3\lambda} = -[u_x] \delta'(x) \delta(y) \quad (1.7)$$

Если в качестве массовых сил в (1.3) возьмем

$$X = -\mu [u_x] \delta(x) \delta(y) \delta'(z), \quad Y = 0, \quad Z = -\mu [u_x] \delta'(x) \delta(y) \delta(z)$$

и подвергнем их преобразованию Фурье по z , получим выражения (1.7). Следовательно, скачок вида (1.2) можно получить, если приложить в начале координат два направленных сосредоточенных момента [6] интенсивностью $M_{xz} = M_{zx} = -\mu [u_x]$.

Аналогично можно рассматривать сосредоточенные скачки вдоль z при $z = 0$ смещений u_y и u_z . Например, скачок вида $\langle u_y \rangle = [u_y] \delta(x) \delta(y)$ можно получить, взяв два сосредоточенных момента интенсивностью $M_{yz} = M_{zy} = -\mu [u_y]$. Наконец, для получения скачка $\langle u_z \rangle = [u_z] \delta(x) \delta(y)$ следует взять три диполя интенсивностью $D_x = D_y = -\mu \kappa^{-1} (1-2\kappa) [u_z]$, $D_z = -\mu \kappa^{-1} [u_z]$. Решая теперь систему (1.4) или используя соответствующие решения (например, из [6]), получим выражения для смещений. Для компактности воспользуемся матричной записью. Введем в рассмотрение вектор скачков

$$\{S_u\} = \|[u_x] [u_y] [u_z]\|^T$$

Зависимость вектора смещений от вектора скачков запишем в виде

$$\{U\} = \|G\| \{S_u\} \quad (1.8)$$

где $\|G\|$ функциональная матрица размером 3×3 с элементами $g_{ij} \equiv g_{ij}(x, y, z)$:

$$\begin{aligned} g_{11} &= -zg_x^+, g_{12} = g_{21} = -3(4\pi)^{-1}(1-\kappa)xy zr^{-5} \\ g_{13} &= xg_z^-, g_{22} = -zg_y^+, g_{23} = yg_z^- \\ g_{31} &= -xg_z^+, g_{32} = -yg_z^+, g_{33} = -zg_z^+ \\ (g_u^\pm &= (4\pi)^{-1}r^{-3}[\kappa \pm 3(1-\kappa)u^2r^{-2}], u = x, y, z; r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (1.9)$$

При переходе через плоскость $z = 0$ скачки могут претерпевать и напряжения $\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z$.

Аналогично может быть получен следующий результат. Если напряжения τ_{zx} претерпевают при $z = 0$ сосредоточенный скачок $\langle \tau_{zx} \rangle = [\tau_{zx}] \delta(x) \delta(y)$, то решение идентично решению задачи Кельвина, когда в начале координат приложена сосредоточенная сила величиной $X = [\tau_{zx}]$. Для получения решения от сосредоточенного скачка $\langle \tau_{zy} \rangle = [\tau_{zy}] \delta(x) \delta(y)$ необходимо приложить в начале координат сосредоточенную силу величиной $Y = [\tau_{zy}]$. Наконец, если $\langle \sigma_z \rangle = [\sigma_z] \delta(x) \delta(y)$, то необходимо взять $Z = [\sigma_z]$. Зависимость, аналогичная (1.8), имеет вид

$$\{U\} = \|\Gamma\| \{S_\sigma\}, \{S_\sigma\} = \|\tau_{zx} \tau_{zy} \sigma_z\|^T \quad (1.10)$$

Используя решение Кельвина [5, 6], получим элементы матрицы $\|\Gamma\|$

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \gamma_x, \gamma_{12} = \gamma_{21} = (8\pi\mu)^{-1}xy r^{-3}, \gamma_{13} = \gamma_{31} = (8\pi\mu)^{-1}(1-\kappa)xz r^{-3} \\ \gamma_{22} &= \gamma_y, \gamma_{23} = \gamma_{32} = x^{-1}y\gamma_{13}, \gamma_{33} = \gamma_z \\ (\gamma_u &= (8\pi\mu)^{-1}r^{-1}[(1+\kappa) + (1-\kappa)u^2r^{-2}], u = x, y, z \end{aligned} \quad (1.11)$$

При помощи закона Гука и соотношений (1.8), (1.10) могут быть получены напряжения в зависимости от вектора скачков смещений и напряжений

$$\{\sigma\} = \|T\| \{S_u\}, \{\sigma\} = \|Q\| \{S_\sigma\} \quad (1.12)$$

где $\{\sigma\} = \|\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}\|^T$. Элементы матриц $\|T\|$ и $\|Q\|$ имеют вид

$$\begin{aligned} t_{11} &= -3(2\pi)^{-1}(1-\kappa)\mu xz r^{-5}(1-5x^2r^{-2}) \\ t_{21} &= -3(2\pi)^{-1}\mu xz r^{-5}[(1+\kappa) - 5(1-\kappa)y^2r^{-2}] \\ t_{31} &= t_{63} = -3(2\pi)^{-1}(1-\kappa)\mu xz r^{-5}(1-5z^2r^{-2}) \\ t_{41} &= -3(4\pi)^{-1}\mu yz r^{-5}[(1-2\kappa) - 10(1-\kappa)x^2r^{-2}] \\ t_{61} &= (4\pi)^{-1}\mu r^{-3}[(4\kappa-3) + 3(1-2\kappa)y^2r^{-2} + 30(1-\kappa)x^2z^2r^{-4}] \\ t_{12} &= -3(2\pi)^{-1}\mu yz r^{-5}[\kappa - 5(1-\kappa)x^2r^{-2}] \\ t_{32} &= t_{53} = x^{-1}yt_{31}, t_{62} = t_{51} \\ t_{13} &= -(2\pi)^{-1}\mu r^{-3}[1 - 3\kappa y^2r^{-2} - 15(1-\kappa)x^2z^2r^{-4}] \\ t_{33} &= -(2\pi)^{-1}(1-\kappa)\mu r^{-3}(1 + 6z^2r^{-2} - 15z^4r^{-4}) \\ q_{11} &= -xg_x^+, q_{21} = xg_y^-, q_{31} = xg_z^-, q_{41} = -yg_x^+ \\ q_{51} &= q_{43} = q_{62} = -3(4\pi)^{-1}(1-\kappa)xy zr^{-5}, q_{61} = -zg_x^+ \\ q_{12} &= yg_x^-, q_{22} = -yg_y^+, q_{32} = yg_z^-, q_{42} = -xg_y^+, q_{52} = -zg_y^+ \\ q_{13} &= zg_x^-, q_{23} = zg_y^-, q_{33} = -zg_z^+, q_{53} = -yg_z^+, q_{63} = -xg_z^+ \end{aligned} \quad (1.13)$$

Коэффициенты $t_{22}, t_{42}, t_{52}, t_{23}$ могут быть получены соответственно из коэффициентов $t_{11}, t_{41}, t_{61}, t_{13}$ заменой ($x \rightleftharpoons y$), а t_{51}, t_{43} — из t_{41}, t_{12} заменой ($x \rightleftharpoons z$).

Если сосредоточенные скачки смещений и напряжений заданы в произвольной точке (ξ, η) , то в выражениях (1.9), (1.11) и (1.13) необходимо заменить x на $x - \xi$ и y на $y - \eta$. Пусть, например, в точке $x = \xi, y = \eta$ задан скачок смещения u_x . С помощью (1.8) запишем, например, $u_x = g_{11}(x - \xi, y - \eta, z) [u_x]$. Если скачок $[u_x]$ изменяется в некоторой области Ω с плотностью $[u_x] = \langle u_x \rangle(x, y)$, то

$$u_x = \iint \Omega g_{11}(x - \xi, y - \eta, z) \langle u_x \rangle(\xi, \eta) d\Omega$$

Здесь и всюду далее интегрирование ведется по области Ω .

Аналогично можно поступать при наличии в плоскости $z = 0$ дефекта произвольной природы (например, отслоившегося жесткого включения). При переходе через дефект, в общем случае, терпят скачки смещения u_x, u_y, u_z и напряжения $\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z$. При помощи соотношений (1.8), (1.10) и (1.12) можем записать разрывное решение, содержащее заданные скачки (1.1)

$$\begin{aligned} \{U^\circ\} &= \| K_{11}^{(z)} \| \{S_u\} + \| K_{12}^{(z)} \| \{S_\sigma\} \\ \{\sigma^\circ\} &= \| K_{21}^{(z)} \| \{S_u\} + \| K_{22}^{(z)} \| \{S_\sigma\} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \{U^\circ\} &= \| u_x^\circ \ u_y^\circ \ u_z^\circ \| ^T, \quad \{\sigma^\circ\} = \| \sigma_z^\circ \ \tau_{yz}^\circ \ \tau_{zx}^\circ \| ^T \\ \{S_u\} &= \| \langle u_x \rangle \ \langle u_y \rangle \ \langle u_z \rangle \| ^T, \quad \{S_\sigma\} = \| \langle \tau_{zx} \rangle \ \langle \tau_{zy} \rangle \ \langle \sigma_z \rangle \| ^T \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \| K_{11}^{(z)} \| &= \begin{vmatrix} G_{11}^{(z)} & G_{12}^{(z)} & G_{13}^{(z)} \\ G_{21}^{(z)} & G_{22}^{(z)} & G_{23}^{(z)} \\ G_{31}^{(z)} & G_{32}^{(z)} & G_{33}^{(z)} \end{vmatrix}, & \| K_{12}^{(z)} \| &= \begin{vmatrix} \Gamma_{11}^{(z)} & \Gamma_{12}^{(z)} & \Gamma_{13}^{(z)} \\ \Gamma_{21}^{(z)} & \Gamma_{22}^{(z)} & \Gamma_{23}^{(z)} \\ \Gamma_{31}^{(z)} & \Gamma_{32}^{(z)} & \Gamma_{33}^{(z)} \end{vmatrix} \\ \| K_{21}^{(z)} \| &= \begin{vmatrix} T_{31}^{(z)} & T_{32}^{(z)} & T_{33}^{(z)} \\ T_{51}^{(z)} & T_{52}^{(z)} & T_{53}^{(z)} \\ T_{61}^{(z)} & T_{62}^{(z)} & T_{63}^{(z)} \end{vmatrix}, & \| K_{22}^{(z)} \| &= \begin{vmatrix} Q_{31}^{(z)} & Q_{32}^{(z)} & Q_{33}^{(z)} \\ Q_{51}^{(z)} & Q_{52}^{(z)} & Q_{53}^{(z)} \\ Q_{61}^{(z)} & Q_{62}^{(z)} & Q_{63}^{(z)} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

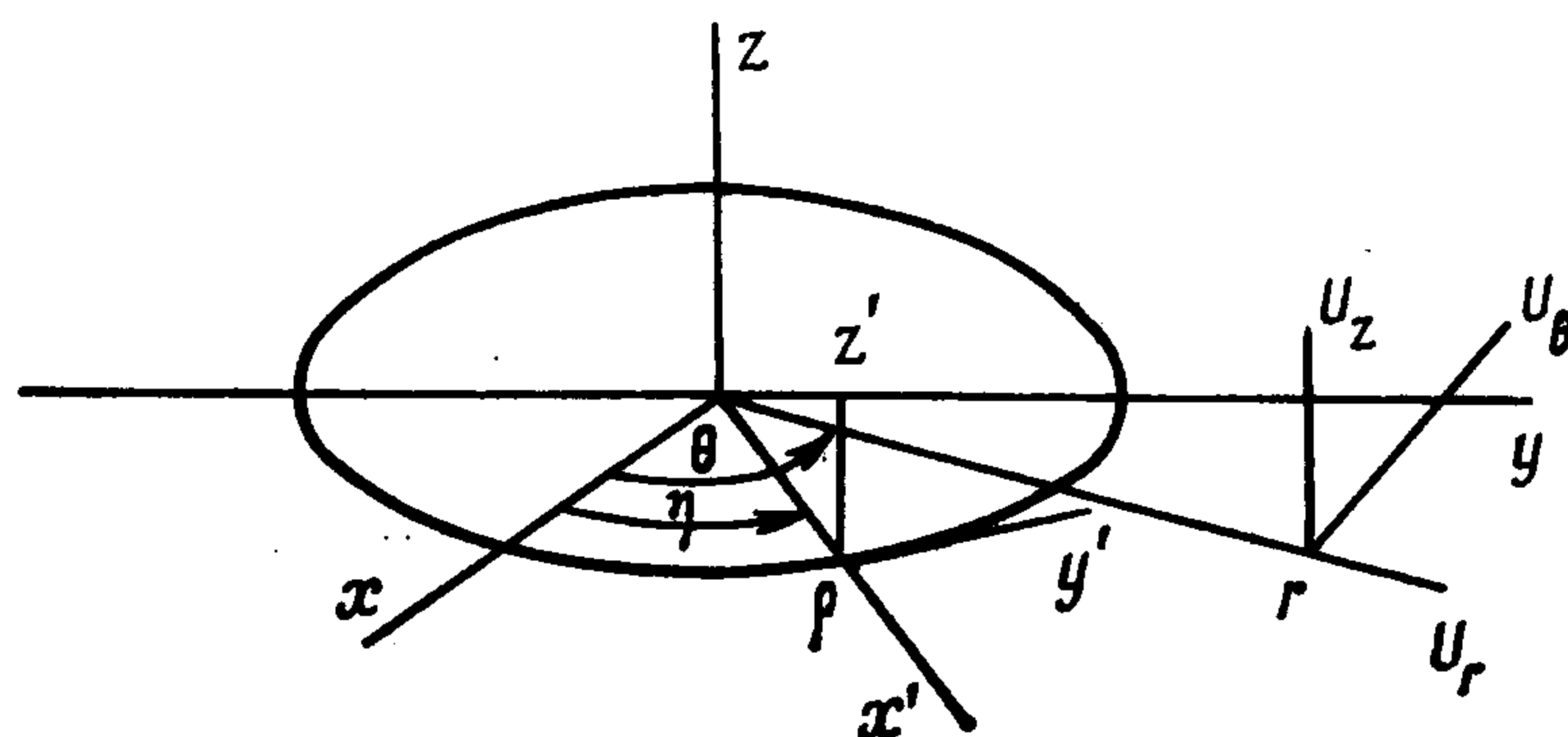
$$G_{ij}^{(z)} f = \iint \Omega g_{ij}(x - \xi, y - \eta, z) f(\xi, \eta) d\Omega,$$

$$\Gamma_{ij}^{(z)} f = \iint \Omega \gamma_{ij}(x - \xi, y - \eta, z) f(\xi, \eta) d\Omega$$

$$\begin{aligned} T_{ij}^{(z)} f &= \iint \Omega t_{ij}(x - \xi, y - \eta, z) f(\xi, \eta) d\Omega, \quad Q_{ij}^{(z)} f = \\ &= \iint \Omega q_{ij}(x - \xi, y - \eta, z) f(\xi, \eta) d\Omega \end{aligned}$$

где функции $g_{ij}, \gamma_{ij}, t_{ij}, q_{ij}$ даются выражениями (1.9), (1.11), (1.13).

2. Разрывные решения в цилиндрических координатах. При решении некоторых трехмерных задач концентрации напряжений возле дефектов



необходимо иметь разрывные решения в цилиндрических координатах. Результаты разд. 1. могут быть распространены на случай, когда смеще-

ния и напряжения претерпевают скачки вдоль осей цилиндрической системы координат. Рассмотрим скачки вдоль оси z' местной системы координат (x', y', z') показанной на фигуре. Используя результаты разд. 1, запишем

$$\{U'\} = \|G'\| \{S_{u'}\} \quad (2.1)$$

где $\{U'\} = \|u_{x'} u_{y'} u_{z'}\|^T$ — вектор смещения в системе координат (x', y', z') ; $\{S_{u'}\} = \|[u_{x'}] [u_{y'}] [u_{z'}]\|^T$ — вектор скачков смещений. Элементы матрицы $\|G'\|$ даются формулами (1.11), в которых необходимо заменить x, y, z на x', y', z' соответственно. Обозначим смещения в цилиндрической системе координат через u_r, u_θ, u_z (фигура), соответствующие скачки сосредоточенные в точке (ρ, η) — через $[u_\rho], [u_\eta], [u_z]$. Имеем очевидные равенства

$$[u_{x'}] = [u_\rho], [u_{y'}] = [u_\eta], [u_{z'}] = [u_z]$$

или

$$\{S_{u'}\} = \{S_u\} = \|[u_\rho] [u_\eta] [u_z]\|^T$$

Рассмотрим произвольную точку $M(x', y', z')$. Компоненты вектора смещений в координатах (x', y', z') равны $u_{x'}, u_{y'}, u_{z'}$, а в цилиндрических координатах (r, θ, z) — u_r, u_θ, u_z . Зависимость между компонентами смещений в двух системах координат имеет вид [7]

$$\{U'\} = \|K\| \{U\}, \{U\} = \|u_r u_\theta u_z\|^T \quad (2.2)$$

Элементы матрицы $\|K\|$ представляют собой косинусы углов между соответствующими осями и равны

$$k_{11} = k_{22} = \cos \gamma, k_{12} = -k_{21} = -\sin \gamma, k_{33} = 1 \\ k_{13} = k_{31} = k_{32} = k_{23} = 0, \gamma = \theta - \eta$$

Подставляя (2.2) в (2.1) и учитывая ортогональность матрицы $\|K\|$, получим

$$\{U\} = \|G\| \{S_u\}, \|G\| = \|K\|^T \{G'\} \quad (2.3)$$

Выполняя в (2.3) перемножение матриц, получим все элементы матрицы $\|G\|$. Выражая затем x', y', z' через r, ρ, θ, η, z при помощи соотношений

$$x' = r \cos \gamma - \rho, y' = r \sin \gamma, z' = z$$

получим ($g_{ik} \equiv g_{ik}(r, \rho, \gamma, z)$)

$$g_{11} = (4\pi)^{-1} \kappa z R^{-3} (1 - \cos \gamma) - z g_{\omega^+ \omega^-}^-, g_{21} = z \sin \gamma g_{\rho \omega^+}^- \\ g_{31} = -\omega^+ g_{zz}^+, g_{12} = -z \sin \gamma g_{r \omega^-}^-, g_{13} = -\omega^- g_{zz}^- \\ g_{22} = -(4\pi)^{-1} z R^{-3} [\kappa \cos \gamma + 3(1 - \kappa) r \rho R^{-2} \sin^2 \gamma] \\ g_{32} = -r \sin \gamma g_{zz}^+, g_{23} = \rho \sin \gamma g_{zz}^-, g_{33} = -z g_{zz}^+ \quad (2.4)$$

$$(g_{uv}^\pm = (4\pi)^{-1} R^{-3} [\kappa \pm 3(1 - \kappa) uv R^{-2}]; u, v = z, r, \rho, \omega^+, \omega^-;$$

$$\omega^+ = r \cos \gamma - \rho, \omega^- = \rho \cos \gamma - r, R = (r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \gamma)^{1/2})$$

Так же можно рассматривать скачки напряжений в цилиндрической системе координат. Равенство, аналогичное (2.3), имеет вид

$$\{U\} = \|\Gamma\| \{S_\sigma\} \quad (2.5)$$

где $\{S_\sigma\} = \|[\tau_{z\rho}] [\tau_{z\eta}] [\sigma_z]\|^T$ — вектор скачков напряжений вдоль z в точке (ρ, η) . Элементы матрицы $\|\Gamma\|$ таковы:

$$\gamma_{11} = (8\pi\mu R)^{-1} [(1 + \kappa) \cos \gamma - (1 - \kappa) \omega^+ \omega^- R^{-2}]$$

$$\gamma_{21} = -\gamma_{\rho \omega^+}^- \sin \gamma, \gamma_{31} = (8\pi\mu)^{-1} (1 - \kappa) z \omega^+ R^{-3}$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{r \omega^-}^- \sin \gamma, \gamma_{22} = (8\pi\mu R)^{-1} [(1 + \kappa) \cos \gamma + (1 - \kappa) r \rho R^{-2} \sin^2 \gamma]$$

$$\gamma_{32} = (8\pi\mu)^{-1}(1 - \kappa) z r R^{-3} \sin \gamma, \quad \gamma_{13} = -(8\pi\mu)^{-1}(1 - \kappa) z \omega^{-} R^{-3} \quad (2.6)$$

$$\gamma_{23} = r^{-1} \rho \gamma_{32}, \quad \gamma_{33} = \gamma_{zz}^+$$

$$(\gamma_{uv}^{\pm} = (8\pi\mu R)^{-1} [(1 + \kappa) \pm (1 - \kappa) uv R^{-2}]; \quad u, v = z, r, \rho, \omega^+, \omega^-)$$

При помощи закона Гука и выражений (2.3) и (2.5) могут быть получены напряжения в зависимости от вектора скачков смещений и напряжений

$$\{\sigma\} = \| T \| \{S_u\}, \quad \{\sigma\} = \| Q \| \{S_\sigma\} \quad (\{\sigma\} = \| \sigma_r \sigma_\theta \sigma_z \tau_{r\theta} \tau_{\theta z} \tau_{zr} \|)^T \quad (2.7)$$

Выпишем только те элементы матриц $\| T \|$ и $\| Q \|$, которые понадобятся в дальнейшем

$$\begin{aligned} t_{31} &= -3 (2\pi)^{-1} (1 - \kappa) \mu z \omega^+ R^{-5} (1 - 5z^2 R^{-2}), \quad t_{32} = (\omega^+)^{-1} r \sin \gamma t_{31} \\ t_{33} &= -(2\pi)^{-1} (1 - \kappa) \mu R^{-3} (1 + 6z^2 R^{-2} - 15z^4 R^{-4}) \\ t_{51} &= -(4\pi)^{-1} \mu R^{-3} \sin \gamma [(4\kappa - 3) - 3 (1 - 2\kappa) r \omega^{-} R^{-2} - 30 (1 - \\ &\quad - \kappa) \rho z^2 \omega^+ R^{-4}] \\ t_{52} &= (4\pi)^{-1} \mu R^{-3} [(4\kappa - 3) \cos \gamma - 3 (1 - 2\kappa) \omega^+ \omega^{-} R^{-2} + 30 (1 - \\ &\quad - \kappa) r \rho z^2 R^{-4} \sin^2 \gamma] \\ t_{53} &= (\omega^+)^{-1} \rho \sin \gamma t_{31}, \quad t_{63} = -\omega^{-} (\omega^+)^{-1} t_{31} \\ t_{61} &= (4\pi)^{-1} \mu R^{-3} [(4\kappa - 3) \cos \gamma + 3 (1 - 2\kappa) r \rho R^{-2} \sin^2 \gamma - \\ &\quad - 30 (1 - \kappa) z^2 \omega^+ \omega^{-} R^{-4}] \\ t_{62} &= (4\pi)^{-1} \mu R^{-3} \sin \gamma [(4\kappa - 3) - 3 (1 - 2\kappa) \rho \omega^+ R^{-2} - 30 (1 - \\ &\quad - \kappa) r z^2 \omega^{-} R^{-4}] \\ q_{31} &= \omega^+ g_{zz}^-, \quad q_{32} = r g_{zz}^- \sin \gamma, \quad q_{33} = -z g_{zz}^+ \\ q_{51} &= z g_{\rho\omega^+} \sin \gamma, \quad q_{52} = -(4\pi)^{-1} z R^{-3} [\kappa \cos \gamma + 3 (1 - \\ &\quad - \kappa) r \rho R^{-2} \sin^2 \gamma] \\ q_{53} &= -\rho g_{zz}^+ \sin \gamma, \quad q_{61} = (4\pi)^{-1} z R^{-3} [-\kappa \cos \gamma + 3 (1 - \\ &\quad - \kappa) \omega^+ \omega^{-} R^{-2}] \\ q_{62} &= -z g_{r\omega^-} \sin \gamma, \quad q_{63} = \omega^- g_{zz}^+ \end{aligned} \quad (2.8)$$

Разрывное решение в цилиндрических координатах может быть записано в виде (1.14), где

$$\begin{aligned} \{U^\circ\} &= \| u_r^\circ u_\theta^\circ u_z^\circ \| ^T, \quad \{\sigma^\circ\} = \| \sigma_z^\circ \tau_{zr}^\circ \tau_{z\theta}^\circ \| ^T \\ \{S_u\} &= \| \langle u_\rho \rangle \langle u_\eta \rangle \langle u_z \rangle \| ^T, \quad \{S_\sigma\} = \| \langle \tau_{z\rho} \rangle \langle \tau_{z\eta} \rangle \langle \sigma_z \rangle \| ^T \end{aligned}$$

а интегральные операторы, входящие в (1.14), действуют по правилу

$$\begin{aligned} G_{ij}^{(z)} f &= \iint g_{ij} f d\Omega, \quad \Gamma_{ij}^{(z)} f = \iint \gamma_{ij} f d\Omega \\ T_{ij}^{(z)} f &= \iint t_{ij} f d\Omega, \quad Q_{ij}^{(z)} f = \iint q_{ij} f d\Omega \end{aligned} \quad (2.9)$$

где интегрирование ведется по области Ω , функции g_{ij} , γ_{ij} , t_{ij} , q_{ij} зависят от r , ρ , γ , z и даются формулами (2.4), (2.6) и (2.8).

3. Приложение к задаче концентрации напряжений возле дефектов. Построенные разрывные решения (1.14) позволяют получить из условий на дефекте систему интегральных уравнений для определения неизвестных скачков. Проиллюстрируем это на задаче о жестком тонком отслоившемся клиновидном включении, расположенном в плоскости $z = 0$ и занимающем область $|\theta| \leq \alpha$, $0 \leq r < \infty$. Напряженное состояние пространства представим в виде суммы основного, вызванного внешней нагрузкой, и возмущенного, вызванного наличием дефекта. Т. е.

$$\{U\} = \{U^*\} + \{U^\circ\}, \quad \{\sigma\} = \{\sigma^*\} + \{\sigma^\circ\} \quad (3.1)$$

где звездочкой обозначены величины основного состояния.

Предположим, что нижний берег включения ($z = -0$) сцеплен с упругим пространством, а верхний берег ($z = +0$) отслоился. Тогда на дефекте имеют место условия

$$\begin{aligned} \sigma_z(r, \theta, +0) = \tau_{zr}(r, \theta, +0) = \tau_{z\theta}(r, \theta, +0) = 0 \\ u_r(r, \theta, -0) = u_r' - r\omega_z \sin \theta + z\omega_y, \quad u_\theta(r, \theta, -0) = \\ = u_\theta' - z\omega_x + r\omega_z \cos \theta, \quad u_z(r, \theta, -0) = u_z' - r\omega_y \cos \theta + \\ + r\omega_x \sin \theta \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $u_r', u_\theta', u_z', \omega_x, \omega_y, \omega_z$ — соответственно смещения и углы поворота включения как жесткого целого.

Реализуя с помощью (3.1) условия (3.2) на дефекте получим систему интегральных уравнений для неизвестных скачков. При этом необходимо определить ядра интегральных операторов в (3.1) при $z = \pm 0$. Для этого следует воспользоваться соотношением

$$\lim_{z \rightarrow \pm 0} z (z^2 + r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \gamma)^{-3/2} = \pm 2\pi\rho^{-1} \delta(r - \rho) \delta(\gamma)$$

и ему аналогичных, полученных дифференцированием по r, ρ, γ .

Методом работ [8, 9] можно изучить поведение скачков в окрестности вершины тонкого жесткого клиновидного включения. Не останавливаясь на общем случае, детализируем частный случай, когда скачки претерпевают напряжения τ_{zr} и $\tau_{z\theta}$, а напряжения σ_z и смещения непрерывны при $z = 0$. Это соответствует случаю, когда включение лишено изгибной жесткости и сцеплено с пространством при $z = \pm 0$. В этом случае система интегральных уравнений имеет вид

$$\Gamma_{i1}^{(\circ)} \langle \tau_{z\rho} \rangle + \Gamma_{i2}^{(\circ)} \langle \tau_{z\eta} \rangle = f_i, \quad i = 1, 2 \quad (3.3)$$

Операторы $\Gamma_{ij}^{(\circ)}$ вычисляются по (2.9) при $z = 0$; f_i — функции, которые здесь не приводятся.

Для изучения поведения скачков $\langle \tau_{zr} \rangle$ и $\langle \tau_{z\theta} \rangle$ при $r \rightarrow 0$, следуя [8, 9], применим к системе (3.3) интегральное преобразование Меллина по r .

В результате получим систему

$$\begin{aligned} \int_{-\alpha}^{\alpha} \|K^{(\circ)}\| \{\phi\} d\eta = \{F\} \\ \{\phi\} = \|\varphi_{1s}\varphi_{2s}\|^T, \quad \varphi_{1s}(\eta) = \int_0^{\infty} \langle \tau_{z\rho} \rangle \rho^s d\rho, \quad \varphi_{2s}(\eta) = \int_0^{\infty} \langle \tau_{z\eta} \rangle \rho^s d\rho \\ \{F\} = \|f_{1s}f_{2s}\|^T, \quad f_{is}(\theta) = 8\pi\mu \int_0^{\infty} f_i(r, \theta) r^{s-1} dr, \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

Элементы матрицы $\|K^{(\circ)}\|$ имеют вид

$$k_{11}^{(\circ)}(\gamma) = -s^* \{[s(1 - \kappa) - (1 + \kappa)] x P_s(x) + (1 - \kappa)(1 + s) P_{s+1}(x)\}$$

$$k_{12}^{(\circ)}(\gamma) = s^* [s(1 - \kappa) - (1 + \kappa)] \sin \gamma P_s(x), \quad k_{21}^{(\circ)}(\gamma) = s^* [2 + s(1 - \kappa)] \sin \gamma P_s(x)$$

$$k_{22}^{(\circ)}(\gamma) = s^* \{[(1 + \kappa) + (1 - \kappa)(1 + s)] x P_s(x) + (1 - \kappa)(1 + s) P_{s+1}(x)\}$$

$$(s^* = \pi/\sin \pi s, \quad x = -\cos \gamma)$$

Здесь $P_s(x)$ — присоединенная функция Лежандра на разрезе [10].

Воспользовавшись связью между функциями Лежандра и гипергеометрической функцией, с помощью аналитического продолжения для по-

следней [10] можно показать, что $k_{12}^\circ(\gamma)$ и $k_{21}^\circ(\gamma)$ — непрерывные функции, а

$$k_{11}^\circ(\gamma) = -4 \ln(|\gamma|/\alpha) + k_{11}^*(\gamma), \quad k_{22}^\circ(\gamma) = -2(1 + \kappa) \ln(|\gamma|/\alpha) + k_{22}^*(\gamma)$$

где $k_{11}^*(\gamma)$, $k_{22}^*(\gamma)$ — непрерывные функции.

Решение системы построим методом ортогональных многочленов [1]. Для этого приведем ее к интервалу $(-1, 1)$ и представим функции $\varphi_{is}(\alpha\theta)$ ($i = 1, 2$) в виде

$$\varphi_{1s}(\alpha\theta) = (1 - \theta^2)^{-1/2} \sum_{m=1}^{\infty} X_m T_{m-1}(\theta), \quad \varphi_{2s}(\alpha\theta) = (1 - \theta^2)^{-1/2} \sum_{m=1}^{\infty} Y_m T_{m-1}(\theta)$$

Непрерывные функции k_{11}^* , k_{12}° , k_{21}° , k_{22}^* аппроксимируем отрезками ряда Фурье по полиномам Чебышева первого рода

$$k_{\lambda\beta}^{*(\circ)}(\alpha\gamma) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(\lambda\beta)} T_{i-1}(\theta) T_{j-1}(\eta), \quad \lambda, \beta = 1, 2$$

Коэффициенты $a_{ij}^{(\lambda\beta)}$ подсчитываются по известным формулам [11], например

$$a_{ij}^{(11)} = \frac{4}{N^2(1 + \delta_{1i})(1 + \delta_{1j})} \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N k_{11}^*[\alpha(\lambda_p - \lambda_q)] T_{i-1}(\lambda_p) T_{j-1}(\lambda_q)$$

$$(\lambda_n = \cos [1/2(2n - 1)\pi/N])$$

Методом ортогональных многочленов [1] получим следующую связанную систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов X_m , Y_m :

$$\delta\mu_{n-1}\pi^{-1}X_n + \sum_{m=1}^N \varepsilon_m a_{nm}^{(11)}X_m + \sum_{m=1}^N \varepsilon_m a_{nm}^{(12)}Y_m = f_{1n} \quad (3.4)$$

$$\sum_{m=1}^N \varepsilon_m a_{nm}^{(21)}X_m + 4(1 + \kappa)\pi^{-1}\mu_{n-1}Y_n + \sum_{m=1}^N \varepsilon_m a_{nm}^{(22)}Y_m = f_{2n}$$

$$(n = 1, 2, \dots; \mu_0 = \ln 2, \mu_n = n^{-1}, n = 1, 2, \dots; \varepsilon_1 = 2, \varepsilon_m = 1, m = 2, 3, \dots)$$

Следуя [9], приравниваем нулю определитель системы (3.4) и получим уравнение для определения показателя s . Ниже приведены значения s при $\nu = 0,3$ и различных α

$\alpha\pi^{-1} \cdot 10^3$	125	250	375	500	625	750	875
$s \cdot 10^3$	180	255	355	500	588	725	912

Для вычисления s с тремя верными знаками при $\alpha \leq 0,625\pi$ достаточно взять в системе (3.4) $N = 6$. С увеличением α сходимость ухудшается и при $\alpha = 0,875\pi$ необходимо брать $N = 9$.

Таким образом, скачки $\langle \tau_{zr} \rangle$ и $\langle \tau_{z\theta} \rangle$ ведут себя как $O(r^{s-1})$ при $r \rightarrow 0$. Такую же особенность имеют и напряжения τ_{zr} и $\tau_{z\theta}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
2. Хижняк В. К., Шевченко В. П. Смешанные задачи теории пластин и оболочек. Учеб. пособие. Донецк: Изд-во Донец. ун-та, 1980. 127 с.
3. Михайлов Б. К. Пластины и оболочки с разрывными параметрами. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. 196 с.

4. *Осадчук В. А.* Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. Киев: Наук. думка, 1985. 221 с.
5. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1975. 575 с.
6. *Teodorescu P. P.* Probleme spațiale în teoria elasticității, București: Acad. RSR, 1970. 377 р.
7. *Новожилов В. В.* Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
8. *Александров В. М., Бабешко В. А.* О давлении на упругое полупространство штампа клиновидной формы в плане // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 1. с. 88—93.
9. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989, 344 с.
10. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1965. 294 с.
11. *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967, 500 с.

Кишинев, Одесса

Поступила в редакцию
5.X.1989