

УДК 532.529

© 1990 г.

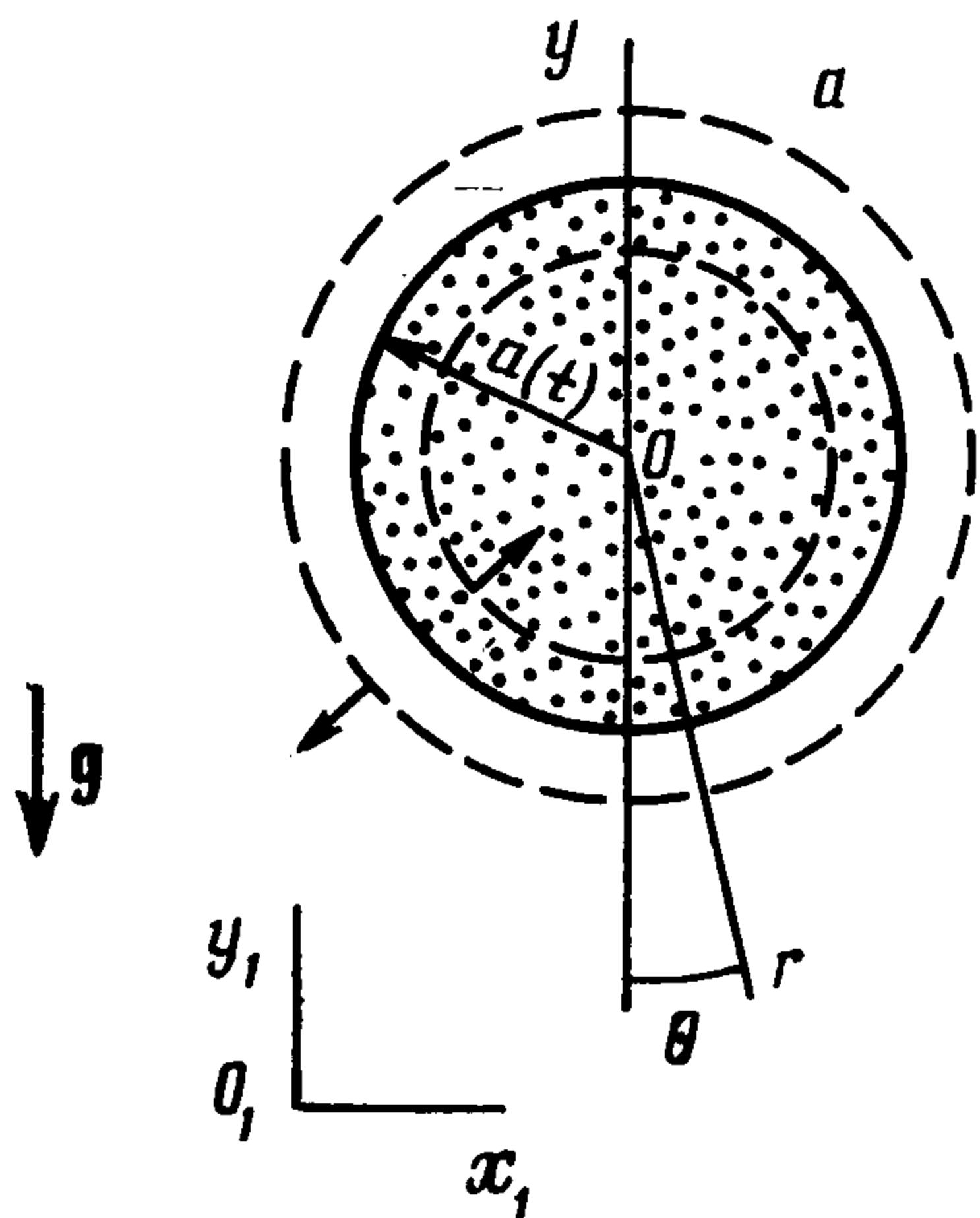
Н. Н. Бобков, Ю. П. Гупало

## МОДЕЛЬ НЕОДНОРОДНОГО ПСЕВДООЖИЖЕННОГО СЛОЯ ПРИ ОБМЕНЕ ЧАСТИЦАМИ МЕЖДУ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ И СЛОЕМ

Рассматривается нестационарная модель неоднородного псевдоожигенного слоя, основанная на представлении о движущихся в слое локальных неоднородностях концентрации твердой фазы [1]. В отличие от исследованных ранее случаев [1, 2] масса твердой фазы внутри локальной неоднородности, моделируемой сферическим пакетом частиц, может меняться вследствие притока частиц в пакет или их оттока из пакета в непрерывную фазу слоя. При этом концентрации частиц вне и внутри пакета остаются постоянными. Предполагается, что плотность твердой фазы велика по сравнению с плотностью оживающего агента (т. е. твердые частицы взвешены в потоке газа), а межфазное взаимодействие линейно по скорости относительного движения частиц. В такой постановке задача оказывается аналогичной задачам о росте (растворении) пузырей в жидкости, а также капель в жидкости или газе [3—5].

Цель работы — получить систему уравнений, связывающих динамику изменения размеров локальной неоднородности концентрации твердой фазы со скоростью ее перемещения в псевдоожигенном слое. Даны оценки «времени жизни» пакета. Рассмотрены примеры.

**1. Формулировка задачи.** Введем неинерциальную сферическую систему координат, связанную с центром пакета радиуса  $a(t)$  и полярной осью, совпадающей по направлению с вектором ускорения силы тяжести



Фиг. 1

(фиг. 1); скорость движения пакета в лабораторной системе отсчета  $x_1 O_1 y_1$  равна  $U_d(t)$ . На основании перечисленных допущений в рамках модели взаимопроникающих идеальных жидкостей запишем систему уравнений движения и неразрывности жидкой и твердой фаз вне и внутри пакета

$$r > a(t), \quad v(r, t) - w(r, t) = -k(\varepsilon) \nabla p_f(r, t) \\ \nabla v(r, t) = 0, \quad d_s \rho [\partial/\partial t + w(r, t) \nabla] w(r, t) = \\ = -\nabla [p_f(r, t) + p_s(r, t)] \pm d_s \rho U_d(t) g/g + \\ + d_s \rho g$$

$$\nabla w(r, t) = 0, \quad \varepsilon + \rho = 1 \quad (1.1)$$

$$r < a(t), \quad v'(r, t) - w'(r, t) = \\ = -k'(\varepsilon') \nabla p_f'(r, t)$$

$$\nabla v'(r, t) = 0, \quad d_s \rho' [\partial/\partial t + w'(r, t) \nabla] w'(r, t) = \\ = -\nabla [p_f'(r, t) + p_s'(r, t)] \pm d_s \rho' U_d(t) g/g + d_s \rho' g$$

$$\nabla w'(r, t) = 0, \quad \varepsilon' + \rho' = 1, \quad U_d(t) = |U_d(t)|$$

Здесь  $v, w, p_f, p_s, \varepsilon, \rho$  — локально усредненные скорости, давления и объемные концентрации оживающего агента (плотность  $d_f$ ) и дисперсных частиц (плотность  $d_s, d_f/d_s \ll 1$ ) соответственно;  $k(\varepsilon)$  — проницаемость псевдоожигенного слоя;  $g$  — ускорение силы тяжести. Штрихом отмечены

параметры двухфазного течения внутри пакета. Сила инерции, действующая на единицу объема твердой фазы в выбранной неинерциальной системе координат, пропорциональна  $\pm U_d^*(t)$  и учитывается в третьем и седьмом уравнениях (1.1). Здесь и далее, где это не оговорено особо, верхний знак соответствует всплывающему пакету ( $\rho' < \rho$ ), а нижний — погружающемуся ( $\rho' > \rho$ ).

Во введенной неинерциальной системе координат граничные условия на движущейся поверхности пакета в предположении осевой симметрии запишем в виде [1]

$$\begin{aligned} r = a(t), \quad \rho (w_r - D_r) &= \rho' (w_r' - D_r), \quad \varepsilon (v_r - D_r) = \\ &= \varepsilon' (v_r' - D_r) \\ p_f = p_f', \quad p_s' - p_s &= d_s [\rho (w_r - D_r)^2 - \rho' (w_r' - D_r)^2] \end{aligned} \quad (1.2)$$

Первые два из них выражают сохранение потоков твердой и жидкой фаз на разрыве, два последних — условиях баланса нормальных напряжений в жидкой и твердой фазах соответственно.

В соотношениях (1.2)  $D$  — скорость перемещения разрыва (поверхности пакета) в системе координат, движущейся вместе с центром пакета. Уравнение поверхности разрыва в этой системе имеет вид  $F(r, \theta, \varphi, t) = r - a(t) = 0$ . Следовательно,  $D = -i_r (\partial F / \partial t) / |\nabla F| = i_r a^*(t)$ , где  $i_r$  — единичный вектор в радиальном направлении, откуда  $D_r = a^*(t)$ .

В дальнейшем будем считать, что частицы дисперсной фазы во внутренней области течения  $r < a(t)$ , по которым в данный момент времени распространяется граница пакета, неподвижны относительно нее, т. е.  $w_r'|_{r=a(t)} = 0$ . В то же время нормальная к границе скорость дисперсной фазы  $w_r|_{r=a(t)}$  вне пакета отлична от нуля и определяет скорость «роста» или «растворения» пакета в окружающем слое. Сделанное предположение означает отсутствие источников (стоков) твердой фазы внутри пакета постоянной плотности.

Таким образом, в принятой постановке поверхностная плотность разрыва концентрации дисперсной фазы постоянна, а масса разрыва увеличивается в случае растущего пакета и уменьшается в случае растворяющегося. В рассматривавшейся ранее [1] модели при постоянной массе пакета ( $w_r|_{r=a(t)} = w_r'|_{r=a(t)}$ ) поверхностная плотность разрыва изменялась вследствие изменения размера пакета.

При учете сделанного допущения и выражения для скорости разрыва  $D$  условия (1.2) запишем в виде

$$\begin{aligned} r = a(t), \quad \rho (a^* - w_r) &= \rho' a^*, \quad \varepsilon (v_r - a^*) = \varepsilon' (v_r' - a^*) \quad (1.3) \\ p_f = p_f', \quad p_s' - p_s &= d_s [\rho (w_r - a^*)^2 - \rho' a^{*2}] = \\ &= -d_s \rho' w_r a^* = d_s \rho' a^{*2} (\rho' / \rho - 1) \end{aligned}$$

К граничным условиям (1.3) на поверхности пакета должны быть присоединены условия однородности потоков жидкой и твердой фаз вдали от пакета и ограниченность их скоростей во всей области течения.

**2. Поля скоростей и распределение давлений фаз вне и внутри пакета.** Рассмотрим случай, когда течение твердой фазы вне пакета потенциально, т. е.  $w(r, t) = \nabla \varphi_s(r, t)$ , где  $\varphi_s(r, t)$  — потенциал скорости. Из четвертого уравнения (1.1) следует, что потенциал — гармоническая в каждый момент времени функция

$$\Delta \varphi_s(r, t) = 0 \quad (2.1)$$

удовлетворяющая условиям

$$\left. \frac{\partial \varphi_s(\mathbf{r}, t)}{\partial r} \right|_{r=a(t)} = w_r(\mathbf{r}, t) \Big|_{r=a(t)} = a'(t) (1 - \rho'/\rho) \quad (2.2)$$

$$r \rightarrow \infty, \varphi_s(\mathbf{r}, t) \rightarrow \varphi_s^\circ(\mathbf{r}, t)$$

где  $\varphi_s^\circ(\mathbf{r}, t)$  — потенциал однородного на бесконечности течения идеальной жидкости вокруг шара переменного радиуса  $a(t)$ .

Решение задачи (2.1), (2.2) имеет вид

$$\varphi_s(\mathbf{r}, t) = \pm U_d(t) \left[ 1 + \frac{a^3(t)}{2r^3} \right] r \cos \theta - \frac{a^2(t) a'(t) (\rho - \rho')}{r\rho} \quad (2.3)$$

Из уравнения неразрывности твердой фазы внутри пакета следуют соленоидальность вектора  $\mathbf{w}'(\mathbf{r}, t)$  и возможность ввести для внутреннего течения функцию тока  $\psi_s'(\mathbf{r}, t)$  стандартным образом

$$w_r'(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi_s'(\mathbf{r}, t)}{\partial \theta}, \quad w_\theta'(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi_s'(\mathbf{r}, t)}{\partial r}$$

Применяя операцию вихря к обеим частям уравнения движения твердой фазы внутри пакета, получаем следующее уравнение для функции тока, описывающей внутреннее течение ( $D^2$  — оператор Стокса):

$$\frac{\partial}{\partial t} (D^2 \psi_s') + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (\psi_s', D^2 \psi_s')}{\partial (r, \mu)} + \frac{2}{r^2} D^2 \psi_s' L \psi_s' = 0 \quad (2.4)$$

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1 - \mu^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \mu^2}, \quad L = \frac{\mu}{1 - \mu^2} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \mu}, \quad \mu = \cos \theta$$

Ниже будет рассмотрено простейшее частное решение уравнения (2.4)  $\psi_s'(\mathbf{r}, t) = \text{const}$ , соответствующее отсутствию движения частиц внутри пакета

$$r < a(t), \mathbf{w}'(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2.5)$$

При этом на границе пористого тела  $r \leq a(t)$  допускается проскальзывание твердой фазы, так что  $w_\theta|_{r=a(t)} \neq 0$ .

Перейдем к определению полей давления жидкой и твердой фаз. В результате применения операции дивергенции к уравнениям движения жидкой фазы с учетом уравнений неразрывности получаем для соответствующих давлений вне и внутри пакета уравнения

$$r > a(t), \Delta p_f(\mathbf{r}, t) = 0; \quad r < a(t), \Delta p_f'(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2.6)$$

Решения уравнений (2.6) должны удовлетворять второму и четвертому условиям (1.3) на поверхности пакета. Кроме этого, в силу однородности слоя вдали от пакета давление  $p_f(\mathbf{r}, t)$  должно удовлетворять условию  $\partial p_f(\mathbf{r}, t)/\partial y|_{r \rightarrow \infty} = -v_0/k(\varepsilon)$  ( $v_0$  — скорость псевдооживления,  $y = -r \cos \theta$  — вертикальная координата), а вследствие ограниченности скоростей фаз внутри пакета  $|p_f'(\mathbf{r}, t)| < \infty$ .

Решение первого уравнения (2.6) представим в виде ряда по полиномам Лежандра

$$p_f(\mathbf{r}, t) = \frac{v_0}{k(\varepsilon)} r \cos \theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) P_{n-1}(\cos \theta) r^{-n} a^{n+1}(t) + p_{f\infty}(t) \quad (2.7)$$

Здесь  $p_{f\infty}(t)$  — давление жидкой фазы в экваториальной плоскости пакета вдали от него.

Аналогичное разложение для функции  $p_f'(\mathbf{r}, t)$ , не имеющее особенностей при  $r < a(t)$ , представим в виде

$$p_f'(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) P_n(\cos \theta) a^{1-n}(t) r^n \quad (2.8)$$

Неизвестные коэффициенты  $B_n(t)$ ,  $A_n(t)$  в соотношениях (2.7), (2.8) подлежат определению из граничных условий.

Распределение давления ожидающего агента во всей области течения имеет вид

$$r > a(t), \quad p_f(\mathbf{r}, t) = \frac{v_0}{k(\varepsilon)} r \cos \theta + B_1(t) \frac{a^2(t)}{r} + B_2 \frac{a^3(t)}{r^2} \cos \theta + p_{f\infty}(t) \quad (2.9)$$

$$r < a(t), \quad p_f'(\mathbf{r}, t) = B_1(t) a(t) + \frac{3v_0}{k} \frac{\varepsilon k}{2\varepsilon k + \varepsilon' k'} r \cos \theta + p_{f\infty}(t)$$

$$B_1(t) = \frac{\varepsilon \rho' - \varepsilon' \rho}{\rho} \frac{1}{\varepsilon k} a'(t), \quad B_2 = \frac{v_0}{k} \frac{\varepsilon k - \varepsilon' k'}{2\varepsilon k + \varepsilon' k'}$$

В стационарном приближении  $B_1(t) = 0$  и найденные выражения совпадают с полученными ранее [2].

Поля скоростей жидкой фазы определяются на основании соотношений (2.9), (2.3) и соответствующих уравнений движения в виде  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{w}(\mathbf{r}, t) - k(\varepsilon) \nabla p_f(\mathbf{r}, t)$ , или в координатной записи

$$v_r(r, t) = \pm U_d(t) \left[ 1 - \frac{a^3(t)}{r^3} \right] \cos \theta + \frac{a^2(t) a'(t) (\rho - \rho')}{r^2 \rho} - \left[ v_0 - 2kB_2 \frac{a^3(t)}{r^3} \right] \cos \theta + kB_1(t) \frac{a^2(t)}{r^2} \quad (2.10)$$

$$v_\theta(r, t) = \mp U_d(t) \left[ 1 + \frac{a^3(t)}{2r^3} \right] \sin \theta + \left[ v_0 + kB_2 \frac{a^3(t)}{r^3} \right] \sin \theta$$

Аналогично  $\mathbf{v}'(\mathbf{r}, t) = -k'(\varepsilon') \nabla p_f'(\mathbf{r}, t)$  или

$$v_r'(\theta) = -3v_0 \frac{\varepsilon k'}{2\varepsilon k + \varepsilon' k'} \cos \theta, \quad v_\theta'(\theta) = 3v_0 \frac{\varepsilon k'}{2\varepsilon k + \varepsilon' k'} \sin \theta \quad (2.11)$$

Выражения (2.11) описывают однородный стационарный поток жидкой фазы ( $|v'| = 3v_0 \varepsilon k' (2\varepsilon k + \varepsilon' k')^{-1}$ ), пронизывающий внутренность пакета снизу вверх независимо от того, всплывает он ( $\rho' < \rho$ ) или погружается ( $\rho' > \rho$ ).

Переходим к определению полей давления дисперсной фазы вне и внутри пакета. В области внешнего течения уравнение движения твердой фазы допускает интеграл Коши — Лагранжа в виде

$$d_s \rho \partial \varphi_s(\mathbf{r}, t) / \partial t + \frac{1}{2} d_s \rho \mathbf{w}^2(\mathbf{r}, t) + p_f(\mathbf{r}, t) + p_s(\mathbf{r}, t) - d_s \rho [\pm U_d(t) / g + 1] \mathbf{g} \mathbf{r} = \frac{1}{2} d_s \rho U_d^2(t) + p_{f\infty}(t) + p_{s\infty} \quad (2.12)$$

Из соотношения (2.12) получаем распределение давления твердой фазы вне пакета ( $r \geq a(t)$ )

$$p_s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} d_s \rho [U_d^2(t) - \mathbf{w}^2(\mathbf{r}, t)] - d_s \rho \partial \varphi_s(\mathbf{r}, t) / dt + p_{f\infty}(t) + p_{s\infty} - p_f(\mathbf{r}, t) + d_s \rho [\pm U_d(t) / g + 1] \mathbf{g} \mathbf{r} \quad (2.13)$$

В формулах (2.12), (2.13)  $p_{s\infty}$  — давление дисперсной фазы в области однородного слоя на удалении от пакета, потенциал скорости  $\varphi_s(\mathbf{r}, t)$  определяется выражением (2.3).

Таким образом, распределение давления  $p_s(\mathbf{r}, t)$  по поверхности пакета имеет вид

$$p_s(\mathbf{r}, t) |_{r=a(t)} = \frac{1}{2} d_s \rho [U_d^2(t) - a^2(t) (1 - \rho'/\rho)^2 - \frac{3}{4} \sin^2 \theta U_d^2(t)] - d_s \rho [\pm \frac{3}{2} U_d(t) a(t) \cos \theta \pm \frac{3}{2} U_d(t) a'(t) \cos \theta - 2(1 - \rho'/\rho) a^2(t) - (1 - \rho'/\rho) a(t) a''(t)] + \quad (2.14)$$

$$+ p_{f\infty}(t) + p_{s\infty} - p_f(r, t)|_{r=a(t)} + \\ + d_s \rho [\pm U_d^*(t)/g + 1] g a(t) \cos \theta$$

Уравнение движения дисперсной фазы внутри пакета при  $w' = 0$  также допускает интеграл Коши — Лагранжа в виде

$$p_s'(r, t) = -p_f'(r, t) + d_s \rho' [\pm U_d^*(t)/g + 1] g r + p_{s0}'(t) \quad (2.15)$$

откуда для распределения давления по поверхности пакета находим

$$p_s'(r, t)|_{r=a(t)} = -p_f'(r, t)|_{r=a(t)} + \\ + d_s \rho' [\pm U_d^*(t)/g + 1] g a(t) \cos \theta + p_{s0}'(t) \quad (2.16)$$

Функция  $p_{s0}'(t)$  в (2.15), (2.16) определяется условием  $p_s'(r, t)|_{r=0} = 0$ , которое при учете второго равенства (2.9) приводит к соотношению

$$p_{s0}'(t) = -(\epsilon k)^{-1} a^*(t) a''(t) + p_{f\infty}(t)$$

**3. Скорость движения пакета и эволюция его размеров.** Необходимость удовлетворить условию (1.3) на скачок давления дисперсной фазы на всей границе пакета противоречит предположению о сферической форме пакета. Следуя процедуре Дэвиса — Тейлора [6], ограничимся рассмотрением участков поверхности пакета, непосредственно прилегающих к лобовой критической точке ( $r = a(t)$ ,  $\theta = \pi$  для всплывающего пакета и  $r = a(t)$ ,  $\theta = 0$  — для погружающегося), где указанное условие (1.3) может быть удовлетворено локально. Для этого полагаем  $\sin^2 \theta|_{\theta \rightarrow 0, \pi} = \delta$  и, следовательно,  $\cos \theta = \mp 1 \pm \delta/2 + O(\delta^2)$ . Ограничиваясь членами нулевого и первого порядка в разложении по  $\delta$  величины скачка давления дисперсной фазы на границе пакета, при учете соотношений (2.14), (2.15), приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\lambda - 1)(3 - \lambda)a^{*2}(t) + (\lambda - 1)a(t)a''(t) - \\ - p_{s\infty}/(d_s \rho) + \frac{7}{4}U_d^2(t) = a(t)a^*(t)/(\epsilon k \rho d_s) \\ \frac{3}{2}a^*(t)U_d(t) + \frac{1}{2}a(t)U_d^*(t)(1 + 2\lambda) + \\ + \frac{9}{4}U_d^2(t) = \mp(\lambda - 1)ga(t), \quad \lambda = \rho'/\rho \end{aligned} \quad (3.1)$$

связывающих скорость движения пакета в слое  $U_d(t)$  со скоростью изменения его размера  $a^*(t)$ . В предельном случае  $\lambda = 0$ , соответствующем отсутствию частиц внутри пакета, уравнения (3.1) совпадают в приближении линейного межфазного взаимодействия с соответствующими уравнениями движения и скорости роста, полученными ранее для пузыря [7].

Уравнения (3.1) имеют стационарное решение

$$U_{d*} = 2 \left( \frac{p_{s\infty}}{7d_s \rho} \right)^{1/2}, \quad a_* = \mp \frac{1}{\lambda - 1} \frac{9}{7} \frac{p_{s\infty}}{d_s \rho g} \quad (3.2)$$

которое в пределе  $\lambda \rightarrow 0$  соответствует результатам [7, 8].

Из соотношений (3.2) следует, что скорость движения пакета в стационарном состоянии не зависит от концентрации частиц внутри него, тогда как стационарный размер пакета существенно зависит от его относительной плотности  $\lambda$  и может меняться в широких пределах:

$$\min \left\{ 1, \frac{\rho}{1 - \rho} \right\} \leq \bar{a}_* < \infty, \quad \bar{a}_* = a_* \left( \frac{9}{7} \frac{p_{s\infty}}{d_s \rho g} \right)^{-1}$$

Для любого значения  $\bar{a}_* > \max \{1, \rho/(1 - \rho)\}$  как разреженный, так и плотный пакеты, относительные плотности которых соответственно таковы:

$$\lambda_{1*} = (\bar{a}_* - 1)/\bar{a}_* \quad \text{и} \quad \lambda_{2*} = (\bar{a}_* + 1)/\bar{a}_*$$

имеют одинаковый стационарный радиус  $a_*$ .

Известно [7, 8], что стационарное состояние для пузыря неустойчиво, т. е. при  $a(t) > a_*$  он растет ( $a'(t) > 0$ ), а при  $a(t) < a_*$  схлопывается ( $a'(t) < 0$ ). Естественно ожидать, что аналогичная ситуация будет иметь место и для пакета частиц.

Исключая  $U_d(t)$  из уравнений (3.1), находим следующее уравнение описывающее эволюцию трехмерного пакета в принятой модели:

$$\begin{aligned}
 a''' = & \left( \lambda - 4 - \frac{6}{1+2\lambda} \right) \frac{a'a''}{a} - \frac{(\lambda + 7/2)\eta}{(1-\lambda)(\lambda + 1/2)} \frac{a^2}{a} - \frac{\eta}{1-\lambda} a'' + \\
 & + \frac{21}{2(1+2\lambda)(\lambda-1)} \frac{a'}{a^2} - \frac{3(3-\lambda)}{1+2\lambda} \frac{a^3}{a^2} + \\
 + & \frac{63}{4(1+2\lambda)(1-\lambda)a^2} \left[ 1 - \frac{4}{7}(\lambda-1)aa'' - \frac{2}{7}(\lambda-1)(3-\lambda)a'^2 + \right. \\
 & \left. + \frac{4}{7}\eta aa' \right]^{1/2} \left[ \mp(\lambda-1)a - 1 + \frac{4}{7}(\lambda-1)aa'' + \right. \\
 & \left. + \frac{2}{7}(\lambda-1)(3-\lambda)a'^2 - \frac{4}{7}\eta aa' \right], \quad \lambda \neq 1 \quad (3.3) \\
 \eta = & \frac{1}{18} \frac{C_1 \rho}{\varepsilon^3} \frac{t_0}{\tau_0}, \quad \tau_0 = \frac{2}{9} \frac{a_p^2 d_s}{d_f \nu_f}
 \end{aligned}$$

Здесь выполнен переход к безразмерным переменным с использованием масштабов: длины  $a_{*b} = \sqrt[3]{\rho_s \infty / (d_s \rho g)}$  (стационарный размер пузыря) и времени  $t_0 = \sqrt[3]{a_{*b} / g}$ , причем за безразмерными значениями радиуса пакета и времени сохранены прежние обозначения. Безразмерный параметр  $\eta$  характеризует отношение временных макро- и микромасштабов нестационарности,  $C_1 \approx 150$  — константа Эргана,  $\tau_0$  — время релаксации скорости твердой частицы с плотностью  $d_s$  и радиусом  $a_p$  в вязком газе с плотностью  $d_f$  и кинематической вязкостью  $\nu_f$  в приближении Стокса.

Обыкновенное дифференциальное уравнение (3.3) соответствует динамической автономной системе третьего порядка, которая может быть исследована при помощи общих методов теории нелинейных колебаний [9, 10]. Из (3.3) следует, что движение изображающей точки в фазовом пространстве системы  $(a, a', a'')$  ограничено областью, в которой выполнено условие

$$1 - \frac{4}{7}(\lambda-1)aa'' - \frac{2}{7}(\lambda-1)(3-\lambda)a'^2 + \frac{4}{7}\eta aa' \geq 0$$

Движение изображающей точки по границе этой области соответствует нестационарному режиму эволюции в слое неподвижного ( $U_d = 0$ ) пакета частиц. Из второго уравнения (3.1) следует, что такой режим реализуется лишь в случае  $\lambda = 1$ , т. е. когда объемные концентрации твердой фазы вне и внутри пакета равны, что соответствует отсутствию в слое неоднородности.

Линеаризуем уравнение (3.3) вблизи стационарного решения, полагая  $a(t) = a_* + \Delta(t)$ , где  $\Delta(t)$  — малое отклонение безразмерного радиуса пакета от равновесного значения  $a_* = \mp 1/(\lambda-1)$ .

Уравнение линейного приближения имеет вид

$$\Delta''' + \left[ \frac{\eta}{1-\lambda} \mp \frac{9(\lambda-1)}{1+2\lambda} \right] \Delta'' + \left[ \frac{21}{2} \frac{1-\lambda}{1+2\lambda} \pm \frac{9\eta}{1+2\lambda} \right] \Delta' \mp \frac{63}{4} \frac{(\lambda-1)^2}{1+2\lambda} \Delta = 0 \quad (3.4)$$

В предельном случае  $\lambda = 0$  ( $\rho' = 0$ ) соотношение (3.4) совпадает с полученным ранее [7] уравнением, описывающим эволюцию пузыря вблизи равновесного состояния в приближении линейного межфазного взаимодействия.

Характеристический многочлен уравнения (3.4) неустойчив при всех

значениях  $\lambda$ . В частности, при  $\lambda < 1$  он имеет ровно один положительный корень. Это означает, что, как и в случае пузыря, стационарное состояние пакета частиц с любой относительной плотностью  $\lambda$  неустойчиво: при  $a > a_*$  имеется регулярный приток дисперсной фазы из слоя к пакету, в результате чего его масса возрастает, а при  $a < a_*$  происходит отток частиц в слой и пакет «растворяется».

4. Эволюция двумерного круглого пакета частиц в псевдооживленном слое. Рассмотренная в разд. 1—3 задача о движении в псевдооживленном слое сферического пакета частиц может быть перенесена в принятой постановке на случай цилиндрического пакета. Как и выше, рассматривается простейший случай отсутствия относительного движения частиц дисперсной фазы, составляющих неоднородность (условие (2.5)). Поверхностные концентрации частиц вне и внутри пакета равны соответствующим объемным величинам  $\rho$  и  $\rho'$  [11].

Существенным отличием плоского случая от трехмерного является неединственность решений соответствующих граничных задач. Это обстоятельство приводит к необходимости наложения на уравнения движения пакета, аналогичные уравнениям (3.1), дополнительных условий с целью выделения единственного решения.

Как и в трехмерном случае, поле течения дисперсной фазы вне пакета описывается уравнением (2.1) с граничными условиями (2.2). Решение задачи (2.1), (2.2) имеет вид

$$\varphi_s(\mathbf{r}, t) = \pm U_d(t) [r + a^2(t)/r] \cos \theta + a(t) a'(t) (1 - \lambda) \ln(r/L(t)) \quad (4.1)$$

Здесь  $L(t)$  — произвольная функция времени, имеющая размерность длины и не обращающаяся в нуль в области своего определения. Поле скоростей  $w(\mathbf{r}, t)$ , очевидно, не зависит от  $L(t)$ .

Распределение давления жидкой фазы вне и внутри пакета описывается в принятой модели гармоническими функциями  $p_f(\mathbf{r}, t)$ ,  $p_f'(\mathbf{r}, t)$  (см. 2.6)), которые в плоской задаче будем отыскивать в виде рядов ( $r, \theta$  — цилиндрические координаты)

$$p_f(\mathbf{r}, t) = \frac{v_0}{k(\varepsilon)} r \cos \theta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n+1}(t)}{r^n} [A_n(t) \cos n\theta + B_n(t) \sin n\theta] + C(t) \ln \frac{r}{L(t)} + p_{f\infty}(t) \quad (4.2)$$

$$p_f'(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{1-n}(t) r^n [A_n'(t) \cos n\theta + B_n'(t) \sin n\theta]$$

Подчинив соотношения (4.2) соответствующим граничным условиям (1.3), определим коэффициенты  $A_n(t)$ ,  $B_n(t)$ ,  $A_n'(t)$ ,  $B_n'(t)$ ,  $C(t)$  и получим окончательно

$$r > a(t), \quad p_f(\mathbf{r}, t) = \frac{v_0}{k} \left[ r + \frac{\varepsilon k - \varepsilon' k'}{\varepsilon k + \varepsilon' k'} \frac{a^2(t)}{r} \right] \cos \theta - \frac{\varepsilon \rho' - \varepsilon' \rho}{\varepsilon \rho k} a(t) a'(t) \ln \frac{r}{L(t)} + p_{f\infty}(t) \quad (4.3)$$

$$r < a(t), \quad p_f'(\mathbf{r}, t) = \frac{2v_0\varepsilon}{\varepsilon k + \varepsilon' k'} r \cos \theta - \frac{\varepsilon \rho' - \varepsilon' \rho}{\varepsilon \rho k} a(t) a'(t) \ln \frac{a(t)}{L(t)} + p_{f\infty}(t)$$

Неединственность решения задачи (2.6), (1.3) не влияет на поля скоростей фаз, поскольку эти поля в соответствии с исходными уравнениями (1.1) определяются пространственными производными выражений (4.3).

Найденное распределение давления жидкой фазы удовлетворяет также условию постоянства градиента функции  $p_f(\mathbf{r}, t)$  вдали от пакета в однородном слое и не имеет особенностей в области внутреннего течения  $r < a(t)$ .

Уравнения движения твердой фазы вне и внутри пакета допускают, как и в трехмерном случае, интеграл Коши — Лагранжа. Используя выражения (4.1), (4.2), находим отсюда поле давления дисперсной фазы во всей области течения в виде

$$\begin{aligned} r > a(t), p_s(\mathbf{r}, t) &= 1/2 d_s \rho [U_d^2(t) - w^2(\mathbf{r}, t)] - \\ &- d_s \rho \partial \varphi_s(\mathbf{r}, t) / \partial t + p_{f\infty}(t) + p_{s\infty} - p_f(\mathbf{r}, t) \\ &+ d_s \rho [\pm U_d'(t) / g + 1] g r \\ r < a(t), p_s'(\mathbf{r}, t) &= - p_f'(\mathbf{r}, t) + \\ &+ d_s \rho' [\pm U_d'(t) / g + 1] g r + p_{f\infty}(t) + (\varepsilon k)^{-1} a(t) a'(t) \ln [a(t) / L(t)] \end{aligned} \quad (4.4)$$

Второе соотношение (4.4) удовлетворяет условию  $p_s'(\mathbf{r}, t) |_{\rho' \rightarrow 0} \rightarrow 0$ , использованному выше в выражении (2.16).

Из результатов (4.3), (4.4) следует, что в плоской задаче влияние бесконечно длинной цилиндрической неоднородности на удаленные участки слоя более существенно, чем в трехмерном случае: возмущение давления жидкой фазы в однородном слое в экваториальной плоскости пакета логарифмически растет в бесконечности. Аналогично, из первого равенства (4.4) следует, что возмущения давления дисперсной фазы на удалении от пакета также логарифмически нарастают всюду в слое. Подобные возмущения в случае сферического пакета, занимающего конечную область, напротив, исчезающе малы вдали от него. На поля течений фаз в бесконечности указанные возмущения давлений не влияют вследствие того, что скорости  $v, w$  определяются градиентами давлений фаз, сохраняющимися, как и в трехмерном случае, вдали от пакета значения, соответствующие однородному слою:

$$\nabla p_f(\mathbf{r}, t) |_{r \rightarrow \infty} = \frac{v_0}{k(\varepsilon)} \frac{\mathbf{g}}{g}, \quad \nabla p_s(\mathbf{r}, t) |_{r \rightarrow \infty} = 0$$

Таким образом,  $p_{f\infty}(t)$  и  $p_{s\infty}$  в плоской задаче представляют собой давление жидкой фазы в экваториальной плоскости  $\theta = \pm \pi/2$  при ее движении со скоростью  $U_d(t)$  в лабораторной системе координат и давление твердой фазы, реализующиеся при отсутствии в слое неоднородности.

Далее, опираясь на соотношения (4.4) и разлагая следующее из них выражение для скачка давления твердой фазы на поверхности пакета в ряд в окрестности лобовых точек по методу Дэвиса — Тейлора, приходим к системе дифференциальных уравнений эволюции плоского круглого пакета

$$\begin{aligned} &\frac{7}{2} U_d^2(t) + a^2(t) (1 - \lambda) \left[ \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2} - \frac{a(t) L'(t)}{a'(t) L(t)} \right] + \\ &+ \left\{ (1 - \lambda) [a^2(t) + a(t) a''(t)] + \frac{a(t) a'(t)}{\varepsilon k \rho d_s} \right\} \ln \frac{a(t)}{L(t)} - \frac{p_{s\infty}}{d_s \rho} = 0 \quad (4.5) \\ &(\lambda + 1) U_d'(t) a(t) + 2 U_d(t) a'(t) + 4 U_d^2(t) = \mp (\lambda - 1) g a(t) \\ &\lambda = \rho' / \rho \end{aligned}$$

Конкретизация зависимости  $L(t)$  основана на предположении, что пакет равной с окружающим слоем плотности неподвижен в нем, т. е.  $U_d(t) = 0$  при  $\lambda = 1$ . В этом случае второе уравнение системы (4.5) удовлетворяется тождественно, а из первого уравнения следует

$$L(t) = a(t) \exp \left( - \frac{\varepsilon k p_{s\infty}}{a(t) a'(t)} \right) \quad (4.6)$$

С учетом равенства (4.6) уравнения, описывающие эволюцию пакета, запишем в виде

$$7 U_d^2(t) - (\lambda - 1)^2 a^2(t) = 0$$

$$(\lambda + 1) U_d \dot{a}(t) + 2U_d(t) a \dot{a}(t) + 4U_d^2(t) = \mp (\lambda - 1) ga(t) \quad (4.7)$$

Из соотношений (4.7) следует, что для пакетов, скорость движения которых медленно меняется во времени (так что  $U_d \dot{a}(t) \ll g$ ), всегда  $U_d^2(t) \sim ga(t)$ , что, в частности, согласуется с многочисленными экспериментальными данными по измерению скорости пузырей в псевдооживленных системах [12, 13].

В предельном случае  $\rho = 0$  (сгусток с концентрацией частиц  $\rho'$  в чистом газе) из уравнений (4.7) следует  $\dot{a} = 0$ ,  $U_d = g$ . Сгусток частиц сохраняет в этом случае размеры и движется в газе подобно свободно падающему телу.

Система (4.7) допускает полное исследование методами теории нелинейных колебаний.

Из первого уравнения системы находим

$$U_d(t) = \frac{1}{\sqrt{7}} |\lambda - 1| |a \dot{a}(t)|, \quad U_d \dot{a}(t) = \frac{1}{\sqrt{7}} |\lambda - 1| H(a \dot{a}) a \ddot{a}(t)$$

где  $H(a \dot{a})$  — функция Хевисайда.

Подставляя полученные выражения для  $U_d(t)$ ,  $U_d \dot{a}(t)$  во второе уравнение системы, приходим к следующему автономному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка для радиуса пакета:

$$\frac{\lambda + 1}{\sqrt{7}} H(a \dot{a}) a \ddot{a}(t) + \frac{2}{\sqrt{7}} |a \dot{a}(t)| a \dot{a}(t) \mp \frac{4}{7} (\lambda - 1) a^2(t) = ga(t) \quad (4.8)$$

Как обычно, верхний знак берется для всплывающих пакетов ( $\lambda < 1$ ), нижний — для погружающихся ( $\lambda > 1$ ).

Фазовые пространства  $(a, a \dot{a})$  уравнения (4.8) двулистные: уравнения эволюции различны для растущих ( $a \dot{a}(t) > 0$ ,  $H(a \dot{a}) = 1$ ) и растворяющихся ( $a \dot{a}(t) < 0$ ,  $H(a \dot{a}) = -1$ ) пакетов при любом соотношении плотностей пакета и слоя. Полупрямая  $a \dot{a} = 0$  в фазовом пространстве разделяет в нем области с различным поведением фазовых траекторий.

Вследствие указанной особенности соотношение (4.8) представим в виде систем уравнений

$$\lambda < 1, \quad a \ddot{a}(t) + \beta_+(\lambda) a^2(t) = \alpha(\lambda) a(t), \quad a \dot{a}(t) > 0 \quad (4.9)$$

$$a \ddot{a}(t) + \beta_-(\lambda) a^2(t) = -\alpha(\lambda) a(t), \quad a \dot{a}(t) < 0$$

$$\lambda > 1, \quad a \ddot{a}(t) + \beta_-(\lambda) a^2(t) = \alpha(\lambda) a(t), \quad a \dot{a}(t) > 0 \quad (4.10)$$

$$a \ddot{a}(t) + \beta_+(\lambda) a^2(t) = -\alpha(\lambda) a(t), \quad a \dot{a}(t) < 0$$

$$\left( \beta_{\pm}(\lambda) = \frac{2[\sqrt{7} \pm 2(1 - \lambda)]}{\sqrt{7}(1 + \lambda)}, \quad \alpha(\lambda) = \frac{g\sqrt{7}}{1 + \lambda} \right)$$

**5. Интегрирование уравнений, описывающих эволюцию пакета. Фазовые портреты.** Рассмотрим результаты интегрирования систем (4.9), (4.10) отдельно для всплывающих и погружающихся пакетов.

*Случай  $\lambda < 1$ .* Фазовые траектории уравнений системы (4.9) описываются однопараметрическими семействами кривых

$$a \dot{a}(a) = \left( C_{11} a^{-2\beta_+} + \frac{2\alpha}{2\beta_+ + 1} a \right)^{1/2}, \quad a \dot{a} > 0 \quad (5.1)$$

$$a \dot{a}(a) = - \left( C_{12} a^{-2\beta_-} - \frac{2\alpha}{2\beta_- + 1} a \right)^{1/2}, \quad a \dot{a} < 0$$

где  $C_{11}$ ,  $C_{12}$  — параметры семейств, причем  $C_{12} \geq 0$ .

Кривые первого семейства (5.1) не пересекают ось при  $C_{11} > 0$  и однократно пересекают ее при  $C_{11} < 0$ . Парабола

$$a^2(a) = \frac{2\alpha}{2\beta_+ + 1} a \quad (C_{11} = 0) \quad (5.2)$$

разделяет подмножества фазовых кривых этих двух типов. Все траектории второго семейства (5.1) начинаются на оси  $a' = 0$  и монотонно с течением времени приближаются к оси  $a = 0$ .

Фазовое пространство системы (4.9) изображено на фиг. 2. Фазовые траектории в обеих областях непрерывного движения  $a' > 0$  и  $a' < 0$  нормальны к оси  $a' = 0$  на ней. Поэтому ось  $a' = 0$  представляет собой континуум неустойчивых состояний покоя фазовой точки  $a = a_0, a_0' = 0$  ( $a_0, a_0'$  — начальные значения радиуса и скорости изменения радиуса круглого пакета). Фазовая точка  $(a, a')$  в результате малейшего отклонения от линии разрыва  $a' = 0$  в фазовом пространстве уходит в одну из областей непрерывности. В общем случае, как известно [10, 14], возможно непрерывное прохождение фазовой точки через подобные линии или поверхности разрыва, а также устойчивые или неустойчивые («скользящие») движения вдоль них.

Таким образом, фазовая точка, находящаяся в начальный момент времени в одной из областей  $a' > 0, a' < 0$ , в ней и останется, т. е. масса растущего пакета будет продолжать увеличиваться, а растворяющийся пакет будет терять массу вследствие оттока частиц во внешний слой.

Область роста  $a' > 0$  разбивается кривой (5.2) на две подобласти: пакет с начальным состоянием, попадающим в фазовой плоскости выше этой кривой, [растет] немонотонно. Именно, скорость роста сначала убывает (и весьма быстро при малых значениях  $a_0$ ) до некоторого минимального значения, а затем возрастает. В случае, когда начальное состояние  $(a_0, a_0')$  попадает на параболу (5.2) или ниже, приток дисперсной фазы из слоя к пакету носит монотонный характер.

В случае растворяющегося пакета удобной характеристикой интенсивности массоотдачи твердой фазы в слой является «время жизни» пакета, которое условимся отсчитывать от начального состояния  $a = a_0, a_0' = 0$ :

$$T_*(\lambda) = \int_0^{T_*} dt = \int_{a_0}^0 \frac{da}{a'(a)}$$

Используя второе соотношение (5.1), найдем

$$T_*(\lambda) = \left( \frac{2\beta_- + 1}{2\alpha} a_0 \right)^{1/2} I(\lambda), \quad I(\lambda) = \int_0^1 \frac{d\tau}{(\tau^{-2\beta_-} - \tau)^{1/2}}, \quad \tau = \frac{a}{a_0} \quad (5.3)$$

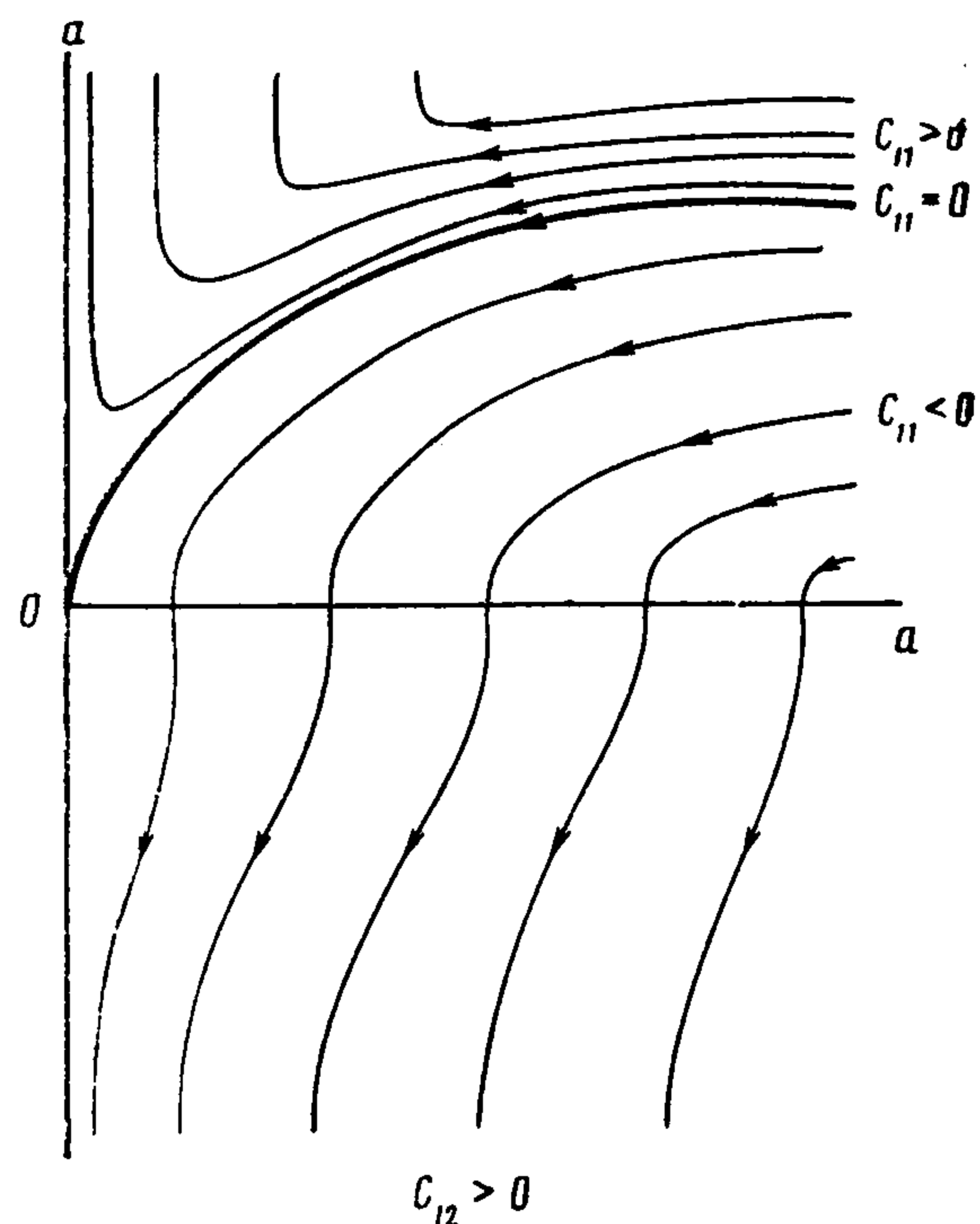
Соответствующее значение для пузыря есть, очевидно,  $T_*(0)$ . Несобственный интеграл  $I(\lambda)$ , имеющий особенность при  $\tau = 1$ , сходится по признаку Коши, поскольку подынтегральная функция при  $\tau \rightarrow 1$  имеет порядок  $\xi^{-1/2}$ ,  $\xi = 1 - \tau$ .

*Случай  $\lambda > 1$ .* В отличие от случая всплывающих пакетов для погружающихся пакетов при  $a' < 0$  коэффициент  $\beta_+(\lambda)$  знакопеременный, а именно,  $\beta_+(\lambda) \leq 0$  при  $\lambda \geq \lambda_*$ ,  $\beta_+(\lambda) > 0$  при  $\lambda < \lambda_*$ ,  $\lambda_* = 1 + \sqrt{7}/2$ . Это приводит к изменению характера фазовых траекторий в зависимости от величины относительной плотности пакета в случае его растворения ( $a' < 0$ ). В рассматриваемом случае возникает также необходимость учесть особенность, порождаемую во втором соотношении (5.1) множителем  $1/(2\beta_+ + 1)$  при  $2\beta_+ + 1 = 0$ , чему соответствует значение  $\lambda = \lambda_{**} = (5\sqrt{7} + 8)/(8 - \sqrt{7})$ .

В верхней фазовой полуплоскости, т. е. для растущих пакетов, ход фазовых кривых аналогичен представленному на фиг. 2.

Ниже приведены фазовые портреты второго уравнения (4.10) в зависимости от знака и величины коэффициента  $\beta_+(\lambda)$ , а также в предельных случаях  $\beta_+ = 0, \beta_+ = -1/2$ .

1°.  $\beta_+(\lambda) > 0, 1 < \lambda < \lambda_*$ . Поведение фазовых траекторий в области  $a' < 0$  вполне аналогично описанному выше для всплывающих пакетов. Для времени жизни пакета справедливо выражение (5.3), в котором следует сделать замену  $\beta_- \rightarrow \beta_+$ .



Фиг. 2

2°.  $\beta_+(\lambda) = 0, \lambda = \lambda_*$ . Фазовые траектории в рассматриваемой области движения описываются однопараметрическим семейством парабол:  $a'(a) = -(C_{21} - 2\alpha a)^{1/2}$ ,  $C_{12} \geq 0$  — параметр семейства.

Соответствующий фазовый портрет представлен на фиг. 3, а. Для времени полного растворения пакета из (5.3) при  $\beta_+ = 0$  находим

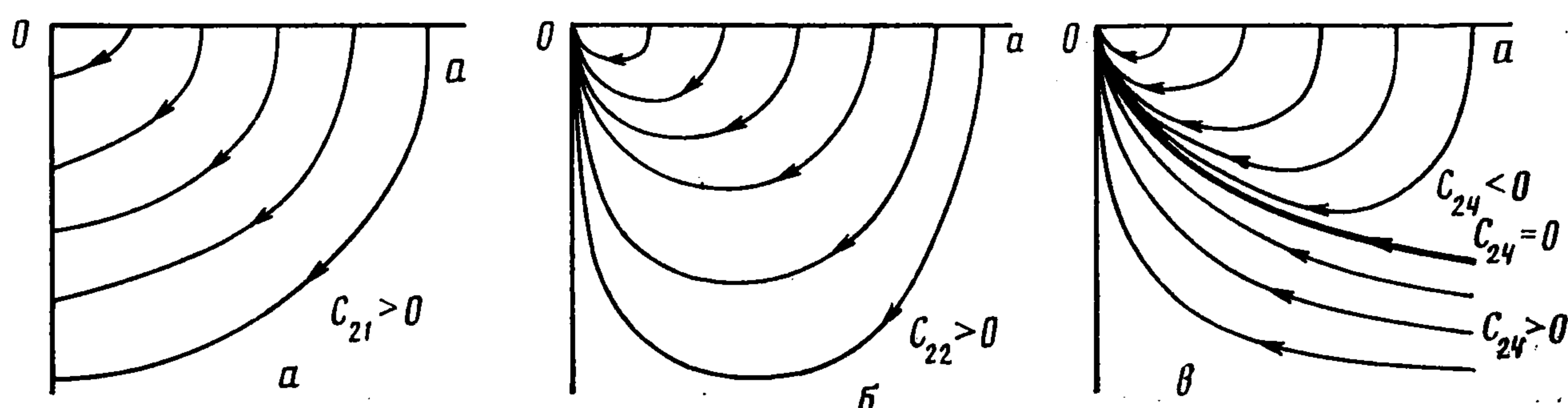
$$T_* = \left( \frac{a_0}{2\alpha(\lambda_*)} \right)^{1/2} \int_0^1 \frac{d\tau}{(1-\tau)^{1/2}} \approx 1,58 \left( \frac{a_0}{g} \right)^{1/2}$$

3°.  $0 > \beta_+(\lambda) > -1/2, \lambda_* < \lambda < \lambda_{**}$ . Фазовые траектории описываются соотношением

$$a'(a) = - \left( C_{22} a^{-2\beta_+} - \frac{2\alpha}{2\beta_+ + 1} a \right)^{1/2}, \quad C_{22} \geq 0$$

( $C_{22}$  — параметр). Каждая кривая указанного семейства дважды пересекает ось  $a' = 0$ , причем начало координат — общая точка кривых семейства.

Расположение фазовых траекторий в области  $a' < 0$  изображено на фиг. 3, б. Как видно, в рассматриваемом случае в отличие от ситуации  $\beta_+ \geq 0$  растворение пакета



Фиг. 3

имеет немонотонный характер. Скорость границы  $a'$  сначала растет (оставаясь отрицательной), достигая некоторой максимальной величины. Затем она начинает уменьшаться, так что в момент исчезновения пакета скорость его границы  $a' = 0$  (была конечной или бесконечной в рассмотренных выше случаях  $\beta_+ = 0, \beta_+ > 0$ ). Для времени растворения  $T_*$  по-прежнему справедливо выражение (5.3) с  $\beta_+(\lambda)$  вместо  $\beta_-(\lambda)$ .

4°.  $\beta_+(\lambda) = -1/2, \lambda = \lambda_{**}$ . В этом предельном случае семейство фазовых кривых имеет вид

$$a'(a) = -a^{1/2} (C_{23} - 2\alpha \ln a)^{1/2}$$

( $C_{23}$  — параметр семейства). Качественное поведение фазовых траекторий не отличается от рассмотренного в разд. 3° с той только разницей, что параметр  $C_{23}$  принимает на кривых семейства все значения из интервала  $(-\infty, \infty)$ . Для времени жизни пакета получается соотношение

$$T_* \left( \lambda = -\frac{1}{2} \right) = \left( \frac{a_0}{2\alpha} \right)^{1/2} \int_0^1 \frac{d\tau}{\tau^{1/2} (-\ln \tau)^{1/2}}$$

Фигурирующий здесь несобственный интеграл сходится.

5°.  $\beta_+(\lambda) < -1/2, \lambda > \lambda_{**}$ . Фазовые кривые второго уравнения (4.10) описываются соотношением

$$a'(a) = - \left( C_{24} a^{-2\beta_+} - \frac{2\alpha}{2\beta_+ + 1} a \right)^{1/2}$$

( $C_{24}$  — параметр). Кривые со значениями  $C_{24} \geq 0$  пересекают ось  $a' = 0$  лишь в начале координат. Кривые указанного семейства при  $C_{24} < 0$  пересекают эту ось дважды аналогично тому, как это было в разд. 3°, 4°. Разделяет подмножества кривых этих двух типов граничная парабола

$$a'^2(a) = - \frac{2\alpha}{2\beta_+ + 1} a \quad (C_{24} = 0)$$

Соответствующий фазовый портрет представлен на фиг. 3, в. Скорость границы пакета в момент его исчезновения равна нулю, как и в случаях 3°, 4°. Растворение

пакета носит монотонный или немонотонный характер в зависимости от того, попадает ли фазовая точка  $(a, a')$  в начальный момент ниже граничной кривой  $C_{24} = 0$  (а также на саму эту кривую) или выше нее.

Для времени жизни пакета в рассматриваемом случае имеет место соотношение

$$T_*(\lambda) = \left( -\frac{2\beta_+ + 1}{2\alpha(\lambda)} \right)^{1/2} \int_0^1 \frac{d\tau}{(\tau - \tau^{-2\beta_+(\lambda)})^{1/2}}$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бобков Н. Н., Гупало Ю. П. О нестационарных движениях локальных неоднородностей в псевдоожигенном слое // ПММ. 1988. Т. 52. № 3. С. 431—443.
2. Бобков Н. Н., Гупало Ю. П. О пакетном механизме перемешивания в кипящем слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 5. С. 73—84.
3. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз. 1959. 699 с.
4. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. Т. 1. М.: Наука. 1987. 464 с.
5. Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С. Массотеплообмен реагирующих частиц с потоком. М.: Наука. 1985. 336 с.
6. Davies R. M., Taylor G. The mechanics of large bubbles rising through extended liquids and through liquids in tubes // Proc. Roy. Soc. 1950. V. A200. P. 375—390.
7. Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С., Сергеев Ю. А. Рост пузыря во взвешенном слое при нелинейном межфазном взаимодействии // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 6. С. 66—73.
8. Буевич Ю. А. О движении пузырей в псевдоожигенном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1975. № 3. С. 43—51.
9. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568 с.
10. Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фурфеев Н. А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1987. 384 с.
11. Рахматулин Х. А. Газовая и волновая динамика. М.: Изд-во МГУ, 1983. 196 с.
12. Псевдоожигение / Под ред. И. Ф. Дэвидсона и Д. Харрисона: М.: Химия, 1974. 725 с.
13. Эйтс Дж. Основы механики псевдоожигения с приложениями. М.: Мир, 1986. 289 с.
14. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972. 471 с.

Москва, Горький

Поступила в редакцию  
16.XI.1989